



DIE EISZEITEN
UND
IHRE URSACHEN.

VON
DR. NORBERT HERZ
PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

LEIPZIG UND WIEN:
FRANZ DEUTICKE.

1909.

DIE EISZEITEN
UND
IHRE URSACHEN.

VON
DR. NORBERT HERZ
PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

LEIPZIG UND WIEN.
FRANZ DEUTICKE.
1909.

VORWORT.

Das vorliegende Werk ist aus Zusammenstellungen für meine Vorlesungen an der Universität hervorgegangen. Manche rein astronomische Arbeiten, wie diejenigen über die Konstitution der Sonne, über die Bewegung der Erdachse unter dem Einfluß von Änderungen der Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente u. a. waren lange vorher begonnen, teilweise schon früher als in sich abgeschlossene Abhandlungen fertiggestellt und boten notwendiges Material zur Vervollständigung der vorliegenden Arbeit. Wenn ich aber, ehe ich auf den rein astronomischen Teil überging, eine Zusammenstellung von Tatsachen anführte, die mehr der Geographie und Geologie zuzurechnen sind, so möge zur Entschuldigung der Umstand dienen, daß eine Erklärung von Erscheinungen erst auf Grund einer ausreichenden Kenntnis der Tatsachen erfolgen kann. So war es notwendig, für diejenigen Leser, denen die Details der Erscheinungen der Eiszeiten noch nicht genügend bekannt sein würden, das wichtigste hierhergehörige anzuführen. Selbstverständlich mußte ich mich dabei an die Originalarbeiten der Geographen und Geologen halten — auf Vollständigkeit kann diese Zusammenstellung natürlich keinen Anspruch erheben.

Rücksichtlich meiner im 4. Kapitel geäußerten Ansicht über die vorquartären Vergletscherungen wurde ich erst kürzlich auf die Arbeiten des englischen Geologen T. Mc. Kenny Hughes in den Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Bd. VIII (1893) und Bd. IX (1896) aufmerksam, welche sich fast vollständig mit meinen Ansichten decken, die aber im Texte nicht mehr berücksichtigt werden konnten.

Die Figuren wurden aus typographischen Gründen auf einer besonderen Tafel zusammengestellt; das Zinkcliché ließ mir in freundschaftlichster Weise Herr Hofrat Dr. J. M. Eder in der graphischen Lehr- und Versuchsanstalt anfertigen, wofür ich ihm meinen verbindlichsten Dank ausspreche. Ebenso bin ich der Druckerei E. Kainz vorm. J. B. Wallishausser für die trotz des mitunter recht schwierigen Satzes außerordentlich rasche und korrekte Drucklegung zu ganz besonderem Danke verpflichtet.

Wien, im Oktober 1909.

N. Herz.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Teil. Die Gebirgsbildung und Eisbedeckung der Erde	1
1. Kapitel. Die tektonischen Kräfte: Tangentialschub; Druck und Temperatur im Erdinnern; Abkühlung der Kruste; Vulkanismus; Ablagerung von Sedimenten und Eis; Hebungen und Senkungen	5
2. Kapitel. Die Gletscher: Allgemeine Erscheinungen; Theorie der Gletscherbewegung; Gletscher- und Wassererosion	50
3. Kapitel. Klima- und Gletscherschwankungen: Brückner'sche und Sonnenfleckenperiode; Alpengletscher; arktische Gletscher; Niederschlag und Ablation	78
4. Kapitel. Die eiszeitliche Vergletscherung: Alpen; baltischer Gletscher; außer-europäische Gletscher; Interglazialzeiten; Vorquartäre Vergletscherungen	96
5. Kapitel. Das Klima der Erde: Depression der Schneelinie, das arktische Miozän	129
II. Teil. Die Ursachen der Eiszeiten	137
6. Kapitel. Geologische und geographische Ursachen: Höhe der Gebirge; Transgressionen der Meere	143
7. Kapitel. Meteorologische Ursachen: Kohlensäure- und Wasserdampfgehalt der Luft; Meeres- und Luftströmungen	161
8. Kapitel. Astronomische Ursachen. a) Temperatur des Weltraumes, Veränderlichkeit der Sonnenstrahlung: Die Sonnenkontraktion; Temperatur der Sonne nach dem Boyle-Charles'schen und dem van der Waals'schen Gesetz; im adiabatischen Zustand und mit Berücksichtigung der Ausstrahlung	201
9. Kapitel. Astronomische Ursachen. b) Die Verteilung der Wärme auf der Erdoberfläche: ohne und mit Absorption in der Luft	226
10. Kapitel. Astronomische Ursachen. c) Der Einfluß der astronomischen Elemente: Exzentrizität, Perihel- und Aphelsommer; die Schiefe der Ekliptik und die Lage des Perihels	257
11. Kapitel. Astronomische Ursachen. d) Änderungen der Polhöhen und der Schiefe der Ekliptik: Die Form der Erde; Einfluß auf die Lage der Rotationsachse im Innern der Erde und im Raume; Polhöhenschwankungen	272

Errata.

Seite 33. In Formel 5 ist das = vor α_1^2 zu streichen.

65. Z. 5 v. o. sind die beiden Brüche zu addieren (statt —).

182. Z. 9; 11 u. 13' v. u. ist links — voranzusetzen.

236. Z. 13 v. u. statt $e \cos 2M$ lies $e \cos M$.

„ Z. 7, 8 u. 10 v. u. statt $e \sin 2(\lambda - II)$ lies $e \sin(\lambda - II)$.

252. Z. 6 v. o. statt — $\int \sin \epsilon \cos \lambda$ lies = $\int \sin \epsilon \sin \lambda$.

I. Teil.

DIE GEBIRGSBILDUNG UND DIE EISBEDECKUNG DER ERDE.

Einleitung.

In einzelnen Strichen der Erde finden sich regelmäßige horizontale Über-einanderlagerungen von Gesteinsschichten innerhalb sehr ausgedehnter Bereiche (die russische Tafel); in anderen Gegenden sind die Gesteinsmassen mannigfach verworfen (Gebirgsgegenden); es findet sich wohl schichtenweise Anordnung, die einzelnen Schichten sind aber gegeneinander geneigt; einer Schichtfolge von einer gewissen Lage (einem gewissen „Streichen“) lagert sich eine Schichtfolge von ganz anderer Streichrichtung an. Denkt man sich jede „Schicht“ durch ein starkes Kartonblatt dargestellt, eine Reihe dieser Blätter übereinandergelegt, an dieses Paket ein zweites schief angelehnt oder gegen dasselbe nach auf- oder abwärts verschoben, so wird man etwa eine Vorstellung von der Art der Lagerung der Schichten erhalten, welche die Erdkruste bilden.

In den meisten dieser Schichten hat man nun entweder Abdrücke oder Kalk- und Kieselgerüste, ferner Knochen von teilweise noch lebenden, teilweise ausgestorbenen Formen von Lebewesen, Pflanzen und Tieren gefunden. Eine Schichtfolge — beispielsweise 3 Schichten *A*, *B*, *C* (sie seien, um deutlich zu sein, Buntsandstein, Kalk und Kreide) werden in der großen Mehrzahl der Fälle in dieser Reihenfolge von unten hinauf auftreten, und man wird in denselben stets eine gewisse Gruppe von Versteinerungen, Fossilien, finden, welche denselben eigentümlich sind; sie seien *a*, *b*, *c* (Ammoniten, Reptilien,

Knochenfische). Man kann daraus schließen, daß die tiefere, mehr ins Innere zu liegende Schicht die ältere ist und die in ihr befindlichen Fossilien dieser älteren Epoche angehört haben. Finden sich an anderen Stellen Schichtenlagerungen *B, D, E* (*B* die tiefste, *E* die oberste), mit den Versteinerungen (Leitfossilien) *b, d, e*, so wird man die Schichten *D, E* für jüngeren Datums halten, wie *B* und die Fossilien *d, e* einer späteren Epoche angehörig, als die Fossilien *b*. Man kann in dieser Weise durch Vergleichung von typischen, immer wiederkehrenden Schichtenanordnungen zu einer Reihenfolge der „Formationen“ einerseits und einer zeitlichen Aufeinanderfolge von Lebewesen gelangen, welche ein anschauliches Bild über das „Alter der Schichten“ und das „Alter der Pflanzen und Tiere“ gibt.

Zu erwähnen ist übrigens, daß eine vollkommen konkordante, lückenlose Schichtfolge nirgends auf der Erde nachgewiesen ist, d. h. daß sich überall nur Gruppen von Gliedern der folgenden Reihe, mitunter durch Lücken getrennt (z. B. nur: Silur, Karbon, Perm; oder es lagern auf dem paläozoischen Grundstock sofort Gesteine des Tertiär), vorfinden.

Im großen und ganzen hat sich dabei herausgestellt, daß von den Lebewesen die einfachst gebauten als die ältesten anzusehen sind und eine Entwicklung der Pflanzen- und Tierwelt zu größerer Vollkommenheit Platz greift. Als Entwicklung zu größerer Vollkommenheit hat man dabei fortschreitende Differenzierung der Organe für verschiedene Funktionen und bei den höchsten Tierklassen Entwicklung des Gehirns und seiner Hilfsorgane zu gesteigerten geistigen Funktionen, endlich Parallelismus zwischen der Stammesentwicklung der Klassen (Phylogenie) mit der Entwicklung des Individuums (Ontogenie) anzusehen.

Wegen der im folgenden immer wiederkehrenden Anführung der Formationen und der Beurteilung des Alters derselben sei die folgende, allgemein bekannte Tabelle hier angeführt (die zugeordneten Fossilien wurden, da sie für den vorliegenden Zweck nicht in Betracht kommen, weggelassen).

- | | | |
|-------------------------------|---|--|
| I. Archäische
Formation | { | 1. Laurentisches System: Kristallinischer Schiefer, Gneiß.
2. Huronisches System: Glimmerschiefer, Phyllit. |
| II. Paläozoische
Formation | { | 1. Kambrium.
2. Silur (unteres und oberes).
3. Devon (unteres und oberes).
4. Karbon (unteres und oberes).
5. Perm oder Dyas (unteres und oberes: Rotliegendes, Zechstein). |
| III. Mesozoische
Formation | { | 1. Trias: <i>a</i>) untere (Buntsandstein); <i>b</i>) mittlere (Muschelkalk); <i>c</i>) obere (Keuper).
2. Jura: <i>a</i>) unterer (Lias = schwarzer Jura); <i>b</i>) mittlerer (Dogger = brauner Jura); <i>c</i>) oberer (Malm = weißer Jura).
3. Kreide: <i>a</i>) untere (Neokom, Wealden, Gault); <i>b</i>) obere (Cenoman, Turon, Senon). |

- IV. Känozoische Formation $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Tertiär}^1): a) \text{ älteres: Eozän, Oligozän; } b) \text{ jüngerer:} \\ \text{ Miozän, Pliozän.} \\ 2. \text{ Quartär: } a) \text{ Pleistozän; } b) \text{ Aluvium} = \text{ Gegenwart.} \end{array} \right.$

Bezüglich des Auftretens der einzelnen Tierklassen mag nur nebenher bemerkt werden, daß sich eine einzige geschlossene Reihe, derart, daß sich jede folgende Gruppe aus der vorhergehenden entwickelte, nicht findet. Insbesondere ist zu bemerken, daß die Säugetiere bereits im oberen Trias auftreten, während die Vögel, manche Reptilien, selbst die Schmetterlinge erst im Jura nachgewiesen sind. eine Erscheinung, die zu der Annahme geführt hat, daß die Tierklassen nicht in eine kontinuierliche Reihe zu bringen sind, sondern daß sich, einem Stammbaum ähnlich, aus einzelnen Grundtypen durch Spaltung und Fortentwicklung mehrere Zweige entwickelt haben, so daß z. B. nicht etwa die Säugetiere sich aus den Vögeln, sondern beide Gruppen aus den Reptilien entwickelt haben mögen.

Mit der fortgesetzten Abkühlung des Erdinnern und der damit verbundenen Kontraktion der bereits verfestigten Erdkruste mußten notwendigerweise Deformationen derselben verbunden sein u. zw. entweder Verbiegungen ohne Brüche, wobei die einzelnen Schichten ihre gegenseitige Lage nicht veränderten, geordnet übereinander blieben, aber in mehrfachen wellenförmigen Bewegungen verlaufen: Faltungen, oder aber mit Berstungen, Sprüngen und Verschiebungen verbundene Dislokationen, wobei sich ganze Gruppen von Schichten über- oder untereinanderschoben, oder gegeneinander hoben oder senkten: Überschiebungen und Verwerfungen. Diese Änderungen der Oberflächenform können ganz ansehnliche Dimensionen erreichen, wengleich sie dabei stets nur einen kleinen Bruchteil gegenüber den Dimensionen der Erde betragen; sie bilden Gebirge, wobei die zwischen den wellenförmigen Erhebungen auftretenden Vertiefungen als Täler erscheinen. Bedenkt man, daß der Halbmesser der Erde rund 6370 km, die höchste Erhebung der Gebirge, die tiefste Depression des Meeres etwa 8 km betragen, so wird man diese Unebenheiten der Erdoberfläche als recht gering bezeichnen müssen.

Die ganze Erdoberfläche, soweit sie mit der atmosphärischen Luft, mit Kohlensäure, mit Wasser in Berührung kommt, ist der Einwirkung dieser Agentien ausgesetzt, und Verwitterungsprozesse, Abspülungsprozesse, die sogenannte Denudation wirken beständig abschleifend, einebnend, ausgleichend. So werden sich im Laufe der Zeiten die erhobenen Bergriesen, deren Grundstock die gefalteten, kompakten Massen des Urgesteins: Granit, Gneiß, Glimmerschiefer, in ihren verschiedenen Formen bilden, mit den Verwitterungs- und teilweise Ab- und Anschwemmungsprodukten bedecken. So treten als obere Schichten die Kalkgebirge und darüber Sandstein auf; als Decken der eingetieften Täler und vorgelagerten Ebenen die Molasse (Tertiärsandstein der Schweiz), der ältere Flysch (Sandstein des Eozäns, östlich und südlich der Alpen bis in die Karpaten und Appenninen), der Löß, ein sandiger, kalkhaltiger Lehm (besonders in China weit verbreitet).

¹⁾ Auch als Diluvialzeit, Diluvium, bezeichnet.

Werden so im Laufe der Zeiten durch diese Verwitterungs- und Abschwemmungsprozesse die Gebirgskuppen erniedrigt, abgeflacht, so bleiben die durch die Denudation bloßgelegten Rumpfgebirge.

Faltungsprozesse treten nicht an der ganzen Erdoberfläche gleichzeitig auf, und manche Gegenden sind jetzt noch ganz ungefalteter; auf weite Strecken hin ziehen sich die einzelnen Schichten, ohne Störung übereinanderliegend; ein typisches Bild liefert hiefür in Europa das russische Flachland: die russische Tafel. Als ältestes Faltengebirge Europas wird nach Ed. Sueß das Kaledonische Gebirge, der Grundstock zu den englischen Gebirgen, gehalten, welches durch vordevonische Faltung entstanden gedacht wird. Ihm folgte die Bildung des Armorikanischen Gebirges (in der Bretagne und Nordfrankreich) und das Variskische Gebirge (das deutsche Mittelgebirge), welche durch interkarbonische und vorpermische Faltung entstanden gedacht werden. Der Tertiärformation gehört die Faltung der Alpen an, die sich in dem ersten Stadium der beginnenden Denudation befinden, während die drei erstgenannten Gruppen bereits zu Rumpfgebirgen umgebildet sind.

Nebst diesen Faltungen, welche entweder katastrophenartig, plötzlich (Katastrophentheorie von Cuvier) oder absatzweise, oder aber langsam und stetig (Lyell) vor sich gegangen sein mögen, finden aber auch Senkungen von weiten Landstrichen statt; so werden die ungarische Tiefebene, die Poebene¹⁾, mitunter auch das Wiener Becken, der Golf von Neapel und Genua als Senkungsfelder angesehen. Das ganze tyrrhenische und jonische Meer, ebenso das westliche Mittelmeer und eine Zunge desselben südlich von Kreta bis Zypern mögen früher Festland gewesen sein, und sind später im jüngeren Pliozän durch einen Bruch zu Meer geworden.

Bis zu welchem Zeitpunkte zurück die Erde als in dem gegenwärtigen Zustande der Starrheit anzunehmen ist, läßt sich nicht leicht bestimmen; einige Gelehrte scheinen der Ansicht zu sein, daß, abgesehen von kleinen Hebungen und Senkungen, das Gesamtbild der Kontinente schon seit relativ langen Zeiträumen unverändert geblieben ist. Andere hingegen deuten das Vorkommen von Ablagerungen aus großen Meerestiefen auf dem Festlande als relativ späte Bildungen und nehmen daher an, daß Änderungen, Umwandlungen fortwährend stattfinden. So ist man gegenwärtig auf Grund der Verbreitung der diluvialen Säugetiere der Ansicht, daß noch im Tertiär ein Festland zwischen Afrika und Südamerika, im Diluvium (Pleistozän) eine Verbindung zwischen Europa und Nordamerika bestand. „Das atlantische Becken ist demnach eine verhältnismäßig junge Bildung, während der stille Ozean eine uralte Einsenkung der Erdoberfläche ist, die zwar manchen Schwankungen unterworfen ist, deren Hauptmasse aber besteht, soweit wir überhaupt die geologische Geschichte jener Zeit kennen²⁾“.

¹⁾ Schon von B. Studer als ein weites Senkungsfeld angenommen.

²⁾ Neumayer-Uhlig, Erdgeschichte, II. Band, Seite 538.

I. Kapitel.

Die tektonischen Kräfte.

Die Hypothesen von dem erwähnten nearktischen Kontinent zwischen Europa und Nordamerika und dem brasilianisch-äthiopischen Kontinent zwischen Südamerika und Afrika mögen als geologisch notwendige Hypothesen angesehen werden; keineswegs aber für mehr als Hypothesen. Wesentlich anders steht es zum Beispiel mit dem großen Jurameer, in welchem zur Zeit des Jura ganz Europa versenkt gewesen sein soll. Während es keines Menschen Auge noch geglückt ist, auch nur die geringsten Spuren von untergegangenen Kontinenten zu finden, die in der Tiefe des Meeres ruhen, haben wir es beim Jurameere mit zugänglichen, nicht wegzuleugnenden zurückgebliebenen Spuren einer Überflutung durch das Meer, einer „Transgression“ des Meeres zu tun. Im wesentlichen wird sich daher die Theorie über die Bildung der Erdoberfläche an jene Tatsachen zu halten haben, welche genügend sicher gestellt sind, um bei einer mathematischen Deduktion verwertet werden zu können. Es ist dies deshalb von Wichtigkeit, weil die Theorie sich in erster Linie mit der Gebirgsbildung zu beschäftigen hat und auch die oben erwähnten Senkungsfelder, wenn sie gleich ziemlich große Gebiete umfassen, dennoch im Vergleiche zur Erdkruste als nicht sehr bedeutend angesehen werden können, während der Einsturz ganzer Kontinente, wie es die oben angeführte Hypothese fordert, kaum durch die im folgenden angeführten Kräfte hervorgebracht worden sein konnte.

Es ist daher in erster Linie derjenigen tektonischen (erdbildenden) Prozesse zu gedenken, welche die Gebirgsbildung in der letzten Zeit der Tertiärformation veranlaßt haben, und welche schon heute mit einem gewissen Grade der Wahrscheinlichkeit als sichergestellt angesehen werden können. Und die Vorgänge in dieser geologischen Epoche sind es hauptsächlich, deren wesentlicher Einfluß auf die äußere Gestaltung der Erde und auf die möglichen Veränderungen in den physikalischen Konstanten derselben (Lage der Achse, des Schwerpunktes, Größe der Hauptträgheitsmomente) bei den Ableitungen über die Theorie der Bewegung der Erde die weitgehendste Berücksichtigung fordert.

Für die Theorie der Gebirgsbildung müssen andererseits die Änderungen in den physikalischen und astronomischen Konstanten selbst herangezogen werden; Spannungsänderungen durch Änderungen in der Umdrehungsgeschwindigkeit

und die dadurch bedingte Änderung in der Fliehkraft; Spannungsänderungen durch Verlegung der Rotationsachse; Anziehung von Sonne und Mond. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß diese Momente von Einfluß auf die Gestaltsänderungen der Erdoberfläche sein müssen, daß sich die Erdkruste, trotzdem sie als feste, erstarrte Masse erscheint, wie ein elastischer Körper verhält, und es bleibt zu untersuchen, ob geringfügige Änderungen in den angegebenen astronomischen und physikalischen Elementen zu Gebirgsbildungen führen können, wie dieselben im Spättertiär auftreten.

Als wesentlich gebirgsbildende Kräfte werden jetzt hervorgehoben: a) Hebung durch Kontraktion der Erdkruste; b) Auflagerung und Erwärmung, infolge dessen Hebung; c) Auflagerung von Eis, Abkühlung und damit Kontraktion, sodann Abschmelzen, Erwärmung und daher wieder Hebung.

Wiederholt treten Versuche auf, eine mehr oder weniger regelmäßige Gruppierung der Gebirgszüge anzunehmen und zu begründen. Bekannt sind hier die Pentagondodekaedertheorie von Elie de Beaumont und die Tetraedertheorie von Owen.¹⁾ Auf die letztere kam 1875 Lowthian Green zurück.²⁾ Ihm folgten Lapparent, Michel Lévy, Marcel Bertrand u. a. Aus der Zusammenstellung von Th. Arldt³⁾ ist zu ersehen, daß Green ein Tetraeder mit aufgesetzten sechsseitigen Pyramiden annahm, und daraus eine Verlegung der jetzigen Pole gegenüber den früheren ableitete. Arldt nimmt die Lage der früheren Pole an: Der Nordpol in der Tschuktschenhalbinsel ($\lambda = 180^{\circ}$ gegen Greenwich, $\varphi = 66^{\circ}$); Südpol daher im Südatlantik ($\lambda = 0^{\circ}$, $\varphi = -66^{\circ}$). Es werden von diesem Standpunkte aus die Faltungen untersucht, und — alles wird erklärt: Die antipodische Lage von Wasser und Land, die dreiseitige Symmetrie der Erde; die Zuspitzung der Land- und Ozeanflächen; die geringere Abplattung des Südpoles, eine, wie bekannt, nicht genügend gestützte und auch bereits völlig verlassene Annahme. Arldt faßt seine Resultate in die Worte zusammen: „Die Tetraedertheorie erscheint auf den ersten Blick sehr sonderbar; eine vorurteilsfreie Prüfung derselben aber muß zu der Anerkennung führen, daß sie den großen Zügen des Erdreliefs sich recht gut anpasse“.

Man ist in der Verfolgung der Erscheinungen auch in der Physik nicht mehr auf dem Standpunkte, überall Regelmäßigkeiten der einfachsten Art zu suchen, und es sind ja oft sehr komplizierte Verhältnisse, welche sich aus wenigen einfachen Gesetzen aufbauen. Ich erinnere nur an die Zusammensetzung von Schwingungen. Sehr komplizierte Schwingungsformen können sich aus zwei oder drei einfachen zusammensetzen, und es wird kaum gestattet sein, für eine zusammengesetzte Schwingungsform eine einfache, als sich anschmiegende, zu substituieren.

¹⁾ R. Owen, „Key to the geology of the globe“, 1857.

²⁾ Lowthian Green, „Vestiges of the molten globe, as exhibited in the figure of the Earth' volcanic action and physiography.“

³⁾ Th. Arldt, „Die Gestalt der Erde.“ in S. Gerland, Beiträge zur Geophysik, Bd. VII, 1905, S. 284; das Originalwerk von Green war mir nicht zugänglich.

Wenn nun selbst einfache Deformationen — vielleicht ellipsoidische Gestaltungen — sich in entfernten Epochen übereinander gelagert hätten, diesen sich gelegentlich lokale Störungen mehr oder weniger katastrophaler Natur, wie Erdbeben, Vulkanausbrüche, superponiert hätten, so dürfte das Endresultat wohl kaum in einer einfachen Erdgestaltung zu suchen sein. Vollends eine Gestaltung zu suchen, welche einem eckigen Körper entsprechen sollte, selbst wenn derselbe nicht als regelmäßig angenommen wird, erscheint ebenso befremdlich, wie es heute in der Astronomie befremdlich erscheinen würde, z. B. die Distanzen der Himmelskörper durch eingeschriebene oder umschriebene Kugeln oder regelmäßige Körper (wie dieses Kepler im Anfange seiner Arbeiten versuchte) bestimmen zu wollen.

Marcel Bertrand¹⁾ stützt sich ebenfalls auf Green. Das Tetraeder ist nicht regelmäßig (loin d'être regulier).²⁾ Eine der Spitzen ist auf dem Polarkreise, in der Nähe der Behringstraße; im Anfang der Erdgeschichte waren Ekliptikachse, Polarachse und Tetraederachse zusammenfallend, so daß die Neigung der Tetraederachse und Polarachse auch jetzt gleich der Schiefe der Ekliptik sind. Im Laufe der Zeiten fanden dann Umsetzungen statt und das Wesen der Tetraedertheorie besteht nun darin, daß, wenn sich in der Richtung einer Tetraederkante eine Faltung, ein Kettengebirge bildete, sich auch gleichzeitig solche in den anderen zugehörigen Richtungen ergaben.

Als Schema für die Erhebung im Tertiär wird angegeben: Von dem angegebenen Pole aus gehen die drei meridionalen Kanten: Rocky Mountains, Ural bis zum Knotenpunkte des Karakorumgebirges, Japanische Vulkankette und die verbindenden äquatorialen Kanten, Mittelmeerkette (Alpen), Asiatische Kette (Himalaya) und eine dritte Kette quer über den pazifischen Ozean.

Für das Karbon und Silur waren es andere Ketten, deren Schemata ebenfalls gegeben werden.³⁾ Die Tetraeder gehen aus einander durch Drehung hervor; es werden hiefür auch Formeln angegeben, die ich ohne Ableitung, wie sie Bertrand gibt, hersetze. Ist n die Anzahl der bereits gebildeten Ketten, so kann man setzen

$$m t = \frac{K}{n^2 - A}$$

wobei K , A , m Konstante sind, und t die bis zur Bildung der letzten Kette verflossene Gesamtzeit bedeutet. Für die Einheit der Länge, das Meter, Einheit der Zeit = 100,000.000 Jahre wird $m = 38$, $K = 5500$, $A = \frac{1}{100}$. Statt dieser Formel kann auch die folgende Form gewählt werden:

$$t = T N^2$$

wobei N die Ordnungsnummer der Kette ist und T die Zeit bis zur Bildung der ersten Kette. Aus diesen Formeln kann man dann auch auf die Zahl der präkambrischen Ketten schließen.⁴⁾

1) Deformation tétraédrique de la Terre et déplacement du pôle. C. R. Bd. 130, S. 449.

2) l. c. S. 453.

3) l. c. S. 460.

4) l. c. S. 463.

Bei der Bewegung legen die Tetraederspitzen Kurven zurück, wobei eine derselben sich dem Endzustande, ziemlich nahe dem gegenwärtigen Pole immer mehr und mehr nähert. Eine Kante des Tetraeders sollte eigentlich durch den Pol gehen, und da dies nicht der Fall ist, so wird auf eine Störung geschlossen, die Green der Wirkung der Sonne zuschreibt. Wäre das Tetraeder ursprünglich regelmäßig gewesen, so wäre es jetzt deformiert; diese Deformation kommt auf Rechnung der Kontraktion, und hieraus kann man das Alter der Erde rechnen.¹⁾ „En résumé, le tétraèdre est le grand rouage, mis en jeu par le refroidissement, qui conduit et règle tous les mouvements de la surface.“

So weit Bertrand. Da die Ableitungen nicht gegeben sind, so ist es schwer, die Rechnungen zu prüfen, zu denen vor allem die Angabe der Grundlagen nötig ist, und so sind auch Zweifel berechtigt, ob die vorliegenden Formeln (bei denen übrigens ein Druckfehler unterlaufen sein muß, da mit Vernachlässigung von A die erste Formel in $t = T: n^2$ übergeht, und wie es scheint, $n = N$ und nicht $n = N^{-1}$ anzunehmen ist) allgemeine Gültigkeit haben oder nur unter bestimmten Voraussetzungen gelten. Daß es sich nicht um rein phoronomische Beziehungen handelt, bei denen der Untersuchung ebensogut ein Polyeder mit ρ Ecken zugrunde gelegt werden könnte, dessen Rotationsbewegung um eine nicht mit der Symmetrieachse zusammenfallende Achse zu untersuchen ja naheliegend ist, scheint daraus hervorzugehen, daß Deformationen des Tetraeders erwähnt werden; die durch äußere Störungen verursacht werden; und so bleibt dieser Versuch, so lange nicht Details vorliegen, unkontrollierbar.

Nach den älteren Theorien wurden die Hebungen der Gebirge durch von innen nach außen wirkende Druckkräfte der im Innern eingeschlossenen Massen verursacht, angesehen. Gegenwärtig ist man geneigt, diesen Kräften nur eine untergeordnete Bedeutung beizumessen und, wenn nicht die gesamte, so doch die Hauptwirkung der bei der Kontraktion durch Abkühlung entstandenen Tangentialkraft zuzuschreiben. Es ist also zunächst diese Frage mathematisch zu untersuchen.

Durch Zusammenpressen einer Länge ds um den Betrag αds wird eine elastische Kraft geweckt, welche der Längenänderung proportional ist, wobei ein Proportionalitätsfaktor E auftritt, der von dem Material abhängt, und mit dessen Elastizität zusammenhängt. Es ist also die geweckte Kraft

$$P = E\alpha ds.$$

Schließt das Linienelement ds mit den drei Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ ein, so sind die Komponenten dieser Kraft nach den drei Achsen $P \cos \alpha, P \cos \beta, P \cos \gamma$; ist ds das Oberflächenelement einer Fläche, welche als Begrenzungsfläche eines Körpers auftritt, so ist für diese Begrenzungsfläche

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}$$

und es werden demnach die Kraftkomponenten:

$$X = E\alpha dx, \quad Y = E\alpha dy, \quad Z = E\alpha dz$$

¹⁾ l. c. S. 464.

sein. Führt man hier das System der aufeinander senkrechten u - v -Linien (Gauß'sche Koordinaten) ein, so daß

$$x = \varphi (u, v), \quad y = \psi (u, v), \quad z = \chi (u, v)$$

und die Differentialquotienten

$$\frac{dx}{du} = a, \quad \frac{dy}{du} = b, \quad \frac{dz}{du} = c; \quad \frac{dx}{dv} = a', \quad \frac{dy}{dv} = b', \quad \frac{dz}{dv} = c'$$

sind,* so folgt

$$X = E\alpha (a du + a' dv)$$

$$Y = E\alpha (b du + b' dv)$$

$$Z = E\alpha (c du + c' dv)$$

Jeder solcher Kraft wirkt eine andere entgegen, welche unter der Voraussetzung gleichen Materiales, also desselben Wertes von E , da auch a, b, c, a', b', c' dieselben Werte und die du, dv die entgegengesetzten Werte erhalten, entgegengesetzt gleich sind. In diesem Falle wird daher ein Tangentialschub im eigentlichen Sinne des Wortes nicht auftreten. In der Tat müssen auch gleich und entgegengesetzt gerichtete tangentiale Kräfte sich aufheben und eine normale Komponente bei in jedem Punkte streng tangential wirkenden Kräften kann nicht auftreten. Es ist daher der Begriff des „Tangentialschubes“ etwas anders aufzufassen.

Sei $A B C D$ (Fig. 1) ein Stück der Erdrinde, um den Punkt R herum¹⁾; RN die Normale; $T_1 T_1', T_2 T_2'$ zwei aufeinander senkrecht stehende Normal-schnitte in der Richtung der Hauptkrümmungen; $RO_1 = r_1, RO_2 = r_2$ die zugehörigen Hauptkrümmungshalbmesser; und φ_1, φ_2 die zu den beiden Schnitten gehörigen, das Flächenstück umspannenden Winkel, welche als sehr klein vorausgesetzt werden sollen.

Die Fläche des herausgeschnittenen Rechteckes ist dann $r_1 r_2 \varphi_1 \varphi_2$ und wenn k die Dicke der Schicht, δ die absolute Dichte (Masse der Volumseinheit) und g die Beschleunigung der Schwere ist, so ist das Gewicht dieses Elementes der Schicht

$$r_1 r_2 \varphi_1 \varphi_2 k g \delta$$

Der gegen R gerichtete Druck T_1' auf der einen und ein diesem gleicher T_1'' auf der anderen Seite von der Größe T_1 pro Flächeneinheit werden eine Teilresultierende in der Richtung RN geben, während die einander entgegenwirkenden zu RO normalen Komponenten sich aufheben. Die ganze auf die Fläche AD wirkende Kraft ist daher $T_1 r_2 \varphi_2 k$ und ihre Komponente in der Richtung RO welche mit der Richtung der Kraft den Winkel $90^\circ - \frac{1}{2} \varphi_1$ einschließt

$$T_1 r_2 \varphi_2 k \sin \frac{1}{2} \varphi_1$$

und daher die Teilresultierende der beiden Kräfte $T_1' T_1''$ wegen der Kleinheit des Winkels φ_1 gleich $2 T_1 r_2 \varphi_2 k \frac{1}{2} \varphi_1 = T_1 r_2 \varphi_1 \varphi_2 k$.

Ebenso ist die Resultierende der in der Richtung $T_2' T_2''$ wirkenden Kräfte

$$2 T_2 r_1 \varphi_1 k \frac{1}{2} \varphi_2 = T_2 r_1 \varphi_1 \varphi_2 k.$$

¹⁾ Vgl. The Rev. Osmond Fisher. Physics of the Earth Crust 1881.

Ist nun noch der pro Flächeneinheit nach aufwärts wirkende Druck der innern Masse P , so ist der gesamte nach außen wirkende Druck

$$P r_1 r_2 \varphi_1 \varphi_2$$

und diese Drucke vereinigen sich, eine Hebung der Schicht zu bewirken, während das Gewicht der Schicht nach abwärts, also entgegenwirkt. Für das Gleichgewicht muß daher, wenn pro Flächeneinheit der Oberfläche noch ein Druck Q nach abwärts wirkt (s. Seite 12)

$$T_1 r_2 \varphi_1 \varphi_2 k + T_2 r_1 \varphi_1 \varphi_2 k + P r_1 r_2 \varphi_1 \varphi_2 = r_1 r_2 \varphi_1 \varphi_2 (k g \delta + Q)$$

somit

$$\left(\frac{T_1}{r_1} + \frac{T_2}{r_2} \right) k + P = g \delta k + Q.$$

Über die Größe der Kräfte T_1, T_2 läßt sich im allgemeinen nichts aussagen; bei nahe kugelförmiger Gestalt wird dieselbe aber nach allen Richtungen nahe gleich sein, und dann kann man $T_1 = T_2 = T$ setzen und es wird

$$T \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) k + P = g \delta k + Q.$$

Für die Kugel wird $r_1 = r_2 = a$, gleich dem Kugelhalbmesser, somit

$$2 T = g \delta a + \frac{Q - P}{k} a.$$

$\frac{Q}{k}, \frac{P}{k}$ sind die auf die Einheit der Dicke reduzierten Druckkräfte nach abwärts,

beziehungsweise aufwärts. Wird $Q = P = 0$ angenommen, so ergibt sich

$$2 T = 981 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6387 \cdot 10^5 = 156 \cdot 64 \cdot 10^{10} \text{ Dyn.}$$

Führt man das spez. Gew. s an Stelle der absoluten Dichte ein, so wird

$$2 T = s a + \frac{Q - P}{k} a$$

wobei, wenn a in cm , s in gr pro cm^3 ausgedrückt wird, P und T als die Drucke in Gramm pro cm^2 Fläche folgen, oder, wenn a in Metern, s das Gewicht eines m^3 in kg ist der Druck in kg pro m^2 erhalten wird. Der erstere Druck wäre

$$2 T = 2 \cdot 5 \cdot 6387 \cdot 10^5 gr. = 2 \cdot 5 \cdot 6387 \cdot 10^2 kg \text{ pro } cm^2, \text{ also } 1.596.700 \text{ Atmosphären}^1).$$

Für kleine Teile einer Kugelfläche läßt sich dieser Satz auch für beliebig geformte Flächenstücke leicht beweisen. Sei ein Stück einer Kugelfläche, bezogen auf ein rechtwinkeliges Achsensystem XY gegeben, und wirkt auf ein Flächenelement $k ds$ der seitlichen Begrenzungsfläche ein Druck $T k ds$, so ist die Komponente in der Richtung der x , wenn i der Neigungswinkel der nach innen gerichteten Normale der Begrenzungsfläche ist:

$$T_x = T \cos i k ds = T k ds \cos i = T k dy$$

¹⁾ Dieses gäbe $15967 \cdot 10^5 kg$ pro m^2 oder auf englische Maße umgerechnet: pro Quadratfuß genähert $15967 \cdot 10^5 kg = 32000 \cdot 10^5 \text{ Pfund} = 320 \cdot 10^8 \text{ Tonnen}$. O. Fisher hat 830.200 Tons (S. 35) und folgert daraus, daß keine Schale genügende Festigkeit hat, um diesem seitlichen Druck zu widerstehen (S. 42). Der Druck erscheint aber nur deshalb in so großen Zahlen ausgedrückt, weil er im Verhältnis von cosec des Neigungswinkels vergrößert ist, und dieser Neigungswinkel außerordentlich klein ist; eine geringe Kraft von innen nach außen vermag ihn schon zu ersetzen.

daher das Integral längs der ganzen Begrenzungslinie, wenn der Druck T pro Flächeneinheit als konstant angenommen wird:

$$\int_C T_x = \int_C T k dy = T k \int_C dy = 0$$

da das geschlossene Integral über die Begrenzungskurve C gleich Null wird. Ein Tangentialschub in der Richtung der Fläche findet daher nicht statt, wohl aber eine Kompression.

Ist nun der Neigungswinkel der Richtung von T mit der Flächennormale in R die als Z -Achse (Normale zu XY) auftritt, gleich J , so ist die Resultierende in dieser Richtung

$$Z = \int T_z = \int T \cos J \cdot k ds.$$

Die Begrenzungslinie des Flächenstückes sei durch Polarkoordinaten ρ , φ bezogen auf den Punkt R gegeben, und die Neigung des Linienelementes ds in einem Punkte A gegen RA sei $90^\circ - \alpha$. Macht man in dem Kreise ARM , RM über R hinaus, so daß $AM = 90^\circ$ ist, und ist Q der Pol des Linienelementes ds (Fig. 2) so ist $MQ = \alpha$, $QR = J$ und aus dem bei M rechtwinkligen Dreiecke MQR folgt, wenn $MR = i$ gesetzt wird

$$\cos J = \cos i \cos \alpha$$

daher

$$Z = \int T \cos i \cos \alpha \cdot k ds.$$

Für konstante Dicke k und konstantem Widerstand T folgt hieraus

$$Z = T k \int \frac{\rho}{a} ds \cos \alpha = \frac{T k}{a} \int \rho^2 d\varphi$$

daher für kleine Flächenteile

$$Z = 2 \frac{T k}{a} f$$

wenn f die Fläche des herausgegriffenen Flächenstückes ist; daher wieder das frühere Resultat. Es darf jedoch nicht übersehen werden, daß dieser Druck T das Flächenstück eben in seiner Lage erhält, und ihm durch einen gleichen Gegendruck, der von dem Gewichte des Rindenstückes herrührt, das Gleichgewicht gehalten wird. Was gewöhnlich als „Tangentialschub“ erklärt wird, ist also in erster Linie nichts anderes, als die Kraftkomponente in der Richtung der Tangente der Begrenzungslinie, welche das Flächenstück vor dem Falle bewahrt.

Wäre $Q = P = 0$, d. h. kein Druck von außen oder innen, so wäre $2 T = g \delta a$. Trotz des hohen Druckes könnten aber keine Dislokationen auftreten, so lange T überall und nach allen Richtungen dasselbe ist.

Bei der Kontraktion durch völlig gleichmäßige Abkühlung werden überhaupt keine Tangentialkräfte geweckt: Durch Abkühlung wird eben das Volumen auf einen kleineren Betrag reduziert und wenn, wie eben gezeigt, $2 T = g \delta a$ ist, so wird eine resultierende Kraft weder nach außen, noch nach innen zur Wirksamkeit kommen. In der Tat leuchtet ja durch bloße Überlegung ein, daß eine homogene Voll- oder Hohlkugel bei der Zusammenziehung durch gleichmäßige Abkühlung in keinem Punkte einen deformierenden Druck erfahren kann, und ebenso ist ersichtlich, daß ein aus einer Hohlkugel

herausgeschnittenes Stück, um durch tangential wirkende Kräfte getragen zu werden, ganz enormer Kräfte bedarf.

Ist aber die Hohlkugel mit einer anderen Masse ausgefüllt, so tritt stets noch eine nach außen wirkende Kraft P hinzu, welche das Gewicht der Kruste trägt und die seitlichen Teile entlastet. Sei dieser Druck P_0 , so wäre die Gleichung jetzt zu schreiben

$$2 T = g \delta a - \frac{P_0}{k} a$$

und daraus folgt im Verein mit dem früheren, daß wenn aus dem Erdinnern ein Druck P_0 ,

$$\frac{P_0 a}{k} = 1.596.700 \text{ Atmosphären}$$

pro Einheit der Dicke (1 m) nach außen wirken würde, die Schichten der Kruste eben schwebend erhalten würden, ohne daß irgend ein Krustenstück durch die umgebenden Teile getragen zu werden brauchte. Für $T = 0$ folgt

$$P_0 = s k$$

pro cm^2 , daß also eine Kraft, gleich dem Gewichte der Kruste über der gedrückten Fläche, den sog. Tangentialschub ersetzen kann. Auch dies ist eigentlich unmittelbar einleuchtend.

Sondert man von dem inneren Drucke einen Teil P_0 ab, so daß $P = P_0 + P_1$ ist, so bleibt als deformierende Kraft

$$K = 2 T - g \delta a + \frac{P_0}{k} a + \frac{P_1 - Q}{k} a = \frac{P_1 - Q}{k} a.$$

Diese Kraft K ist nach außen gerichtet, wenn $P_1 > Q$ ist, und ist nach innen gerichtet, wenn $P_1 < Q$ ist. Der Resultierenden aus den beiden Kräften P_1 und Q wirkt jedoch noch die Festigkeit F des Krustenmaterials entgegen. Ist daher

$$P_1 > Q + F \text{ so finden Hebungen statt, ist aber}$$

$$Q > P_1 + F \text{ so finden Senkungen statt.}^1)$$

Es tritt nun die Frage auf, inwieweit durch Abkühlung der Kruste oder des Innern Spannungsänderungen auftreten können.

Sind Kern und Kruste gleichartig, so haben sie gleiche Ausdehnungskoeffizienten; kühlen sich beide gleichmäßig ab, wie dies der Fall sein würde, wenn die Erde ein absoluter Wärmeleiter wäre, so werden infolge der gleichmäßigen Zusammenziehung keinerlei Spannungsänderungen auftreten (wie man es bei einer homogenen Metallkugel beobachten kann). In zwei Fällen jedoch können wesentliche Spannungen auftreten, welche zu Faltungen führen werden: 1. wenn die Kruste ein schlechter Leiter ist, so daß die Temperatur im Innern sich nur wenig ändert, treten Spannungsänderungen bei Abkühlung der Kruste auf und 2. werden Faltungen auftreten, wenn die Kruste bereits stark abgekühlt ist, das Innere hingegen sich noch im Stadium einer langsamen Abkühlung und Kontraktion bei einer noch wesentlich höheren Temperatur befindet.

¹⁾ Es ist daher auch der Schluß O. Fisher's, daß die Ablagerung von Sedimenten keine Senkungen hervorbringen kann, weil diese Ablagerungen die Festigkeit der Kruste vermehren (l. c. S. 84) nicht gerechtfertigt.

Den Druck, der im Innern der Erde herrscht, hat A. Ritter¹⁾ unter der Annahme berechnet, daß die Dichte der Erde nach dem Laplace'schen Gesetze zunimmt. Da, wenn der Druck von der Temperatur unabhängig ist, wie dieses für feste und flüssige Körper angenommen werden kann,

$$dp = - \frac{g}{g_0} \sigma dx$$

ist, wenn g die Beschleunigung der Schwere in der Entfernung x vom Erdmittelpunkte, g_0 die Beschleunigung der Schwere an der Erdoberfläche ist, so wird

$$\frac{g}{g_0} = \frac{m}{M} \cdot \frac{a^2}{x^2}$$

wenn m die Masse der bis zur Entfernung x reichenden Kugel, M die Masse der ganzen Erde ist. Damit wird:

$$dp = - \frac{m a^2}{M x^2} \sigma dx = - \frac{a^2 \sigma}{M x^2} dx \int_0^x 4 \pi \sigma x^2 dx$$

und daher

$$p = - \frac{4 \pi a^2}{M} \int_0^a \frac{\sigma}{x^2} dx \int_0^x \sigma x^2 dx.$$

Nach Laplace ist

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\sin qx}{qx}$$

wobei q sich aus der mittleren Dichte oder der Oberflächendichte bestimmt. Ist σ_1 die Oberflächendichte, so ist

$$\frac{\sin qa}{qa} = \frac{\sigma_1}{\sigma_0};$$

die mittlere Dichte folgt aus der Masse und dem Volumen; es ist

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3$$

$$\begin{aligned} M &= \int_0^a 4 \pi x^2 dx \cdot \sigma = 4 \pi \sigma_0 \int_0^a x^2 \frac{\sin qx}{qx} dx = \frac{4 \pi \sigma_0}{q^3} \left[\sin qx - qx \cos qx \right]_0^a \\ &= \frac{4 \pi \sigma_0}{q^3} [\sin qa - qa \cos qa], \end{aligned}$$

und daraus die mittlere Dichte

$$\sigma_m = \frac{3 \sigma_0}{a^3 q^3} [\sin qa - qa \cos qa].$$

Setzt man $qa = \lambda$, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_m}{3 \sigma_0} &= \frac{1}{\lambda^3} [\sin \lambda - \lambda \cos \lambda] \\ \frac{\sigma_m}{3 \sigma_1} &= \frac{1}{\lambda^2} [1 - \lambda \cot \lambda] \end{aligned}$$

¹⁾ „Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Konstitution der Weltkörper.“
Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge Bd. 8 (1879), S. 157.

Da nun $\sigma_m = 5.6$, $\sigma_0 = 2.8$ ist, so folgt der Wert von λ aus der Gleichung

$$\frac{1}{\lambda^2} [1 - \lambda \cot \lambda] = \frac{2}{3} \qquad \lambda = 2.46041 = 140^\circ 58' . 3$$

und damit¹⁾

$$\sigma_0 = \sigma_1 \frac{\lambda}{\sin \lambda} = 16.94.$$

Mit Berücksichtigung der verschiedenen Abplattung der Schichten gleicher Dichtigkeit und der aus den Präzessionserscheinungen folgenden Werte für die Differenzen der Hauptträgheitsmomente erhält man aus der Oberflächendichte und der mittleren Dichte der Erde die Beziehung²⁾

$$\sigma = 11.3 \left[1 - 1.04 \left(\frac{x}{a} \right)^2 + 0.275 \left(\frac{x}{a} \right)^4 \right].$$

Obzwar dieses Resultat, strenge genommen, nur für eine abgeplattete Erde gilt, bei welcher die Abplattung der Schichten gleicher Dichtigkeit nach innen zu sich ändert und die Abplattung der einzelnen Schichten gegeben ist durch²⁾

$$\alpha = \frac{1}{372} \left[1 + 0.178 \left(\frac{x}{a} \right)^2 + 0.054 \left(\frac{x}{a} \right)^4 + 0.016 \left(\frac{x}{a} \right)^6 \right]$$

so kann man diese Formel doch auch zur Berechnung der Erdmasse, und der im Innern herrschenden Drucke unter der vereinfachenden Annahme, daß die Erde kugelförmig ist, verwenden. Dabei ist dann die Mittelpunktsdichte $\sigma_1 = 11.3$, die Oberflächendichte $\sigma_0 = 2.66$, die mittlere Dichtigkeit $\sigma_m = 5.6$.

Da nun für die Laplace'sche Annahme

$$m = \frac{4 \pi \sigma_0}{q^3} (\sin qx - qx \cos qx)$$

ist, so folgt

¹⁾ Es ist $\sigma_0 = 1.952 \sigma_m$; Ritter (l. c. S. 168) hat $\sigma_0 = 3.91 \sigma_m$; doch wird später $\sigma_0 = 3.91 \sigma_1$ verwendet.

Eine andere Formel wurde später von Waltershausen angegeben; er setzt

$$\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0 - \sigma_1} = \frac{x^2}{a^2} \text{ oder: } \sigma = \sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_1) \frac{x^2}{a^2}.$$

Mit der Laplace'schen Formel zusammengestellt, würde dies ergeben

$$\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0 - \sigma_1} = \left[\left(\frac{qx - \sin qx}{x^3} \right) : \left(\frac{qa - \sin qa}{a^3} \right) \right] \cdot \frac{x^2}{a^2},$$

so daß

$$\frac{qx - \sin qx}{x^3} = \frac{qa - \sin qa}{a^3}$$

konstant sein müßte; da dieses nicht der Fall ist, so geben die beiden Formeln verschiedene Werte für die Dichte; die Abweichungen werden sehr beträchtlich.

Nach dieser Formel folgt für die Masse

$$M = 4 \pi \int_0^a \left[\sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_1) \frac{x^2}{a^2} \right] x^2 dx = 4 \pi \sigma_0 a^3 \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{5} \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)$$

$$\sigma_m = 3 \sigma_0 \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{5} \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)$$

und da $\sigma_m = 2 \sigma_1$ ist, $\sigma_0 = 9.8$.

²⁾ F. R. Helmert. Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, II Bd. S. 487.

$$\frac{g}{g_0} = \frac{3 \sigma_0 (\sin qx - qx \cos qx)}{\sigma_m q^3 a x^2} \quad 1)$$

und da

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{qx \cos qx - \sin qx}{qx^2} \sigma_0$$

ist, so wird

$$\frac{g}{g_0} = -\frac{3}{\sigma_m} \frac{1}{q^2 a} \frac{d\sigma}{dx}$$

Damit wird

$$dp = \frac{3}{\sigma_m} \frac{1}{q^2 a} \frac{d\sigma}{dx} \cdot \sigma dx = \frac{3}{\sigma_m q^2 a} \sigma d\sigma$$

und da der Oberflächendruck $p_1 = 0$ angenommen werden kann, für den Druck p in der Tiefe x :

$$p = + \frac{3}{2 \sigma_m q^2 a} (\sigma^2 - \sigma_1^2) = \frac{3}{2} \frac{a \sigma_1^2}{\sigma_m \lambda^2} \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^2 - 1 \right] = c \cdot \frac{1}{\lambda^2} \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\log c = 6.126378; p \text{ in Atmosphären.}$$

Im Erdmittelpunkte wird damit

$$p_0 = 3.152500 \text{ Atmosphären (kg pro cm}^2\text{).}$$

In der Tiefe von $\frac{1}{10}$ des Erdhalbmesser, d. i. in 637 km Tiefe ist $x = \frac{9}{10} a$,
 $p = 327.750$ Atmosph.

Aus dem Gesetz von Helmert

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \alpha \frac{x^2}{a^2} + \beta \frac{x^4}{a^4} \right)$$

folgt:

$$m = 4 \pi \sigma_0 \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{\alpha}{5} \frac{x^5}{a^2} + \frac{\beta}{7} \frac{x^7}{a^4} \right]$$

$$\frac{m}{M} \frac{a^2}{x^2} = \frac{\sigma_0}{\sigma_m} \frac{x}{a} \left[1 - \frac{3}{5} \alpha \frac{x^2}{a^2} + \frac{3}{7} \beta \frac{x^4}{a^4} \right]$$

$$dp = -\frac{\sigma_0^2}{\sigma_m} \frac{x}{a} \left[1 - \frac{8}{5} \alpha \frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{10}{7} \beta + \frac{3}{5} \alpha^2 \right) \frac{x^4}{a^4} - \frac{36}{35} \alpha \beta \frac{x^6}{a^6} + \frac{3}{7} \beta^2 \frac{x^8}{a^8} \right] dx$$

und durch Integration zwischen den Grenzen ($p = 0$, $x = a$ Oberfläche) und ($p = p$, $x = x$):

$$p_0 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_m} \cdot \frac{a}{2} \left[1 - \frac{4}{5} \alpha + \left(\frac{10}{21} \beta + \frac{1}{5} \alpha^2 \right) - \frac{9}{35} \alpha \beta + \frac{3}{35} \beta^2 \right]$$

$$p = p_0 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_m} \frac{x^2}{2a} \left[1 - \frac{4}{5} \alpha \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{10}{21} \beta + \frac{1}{5} \alpha^2 \right) \left(\frac{x}{a} \right)^4 - \frac{9}{35} \alpha \beta \left(\frac{x}{a} \right)^6 + \frac{3}{35} \beta^2 \left(\frac{x}{a} \right)^8 \right]$$

p_0 ist der Druck im Erdmittelpunkte der sich gleich 3,255.000 Atm. ergibt²⁾.

Um die Beziehungen zwischen Temperatur und Tiefe im Innern der Erde genauer kennen zu lernen, muß die Leitung der Wärme im Erdinnern

1) Da für kleine Werte von x : $\frac{\sin qx - qx \cos qx}{x^2} = \frac{1}{3} q^3 x + \dots$ ist, so wird im Erdmittelpunkte die Schwerkraft null, wie es sein muß.

2) Rechnet man den Druck mit der konstanten Dichte $\sigma_m = 5.6$, so folgt derselbe gleich $6.37 \cdot 10^5 \cdot 5.6 = 3,567.000$ Atm.

näher berücksichtigt werden. Man kann dabei von den Formeln ausgehen, welche die Leitung in einem Stabe darstellen, wenn man die Leitung aus dem Innern längs der Radien fortschreitend denkt, und jeder Radius (eigentlich unendlich dünne Kugelsektor) als ein leitender Stab betrachtet wird.

Die Ableitung der Differentialgleichung ist ja außerordentlich einfach: Von einem Raume I tritt in den Raum II (jeder Raum zwischen zwei um dx von einander entfernten Querschnitten) in der Zeit t die Wärmemenge $kqt \frac{d\vartheta}{dx}$ wenn ϑ die Temperatur $d\vartheta : dx$ das Temperaturgefälle, q die Größe des Querschnittes, und k die innere Wärmeleitungs-konstante bedeutet; von II tritt in den Raum III die Wärmemenge $kqt \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)'$ da die Temperatur in III eine andere ist; die zurückgehaltene Wärme

$$kqt \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx$$

wird teils nach außen abgegeben und der Rest dient zur Temperaturerhöhung in dem Raume II; der erste Teil ist $hpt dx \cdot \vartheta$, wenn p der Umfang und h die Konstante der äußeren Wärmeleitung ist; der zweite Teil ist $q dx s c t \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$, wenn s das spezifische Gewicht, c die spezifische Wärme des Stabes ist; daraus folgt nach Division durch qsc , wenn

$$\frac{k}{sc} = g^2, \quad \frac{hp}{qsc} = b$$

gesetzt wird, die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = g^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - b \vartheta.$$

Diese Differentialgleichung wird durch die Substitution $\vartheta = e^{-bt} \vartheta'$, wo ϑ' eine Funktion von t und x ist, vereinfacht; es folgt

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial t} = g^2 \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x^2}.$$

Die Integrale dieser Differentialgleichungen, als mathematische Darstellung der Wärmebewegung zeigen manche von der Wirklichkeit abweichende Erscheinungen, so daß man sie noch nicht als eine befriedigende Lösung ansehen kann.

Zunächst ist für den stationären Zustand $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$; damit würde

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{b}{g^2} \vartheta = l^2 \vartheta$$

wobei $l^2 = \frac{hp}{kq}$ gesetzt wurde. Diese Gleichung wird befriedigt durch

$$\vartheta = C_1 e^{lx} + C_2 e^{-lx}$$

Eine äußere Wärmeleitung, Übergang von einem Stabe zum anderen findet aber hier nicht statt; denn in gleichen Entfernungen vom Mittelpunkte kann man mit Ausnahme geringer Störungen die Temperatur überall als gleich ansehen; dann ist $h = 0$, $l = 0$, und für den stationären Wärmezustand würde die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = 0,$$

demnach

$$\vartheta = C_1 x + C_2$$

d. h. die Temperaturzunahme gegen das Erdinnere würde proportional der Entfernung. Diese Annahme ist unzulässig; denn mit der für die Erdoberfläche bestimmten geothermischen Tiefenstufe 1° auf je 20 bis 40 *m*, im Durchschnitt 1° C. auf 30 *m* würde die Temperaturzunahme pro *km* rund 33° betragen, und so müßte im Erdmittelpunkte eine Temperatur von rund 200.000⁰ C. herrschen. Ja selbst wenn die geothermische Tiefenstufe 1° auf je 50 *m* angenommen würde, also 20° pro *km*, würde sich noch immer die Temperatur im Erdmittelpunkte gleich 125.000⁰ C. ergeben. Die Zunahme der Temperatur nach dem Erdinnern muß also ein anderes Gesetz befolgen. Uhlig bemerkt allerdings sehr mit Recht ¹⁾: „Die Untersuchungen über die Temperatur in der Tiefe der Erde gehen alle von der Voraussetzung aus, daß die Gesteine unmittelbar durch Erkaltung an Ort und Stelle ihre gegenwärtige Temperatur erhalten haben; das ist unrichtig; es sind meist Ablagerungsgesteine und Gesteine, die mit Sicherheit als der ursprünglichen Erstarrungsrinde angehören, kennen wir nicht.“ Ob aber dieses einen so wesentlichen Einfluß auf die Untersuchungen über die Temperatur des Erdinnern haben könnte, bleibt immerhin fraglich. Denn die Temperaturzunahme ins Innere der Erde kann sich in den oberflächlichen Schichten, selbst wenn es Ablagerungsgesteine sind, nur auf dem Wege einer Annäherung an den stationären Zustand durch Leitung hergestellt haben, umso mehr als die Ablagerungen ja lange Zeiträume erforderten, innerhalb deren die der Sonnenwärme nicht mehr ausgesetzten Schichten, selbst als schlechte Leiter, dennoch auf diesem Wege der Leitung den endlichen stationären Zustand erreicht haben konnten. Aber gerade im Innern der Erde muß notwendigerweise der stationäre Zustand nach einem anderen Temperaturgesetze erreicht sein. Es muß jedenfalls auf das ziemlich hohe Temperaturgefälle an der Oberfläche später ein viel langsames folgen. In der Tat wird das Resultat ein wesentlich anderes, wenn man das Temperaturgefälle auf der Erdoberfläche als das Resultat einer Abkühlung mit nachströmender Wärme vom Zentrum ansieht. Zu diesem Zwecke muß die obige partielle Differentialgleichung für den Fall $b = 0$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = g^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$$

integriert werden.

Das Integral dieser Differentialgleichung ist, wenn für $t = 0$, $\vartheta = \Theta$ konstant angenommen wird,

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{1}{2} \Theta \left[\Phi \left(\frac{a-x}{2g\sqrt{t}} \right) + \Phi \left(\frac{a+x}{2g\sqrt{t}} \right) \right]$$

wobei

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\mu^2} d\mu$$

¹⁾ Neumayr-Uhlig, Erdgeschichte I. S. 127.

ist. ¹⁾ Dieses Integral, welches, wie man sich durch unmittelbare Differentiation überzeugen kann, die Differentialgleichung befriedigt, gibt für die Mittelpunkts-temperatur ϑ_m und die Oberflächentemperatur ϑ_o die Werte

$$\vartheta_m = \vartheta_o + \Theta \Phi \left(\frac{a}{2g\sqrt{t}} \right), \quad \vartheta_o = \vartheta_o + \frac{1}{2} \Theta \Phi \left(\frac{2a}{2g\sqrt{t}} \right)$$

und da für große Werte des Argumentes, etwa schon von $\Phi(2)$ oder $\Phi(3)$ angefangen $\Phi(z) = 1$ wird, und für kleine Werte des Argumentes $\Phi(2z) = 2\Phi(z)$ ist, so würde für große Werte von t allerdings $\vartheta_m = \vartheta_o$, für kleine Werte aber $\vartheta_m - \vartheta_o = 2(\vartheta_o - \vartheta_o)$.

Den Bedingungen der Aufgabe wird genügt, wenn man die zweite Φ -Funktion wegläßt. Es wird also ²⁾

$$\vartheta = \vartheta_o + \Theta \Phi \left(\frac{a-x}{2g\sqrt{t}} \right).$$

Für $x = a$ wird als Temperatur wegen $\Phi(0) = 0$ die Oberflächentemperatur ϑ_o erhalten, u. zw. für jede beliebige Zeit; für $x = 0$ wird

$$\vartheta_m = \vartheta_o + \Theta \Phi \left(\frac{a}{2g\sqrt{t}} \right)$$

Für wachsende Werte von t nähert sich auch hier das Argument der Null, und es nähert sich daher die Temperatur des Erdmittelpunktes derjenigen der Oberfläche, Für $t = 0$ erhält man wegen $\Phi(\infty) = 1$ den Wert der Mittelpunkts-temperatur zur Zeit des Beginnes der Abkühlung $\vartheta_m^{(0)} = \vartheta_o + \Theta$; demnach bedeutet Θ den Überschuß der Mittelpunkts-temperatur über die Oberflächentemperatur ϑ_o .

Da nun

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = - \frac{\Theta}{g\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(a-x)^2}{4g^2 t}}$$

ist und für kleine Werte von $a - x = y$ (Tiefe des Punktes unter der Oberfläche) der Exponentialfaktor gleich 1 gesetzt werden kann, so wird

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = - \frac{\Theta}{g\sqrt{\pi t}} = - \frac{\Theta}{\sqrt{\pi t}} \sqrt{\frac{sc}{k}}$$

Die Leitungsfähigkeit der Körper ist nun eine sehr verschiedene. Es gehen z. B. bei dem Temperaturgefälle 1° pro Stunde: durch einen m^3 Marmor: 3 Cal.; Kalkstein: 1·8 Cal.; Gips: 0·4 Cal. Ferner für Metalle: Silber ungefähr 150 Cal.; Gold, Platin, Kupfer etwa 80 Cal., Eisen etwa 25 Cal. Nimmt man als Zeiteinheit den Tag, so wird im Mittel

für Gesteine . $k = 48$ Cal. $s = 2500$ kg pro m^3 $c = 0\cdot2$ $g_o = 0\cdot310$
für Metalle . $k = 1920$ Cal. $s = 13000$ kg pro m^3 $c = 0\cdot15$ $g = 1\cdot000$

Der Wert von g ist daher mit den Massen veränderlich, und da nach den Untersuchungen über die Dichte des Erdinnern wohl die geschmolzenen Metalle im Erdmittelpunkte sind, so wird g gegen das Innere zu wachsen.

¹⁾ Eine ausführliche Tafel dieser Funktion siehe in des Verfassers „Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung“, Anhang.

²⁾ Vgl. W. Thomson (Lord Kelvin) „On the secular cooling of the Earth Crust“ Transact. of the Royal Society of Edinburgh, Bd. 23, S. 163.

Wird als Zeiteinheit das Jahr gewählt, so wird g gleich 5·925, beziehungsweise 19·11.¹⁾

Die beobachtete geothermische Tiefenstufe 30 m pro 1° C., das ist $(\partial \vartheta : \partial x)_0 = -\frac{1}{30}$ würde daher erfordern, daß

$$\frac{\Theta}{\sqrt{t}} = \frac{1}{30} g \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} = \begin{cases} 0.350 \\ 1.130 \end{cases}$$

Setzt man $\Theta = 4000^\circ \text{C.}^2)$, so würde sich daraus ergeben, daß es der Zeit $t = 130,600.000$ Jahre, beziehungsweise 12,550.000 Jahre bedurfte, um den jetzigen Zustand herbeizuführen.

Rechnet man hiemit die geothermische Tiefenstufe für verschiedene Tiefen, so findet sich, daß sie bis etwa 10 km Tiefe unverändert ist; in 50 km Tiefe ist sie noch 34·4 m pro °, in 200 km Tiefe aber schon 265·8 m pro °, oder die Temperaturabnahme 0·00376° pro m , also 3·76° pro km ; und ebenso wird die Temperaturabnahme in 300, 400, 500 km Tiefe nur mehr 0·246°, 0·0054°, 0·00004° pro km betragen. Die Temperaturänderungen erstrecken sich also wesentlich nur auf eine oberflächliche, relativ dünne Kruste von kaum 300 km Tiefe.

Für die Mittelpunktstemperatur von 4000° wird weiters für die Temperatur in verschiedenen Tiefen erhalten:

In der Tiefe von 10 km	333°	60 km	1876°	100 km	2815°
" " " " 20 "	662°	70 "	2141°	200 "	3853°
" " " " 30 "	988°	80 "	2386°	300 "	3993°
" " " " 40 "	1296°	90 "	2611°	400 "	4000°.
" " " " 50 "	1594°.				

Über die wirkliche, im Innern der Erde herrschende Temperatur geben aber diese Resultate keinen Aufschluß; denn sie gelten, wie aus der Formel folgt, für jeden beliebigen Wert von Θ ; in 400 km Tiefe ist bereits sehr nahe die Temperatur des Erdmittelpunktes erreicht; von da an bleibt die Temperatur nahe konstant. Der Unterschied ist nur der, daß für eine andere Mittelpunktstemperatur die Abkühlungszeit eine andere würde, welche übrigens auch von g abhängt.

Bezeichnet man die gegenwärtige geothermische Tiefenstufe allgemein mit ν ($= 30 m$), so ist stets:

$$2g\sqrt{t} = \frac{2\nu\Theta}{\sqrt{\pi}}$$

benützt man diesen Wert, so wird

$$\vartheta_m = \vartheta_0 + \Theta \Phi \left(\frac{\alpha \sqrt{\pi}}{2\nu\Theta} \right).$$

Aus dieser Formel folgt, daß die gegenwärtige Mittelpunktstemperatur unabhängig ist von der Art des Erkaltes und nur abhängig von der gegen-

1) Der von Thomson angenommene Wert $g^2 = 400$ für das Jahr und den englischen Fuß entspricht dem Werte $g = 6$ für das Jahr und den Meter.

2) 7000° F nach Thomson.

wärtigen geothermischen Tiefenstufe. Bei rascherem Erkalten (g groß, t klein) oder sehr langsamem Erkalten (g klein, t groß) wird stets zu derselben geothermischen Tiefenstufe eine und dieselbe Mittelpunktstemperatur gehören, die nur von der Größe der Erde a und der Anfangstemperatur Θ abhängig ist.

Da gemäß der Konstantenbestimmung a in Meter, Θ in Celsiusgraden anzugeben ist, demnach das Argument ($a\sqrt{\pi} : 2\nu\Theta$) immer sehr groß,¹⁾ der Wert von Φ daher sehr nahe 1 wird, so bleibt immer nahe $\vartheta_m = \vartheta_0 + \Theta$, und diese Beziehung würde erst bei fortschreitender Erkalting, bei wachsendem t , womit eine Vergrößerung von ν verbunden ist, nicht mehr gültig sein. Würde bei fortgesetzter Erkalting ν statt 30 m etwa 100 km , so würde das Argument

$$\frac{a\sqrt{\pi}}{2\nu\Theta} = \frac{6378 \cdot \sqrt{\pi}}{200 \cdot 4000} = 0.0141.$$

Sobald aber das Argument klein wird, kann

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z$$

gesetzt werden, und dann wird

$$\vartheta_m = \vartheta_0 + \frac{a}{\nu}$$

d. h. bei fortschreitender Abkühlung wird schließlich die Temperaturabnahme bis zum Erdmittelpunkte linear fortschreitend erscheinen. Unter den hier zulässigen Voraussetzungen wird es aber hierzu noch unermesslicher Zeiträume bedürfen und man könnte schließen, daß die Erde erst einen sehr kleinen Zeitraum ihres Alters erreicht hat.

Die wahre Temperatur im Erdmittelpunkte könnte aus der Annahme gefolgert werden, daß die Erde durch Kontraktion eines Gases aus dem Zustande der größten Verdünnung entstanden ist, wie dies ja auch für die Sonne vorausgesetzt wird. Wird nämlich für eine Gaskugel angenommen, daß Temperatur und Dichte nach den Gesetzen des adiabatischen Zustandes (Ausdehnung oder Kompression mit Temperaturänderungen ohne Wärmezufuhr oder Abgabe) verbunden sind, so läßt sich daraus der Betrag der Arbeit und damit die Temperatur finden. (S. das 8. Kapitel.)

Für eine bereits aus dem gasförmigen Zustand in den flüssigen übergetretene Kugel kann eine Veränderung der Dichte nach diesem Gesetze nicht zugelassen werden und man ist bezüglich der Dichteänderungen auf die Erfahrungen angewiesen.

Eine Kugel von der Masse m hat auf ihre Oberflächenschicht von der Dichte σ das Potential

$$dJ = k^2 m \cdot \frac{4\pi\sigma x^2 dx}{x}$$

wobei k^2 die Attraktionskonstante ist, und dies ist die Arbeit, welche bei dem Niederschlagen der Oberflächenschicht aus der Unendlichkeit auf jene Kugel geleistet wurde; da nun

¹⁾ Da $a = 6,378.000 m$ ist, so wird für $\Theta = 4000^\circ$ das Argument von Φ gleich 47.05; selbst für $\Theta = 40.000^\circ$ würde noch $\Phi(4.705) = 1$ sein.

ist, so wird
$$m = \int_0^x 4 \pi \sigma x^2 dx$$

$$dJ = 16 k^2 \pi^2 \sigma x dx \int \sigma x^2 dx$$

und es wird daher, wenn man mit U das Integral

$$U = \int_0^a \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) x dx \int_0^x \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) x^2 dx$$

bezeichnet:

$$J = 16 k^2 \pi^2 \sigma_0^2 U.$$

Diese Arbeit, geleistet durch Schrumpfung der Kugel von der unendlich großen Ausdehnung bis auf ihre jetzige Größe (Potential der Masse auf sich selbst), multipliziert mit $A = \frac{1}{424}$, gibt die entwickelte Wärme in Kalorien. Für das Laplace'sche Dichtegesetz wird nun:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^a \frac{\sin qx}{qx} x dx \int_0^x \frac{\sin qx}{qx} x^2 dx = \frac{1}{q^2} \int_0^a \sin qx dx \int_0^x x \sin qx dx = \\ &= \frac{1}{q^4} \int_0^a \sin qx [\sin qx - qx \cos qx] dx = \\ &= \frac{1}{2q^4} \left[x - \frac{\sin 2qx}{2q} - q \frac{\sin 2qx - 2qx \cos 2qx}{4q^2} \right]_0^a \\ &= \frac{1}{4q^5} \left[2aq - \frac{3}{2} \sin 2aq + \frac{1}{2} \cdot 2aq \cos 2aq \right] \end{aligned}$$

demnach

$$J = 4k^2 \frac{\pi^2 \sigma_0^2 a^5}{\lambda^5} \left[2\lambda - \frac{3}{2} \sin 2\lambda + \lambda \cos 2\lambda \right].$$

Ist M die Masse der Erde, c deren spezifische Wärme, Θ die Temperatur, so ist

$$\frac{1}{424} J = M c \Theta$$

und unter der Voraussetzung, daß während der Kontraktion keine Wärmeverluste aufgetreten sind

$$\Theta = k^2 \frac{3 \pi \sigma_0^2 a^2}{424 c \sigma_m} \cdot \frac{2\lambda - \frac{3}{2} \sin 2\lambda + \lambda \cos 2\lambda}{\lambda^5}$$

Für die Konstante k ist astronomisch für die Einheiten: Erdbahnhälfte, Sonnenmasse und mittlerer Sonnentag $\log k = 8.2355814 - 10$; daraus folgt für die Einheiten: m , kg und Sekunde: $\log k^2 = 9.828007 - 20$. Da nun für den Faktor

$$C = \frac{2\lambda - \frac{3}{2} \sin 2\lambda + \lambda \cos 2\lambda}{\lambda^5}, \log C = 8.883644 - 10$$

ist, so folgt aus dem Laplace'schen Gesetze mit $c = 0.5 : \Theta = 198500^{\circ}$

Da übrigens

$$\frac{k^2 M_{\odot}}{a^2} = g, k^2 = g \frac{a^2}{\frac{4}{3} \pi a^3 \sigma_m}$$

ist, so läßt sich auch schreiben

$$\Theta = \frac{9 a g C}{4 \cdot 424 c} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_m} \right)^2$$

und mit dem Werte $g = 9.808 m$ ergibt sich $\Theta = 193600^0$ 1):

Für eine homogene Erde wäre $\sigma = \sigma_0 = \sigma_m$; $U = \frac{1}{15} a^5$

$$\Theta = \frac{k^2 \pi \sigma_m a^2}{530 c} = 181300^0.$$

Legt man das Helmert'sche Gesetz

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 - \alpha \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \beta \left(\frac{x}{a} \right)^4$$

zu Grunde, so wird

$$U = D a^5; D = \frac{1}{15} - \frac{8}{105} \alpha + \frac{1}{9} \left(\frac{\alpha^2}{5} + \frac{10}{21} \beta \right) - \frac{12}{385} \alpha \beta + \frac{1}{91} \beta^2 = 0.0179457$$

und

$$\Theta = \frac{3 k^2 \pi \sigma_0^2 D a^2}{106 \sigma_m c} = 198700^0.$$

Die hier erhaltenen Temperaturen sind nun alle außerordentlich hoch; damit für eine Anfangstemperatur von 200.000^0 die geothermische Tiefenstufe an der Oberfläche $30 m$ würde, müßte

$$\sqrt{t} = \frac{200000}{g \sqrt{\pi}} 30$$

also mit $g = 5.925$: $t = 320.000.000.000$ Jahre, während für $\Theta = 4000^0$ sich $130.000.000$ Jahre ergibt.²⁾

Um einen Betrag für die Größe der in irgend einem Momente stattfindenden Kontraktion durch Abkühlung zu erhalten, setzt O. Fisher dieselbe proportional dem Temperaturverlust. Führt man an Stelle der Entfernung x vom Erdmittelpunkte die Tiefe unter der Erdoberfläche y ein, weil diese für die Kruste einen nur mäßigen Betrag darstellt, so ist $a - x = y$ und das Integral geht durch die Substitution $2g \sqrt{t} = h$, $\mu = y : h$ über in

$$\Phi \left(\frac{a - x}{2g \sqrt{t}} \right) = \frac{2}{h \sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-\frac{y^2}{h^2}} dy$$

demnach ist der Temperaturverlust vom Beginne der Krustenbildung, zu welcher Zeit die Temperatur Θ gehört: $u = \Theta (1 - \Phi)$ und setzt man für

$$\frac{2 \Theta}{h \sqrt{\pi}} = \frac{2 \Theta}{2 g \sqrt{t} \pi} = \frac{2 v \Theta}{2 g \sqrt{t} \pi} \cdot \frac{1}{v} = \frac{1}{v}$$

1) Der Unterschied rührt davon her, daß die Werte von g und k nicht genau zusammengehören. Einen wesentlichen Einfluß auf das Resultat hat übrigens die Annahme über σ_0 und c ; selbst $e = 0.3$ wäre noch zulässig; damit würde Θ noch größer werden. Der Wert 9015^0 den T. J. J. See (Researches on the physical constitution of the heavenly bodies, Astr. Nachr. Bd. 169. S. 321) gibt, stimmt hiermit nicht überein. A. Ritter findet (l. c. S. 170) als Temperatur im Erdmittelpunkte 103400^0 .

2) Rechnet man mit der anfänglichen Temperatur $\Theta = 198600^0$ die gegenwärtige Mittelpunktstemperatur, so folgt $\vartheta_m = \vartheta_0 + 162800^0$. Daß sich so hohe Werte für Θ ergeben, liegt daran, daß während der Kontraktion die Ausstrahlung nicht berücksichtigt wurde.

ein, so wird

$$u = \Theta - \frac{1}{\nu} \int_0^y e^{-\frac{y^2}{h^2}} dy.$$

Nun ist, wenn ϵ der kubische Kontraktionskoeffizient, d. i. die Kontraktion der Volumseinheit für die Temperaturänderung von 1° ist, für eine Schicht in der Tiefe y , deren Volumen $4\pi(a-y)^2 dy$ ist, die Kontraktion seit Beginn der Abkühlung ¹⁾

$$\epsilon \cdot 4\pi(a-y)^2 u dy.$$

Wird die Exponentialgröße unter dem Integral in u in eine Reihe entwickelt, so folgt:

$$\int_0^y e^{-\frac{y^2}{h^2}} dy = y \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{y}{h} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} \right) \left(\frac{y}{h} \right)^4 - \dots \right]$$

oder durch Zusammenfassen je zweier aufeinanderfolgender Glieder:

$$(-1)^n \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{y^{2n}}{h^{2n}} \left[\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right].$$

Integriert man bis zur Tiefe $y = 2h$, d. i., da $h = 2g\sqrt{t} = 135.4 \text{ km}$ ist, bis zur Tiefe 270 km , so werden die beiden zusammengefaßten Glieder

$$(-1)^n \frac{4^n}{(n+1)!} \frac{2n^2 - 3n - 1}{(2n+1)(2n+3)}$$

somit

$$u = \Theta - \frac{4\Theta}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{3} + \frac{4^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{4^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{19}{9 \cdot 11} + \dots \right] \\ + \frac{4^{2m}}{(2m+1)!} \frac{8m^2 - 6m - 1}{(4m+1)(4m+3)} \dots \left. \right]$$

Auf 6 Dezimalen erhielt Fischer durch die Summe der ersten 20 Glieder

$$u = \Theta \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 0.882083 \right] = 0.00468 \Theta$$

Aus der Tafel folgt für $y = 2h$: $\Phi(2) = 0.995322$, daher $u = 0.004678 \Theta$.

Die angegebene Reihe reicht daher vollständig hin, um in einer gegebenen Tiefe den Temperaturverlust in analytischer Weise auszudrücken; in größeren Tiefen wird der Temperaturverlust als verschwindend angesehen werden können, in diesen Tiefen kann also angenommen werden, daß die kubische Kontraktion im Maximum gleich derjenigen in der Tiefe $2h$ selbst ist; die Gesamtkontraktion wird daher $K_0 < K$, wenn K nach

$$4\pi K = 4\pi \epsilon \int_y^{2h} (a-y)^2 u dy + \epsilon \cdot \frac{4\pi(a-2h)^3}{3} \cdot 0.004678 \Theta$$

berechnet wird, wobei das Integral nur bis zur Tiefe $2h$ zu nehmen ist, weil der Restbetrag in dem zweiten Gliede mit seinem Maximalwerte angesetzt ist.

Ist ϵ_1 der mittlere kubische Ausdehnungskoeffizient der ganzen Kugel vom Halbmesser $a - y$, so wird daher

¹⁾ O. Fisher, l. c. S. 63.

$$4 \pi K_0 = \frac{4}{3} \pi \varepsilon_1 (a - y)^3$$

demnach

$$\frac{1}{3} \varepsilon_1 (a - y)^3 < K$$

und wenn ε_0 der mittlere lineare Kontraktionskoeffizient ist, also $\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_1$ ist, so folgt

$$\varepsilon_0 < \frac{K}{(a - y)^3}$$

Es wird daher ε_0 eine Funktion der Tiefe, und Fisher sieht denselben als den linearen Kompressionskoeffizienten der Schicht in der Tiefe y von der Oberfläche an und berechnet mit diesem die Gesamtkompression der Kruste

$$ek = \int_0^k \varepsilon_0 dx$$

so daß

$$ek < \int_0^k \frac{K}{(a - y)^3} dy$$

ist, wobei k die Dicke der Kruste vor und ek dieselbe nach der Kompression ist. Für kleine Werte von y können nun die Potenzen von $(a - y)$ entwickelt und die Reihe für u verwendet werden, so daß

$$ek < \int_0^k \left\{ \frac{1}{a^3} \left(1 + 3 \frac{y}{a} \right) \left[\varepsilon \int_y^{2h} a^2 \left(1 - 2 \frac{y}{a} \right) u dy \right] + \frac{1}{3} \varepsilon a^3 \left(1 - 6 \frac{h}{a} \right) \cdot 0.004678 \Theta \right\} dy$$

wird. Setzt man

$$\int_y^{2h} u dy = P \quad ; \quad \int_y^{2h} u y dy = Q$$

so wird

$$ek < \frac{\varepsilon}{a} \int_0^k \left(1 + 3 \frac{y}{a} \right) \left(P - \frac{2}{a} Q \right) dy + \frac{1}{3} \varepsilon \left(1 - 6 \frac{h}{a} \right) \cdot 0.004678 \Theta \int_0^k \left(1 + 3 \frac{y}{a} \right) dy.$$

Die beiden Integrale P und Q sind nun strenge:

$$P = \int_y^{2h} \Theta dy - \int_y^{2h} \frac{h \sqrt{\pi}}{2 \nu} \Phi \left(\frac{y}{h} \right) dy = \Theta \left[(2h - y) - \int_y^{2h} \Phi \left(\frac{y}{h} \right) dy \right]$$

$$Q = \int_y^{2h} \Theta y dy - \int_y^{2h} \frac{h \sqrt{\pi}}{2 \nu} y \Phi \left(\frac{y}{h} \right) dy = \frac{1}{2} \Theta \left[(4h^2 - y^2) - \int_y^{2h} \Phi \left(\frac{y}{h} \right) y dy \right].$$

Würde man in den beiden Integralen die obere Grenze a gesetzt haben, so würde das Ergänzungsglied (das einfache Integral) in der Formel für ek nicht auftreten; für diese Integrale existieren aber keine Tafeln, und so müssen die beiden Integrale durch Reihen entwickelt werden.

Es ist das unbestimmte Integral

$$\int u dy = \Theta y - \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3 \cdot 4} \frac{y^4}{h^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{5 \cdot 6} \frac{y^6}{h^4} + \dots \right)$$

somit, wenn je zwei Glieder wieder zusammengefaßt werden, also

$$\left\{ y^2 \left[(-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \left(\frac{y}{h}\right)^{2n} - (-1)^n \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} \left(\frac{y}{h}\right)^{2n+2} \right] \right\}_{2h}$$

$$= (-1)^n \frac{2^{2n+1} h^2}{(n+2)!} \frac{2n^2 - n + 2}{(2n+1)(2n+3)}$$

gesetzt wird:

$$P = \int_y^{2h} u \, dy = \Theta(2h - y) - \frac{4h^2}{v} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{16}{4!} \frac{4}{5 \cdot 7} + \frac{256}{6!} \frac{15}{9 \cdot 11} \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{4^{2m}}{(2m+2)!(4m+1)(4m+3)} \right] + \frac{1}{v} y^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 4} \left(\frac{y}{h}\right)^2 + \frac{1}{2!} \frac{1}{5 \cdot 6} \left(\frac{y}{h}\right)^4 \dots \right] =$$

$$= \Theta(2h - y) - \frac{h^2}{v} \cdot 1 \cdot 273320 + \frac{1}{v} y^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 4} \left(\frac{y}{h}\right)^2 + \dots \right]$$

Ebenso wird das allgemeine Integral

$$Q = \left\{ \frac{1}{2} \Theta y^2 - \frac{1}{v} \left[\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{3} \frac{1}{5} \frac{y^5}{h^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{5} \frac{1}{7} \frac{y^7}{h^4} - \dots \right] \right\}_y^{2h}$$

daher in derselben Weise reduziert:

$$Q = \frac{1}{2} \Theta(4h^2 - y^2) - \frac{8h^3}{v} \left[\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 4^2}{3! \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{4^{2m}}{(2m+1)!(4m+1)(4m+3)(4m+5)} \right] + \frac{1}{v} y^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{y}{h}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!} \frac{1}{5 \cdot 7} \left(\frac{y}{h}\right)^4 \dots \right] = \frac{1}{2} \Theta(4h^2 - y^2) - \frac{h^3}{v} \cdot 1 \cdot 552800 + \frac{1}{v} y^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{y}{h}\right)^2 + \dots \right]$$

Endlich wird

$$\int P \, dy = \Theta \left(2hy - \frac{1}{2} y^2 \right) - 1 \cdot 273320 \frac{h^2}{v} y + \frac{y^3}{v} \left[\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{y}{h}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!} \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} \left(\frac{y}{h}\right)^4 \dots \right]$$

$$\frac{3}{a} \int P y \, dy = \frac{3}{a} \Theta \left(hy^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) - \frac{3}{2a} \cdot 1 \cdot 273320 \frac{h^2}{v} y^2 + \frac{3}{a} \frac{y^4}{v} \left[\frac{1}{2 \cdot 4} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{y}{h}\right)^2 + \frac{1}{2!} \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 8} \left(\frac{y}{h}\right)^4 \dots \right]$$

$$- \frac{2}{a} \int Q \, dy = - \frac{1}{a} \Theta \left(4h^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) + \frac{2}{a} \cdot 1 \cdot 552800 \frac{h^3}{v} y - \frac{2}{a} \frac{y^4}{v} \left[\frac{1}{3 \cdot 4} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 6} \left(\frac{y}{h}\right)^2 + \frac{1}{2!} \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 8} \left(\frac{y}{h}\right)^4 \dots \right]$$

Somit wird, wenn Glieder mit dem Faktor a^3 vernachlässigt werden und die Integration zwischen den Grenzen 0 und k ausgeführt wird

$$e < \frac{\varepsilon}{a} \Theta \left(2hk - \frac{1}{2} k^2 \right) - \frac{\varepsilon}{a} \cdot 1 \cdot 27332 \frac{h^2}{v} + \frac{\varepsilon}{a} \frac{k^2}{v} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{60} \left(\frac{k}{h}\right)^2 + \frac{1}{420} \left(\frac{k}{h}\right)^4 \dots \right]$$

$$+ \frac{\varepsilon}{a^2} \Theta \left(3hk - 4h^2 - \frac{2}{3} k^2 \right) + \frac{2\varepsilon}{a^2} \cdot 1 \cdot 55280 \frac{h^3}{v} - \frac{3\varepsilon}{2a^2} \cdot 1 \cdot 27332 \frac{h^2}{v} k +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{a^2} \frac{k^3}{v} \left[\frac{5}{24} - \frac{7}{360} \left(\frac{k}{h}\right)^2 \dots \right] +$$

$$+ \frac{1}{3} \varepsilon \left(1 - 6 \frac{h}{a} \right) \cdot 0 \cdot 004678 \Theta \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k}{a} \right).$$

Die Dicke der Erdkruste wird sehr verschieden angenommen; mitunter nur zu 50 km; Uhlig (Erdgeschichte S. 277) gibt 150 km; Fisher nimmt hier $k = 2 h$, d. i. 270 km, also fast doppelt so groß; weiter wählt er für ϵ den Wert $\epsilon = 0.0000387$ für den Grad Celsius¹⁾ wie er aus der Hochofenschlacke folgt, und erhält damit

$$2 ke = 866 \text{ Fuß} = 290 \text{ m,}$$

ein Ausdruck, der der Ableitung gemäß als obere Grenze angesehen werden muß²⁾. Strenge wäre

$$ek = \int_0^{ph} \frac{\epsilon}{(a-y)^3} \int_y^{ph} (a-y)^2 u dx$$

wo p eine beliebige Zahl, ph ein beliebiges Vielfaches von h sein könnte.³⁾

Fisher berechnet nun hierauf die mittlere Erhebung folgendermaßen⁴⁾. Würde eine Schicht von der Dicke k und der Länge l durch Kontraktion verkürzt, so würden sich Runzelungen bilden; dabei würde sich ein Teil heben, ein Teil senken, und wenn vorerst angenommen wird, daß der Innenraum hohl ist, würde die prismatische Tafel ein wellenförmiges Profil (Fig. 3) annehmen, und es wäre die Volumänderung (positiv, wenn eine Zunahme):

$$\Sigma A - \Sigma B + \Sigma b - \Sigma a.$$

Ist jedoch die Unterlage nicht hohl, sondern eine solide, gleichgiltig ob feste oder flüssige Masse, so liegt die Schicht unmittelbar auf, und Fisher setzt $\Sigma a = \Sigma b = 0$, es bleibt dann, wenn wieder e der lineare Kontraktionskoeffizient ist, also die Flächenkontraktion $2e$ beträgt, für eine quadratische Platte von der Seitenlänge l und der Dicke k

$$\text{das ursprüngliche Volumen } V_0 = l^2 k$$

$$\text{das neue Volumen } V_1 = l^2 (1 - 2e) k + \Sigma A - \Sigma B;$$

es muß daher

$$2e l^2 k = \Sigma A - \Sigma B$$

sein. Auf die ganze Erdoberfläche ausgedehnt, wird die Fläche $l^2 = 4a^2\pi$, somit

$$8a^2\pi ek = \Sigma A - \Sigma B$$

Fällt der Meeresspiegel MM' mit der Begrenzungsfläche vor der Faltung GG' (von Fisher „datum level“ genannt) zusammen, so werden ΣA die Erhebungen über dem Meeresspiegel, ΣB die Wassermassen darstellen.

Sei das Areal des Landes L , das Areal des Meeres M , die mittlere Erhebung des Landes über dem Meeresspiegel E , die mittlere Meerestiefe D , so ist MD das Volumen des Meeres, LE das Volumen des Festlandes über

1) 0.0000215 für den Grad Fahrenheit.

2) O. Fisher, l. c. S. 69, für k nimmt er sonst ebenfalls nur 50 km s. S. 37.

3) Würde man die Schmelztemperatur statt 4000° beliebig anders annehmen, so würde dies, wie schon erwähnt, nur die Abkühlungszeit ändern, während der Wert von g auf ϵ ohne Einfluß bliebe, da die Beziehung zwischen g und t immer auf den empirisch gegebenen Wert von v führen muß.

4) l. c. S. 50.

dem Meeresspiegel und wäre der Meeresspiegel um d über der ursprünglichen Landfläche vor der Faltung gelegen, so ist

$$L(E + d) - M(D - d) = 8 a^2 \pi k e$$

oder da $L + M = 4 a^2 \pi$ ist

$$LE - MD + 4 a^2 \pi d = 8 a^2 \pi k e$$

oder

$$k e = \frac{LE - MD}{8 a^2 \pi} + \frac{1}{2} d$$

Für die mittlere Erhebung der Kontinente gibt Heiderich¹⁾ die folgende Zusammenstellung:

	Murray 1888	Penck 1889	Supan 1889	v. Tillo 1889	Penck 1893	Wagner 1895
Europa	286	280	290	317	330	300
Asien	972	950	940	957	1010	950
Afrika	616	650	620	612	660	650
Nordamerika	575	600	610	622	650	700
Südamerika	633	630	610	617	650	650
Australien	245	280	260	240	310	300
Alle Erdteile	686	705	680	693	735	700

und als Gesamtmittel $E = 700 m$. Nimmt man als mittlere Tiefe des Meeres $D = 3800 m$), als Oberfläche des Meeres $M = 73 \cdot 2\%$, des Landes $L = 26 \cdot 8\%$, so wird

$$\frac{LE - MD}{8 a^2 \pi} = \frac{1}{200} (26 \cdot 8 \cdot 700 - 73 \cdot 2 \cdot 3800) = - 1297 m$$

so daß

$$k e = \frac{1}{2} d - 1 \cdot 3 km$$

wäre. Fisher fand nahe denselben Wert (1.1 mile = 1.8 km) und unter der Voraussetzung, daß das „datum level“ mit der tiefsten Meerestiefe zusammenfällt, für welche 4 miles = 6400 m angenommen werden, würde $ke = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 8 = 1 \cdot 4 km$ sein „ein Wert, der eher zu klein ist, weil d jedenfalls größer angenommen werden müßte“.

Dieser Wert von ke stimmt mit dem früher auf anderem Wege erhaltenen nicht überein, aber beide Werte sind auf nicht ganz einwandfreiem Wege erhalten. Dem Wesen nach ist hierbei trotz der erstarrten Oberfläche und der fortgesetzten Kühlung des Erdinnern eine stärkere Kontraktion der Kruste als Resultat aufgetreten, was seinen Grund in der allerdings sehr sinnreichen, aber nicht einwandfreien Berechnung des Wertes von ϵ_0 (Kontraktionskoeffizient für die Schichte in der Entfernung x) hat. Ist nämlich ϵ_0 der mittlere lineare Kontraktionskoeffizient der Kugel vom Halbmesser $a - y$, so ist dieser ja sicher nicht der lineare Kontraktionskoeffizient der Schicht in der Tiefe y . Aber auch die Behauptung, daß die Begrenzungsfläche vor der Faltung mit dem gegen-

¹⁾ Gerland, Beiträge zur Geophysik, Bd. IV S. 44.

²⁾ O. Fisher nimmt $E = 900$ Fuß, $D = 3$ miles. Nach Krümmel ist $D = 3440 m$; spätere Angaben schwanken zwischen 3438 und 4260 m.

wärtigen Meeresgrunde identisch anzunehmen ist, ist eine jedenfalls erst zu erweisende Annahme, die ja bereits eine allgemeine Hebung in einem bestimmten Betrage voraussetzt.

Handelt es sich nur um die Darlegung der qualitativen oder auch genähert quantitativen Verhältnisse, so kann man durch eine eigentlich recht einfache Rechnung einen ganz guten Überblick erhalten.

Ist der Radius einer Kugelschale in der Tiefe y durch Abkühlung um τ^0 von $a - y = x$ in $x(1 - \alpha\tau)$ übergegangen, der Halbmesser einer anderen, darüber liegenden $x_1 > x$ in $x_1(1 - \alpha\tau_1)$. so werden die Oberflächen der betreffenden Kugeln

$$O = 4\pi x^2(1 - 2\alpha\tau) \text{ und } O_1 = 4\pi x_1^2(1 - 2\alpha\tau_1).$$

Sei $x_1 = x + dx$, $\tau_1 = \tau + d\tau$, wobei $\frac{d\tau}{dx}$ positiv (stärkere Abkühlung nach außen) oder negativ (schwächere Abkühlung nach außen) sein kann, so wird

$$\begin{aligned} O_1 &= 4\pi x^2 \left(1 + 2\frac{dx}{x}\right) (1 - 2\alpha\tau - 2\alpha d\tau) \\ &= 4\pi x^2 (1 - 2\alpha\tau) \left(1 + 2\frac{dx}{x} - 2\alpha d\tau\right) \\ &= O \left(1 + 2\frac{dx}{x} - 2\alpha d\tau\right) \end{aligned}$$

Für $d\tau = 0$, d. h. für gleichmäßige Abkühlung der ganzen Kugel würde

$$O_1' = O \left(1 + 2\frac{dx}{x}\right)$$

d. h. das Verhältnis der Oberflächen wäre dasselbe, als wenn überhaupt keine Abkühlung stattfinden würde. Allgemein ist nun

$$O_1 = O \left\{1 + 2 \left[\frac{1}{x} - \alpha \frac{d\tau}{dx}\right] dx\right\}$$

Ist nun $d\tau : dx$ negativ (schwächere Abkühlung nach außen), so wird $O_1 > O_1'$, daher müssen Faltungen auftreten, wenn zwischen der Kruste und dem Substratum keine Hohlräume entstehen sollen.

Ist aber $d\tau : dx$ positiv (stärkere Abkühlung nach außen), so wird $O_1 < O_1'$, daher müssen Retraktionen, Spaltungen oder Berstungen entstehen.

Es ist allerdings fraglich, ob solche Hohlräume zwischen Kruste und Substratum Faltungen bedingen müssen. Ist nämlich der Druck im Innern der Erde etwas größer, und er braucht dabei gar nicht besonders groß zu sein, so würde gar kein Hohlraum entstehen, sondern jeder solche durch Kontraktion des Innern bedingte Hohlraum würde sofort durch Expansion oder Vergasung der inneren Massen ausgefüllt.

Es muß jedoch angenommen werden, daß ein wesentlicher Überdruck im Innern der Erde gar nicht herrscht.

Der Druck eines festen Körpers sowohl, wie der hydrostatische Druck einer Flüssigkeit, entstanden durch das Gewicht oder allgemeiner durch die Anziehungskraft der Erde, kann nie zu Expansion, Druck nach aufwärts und Eruptionen Anlaß geben. Auch am Meeresgrunde in der Tiefe von 8000 m herrscht ein Druck von über 800 Atmosphären, ohne daß eine Reaktion nach

oben erfolgt; stets wird diesem Druck durch den Druck der angrenzenden Massen das Gleichgewicht gehalten. Die sämtlichen berechneten Drucke im Innern der Erde sind also hydrostatische Drucke, so daß an der Oberfläche der flüssigen Schicht ein ganz geringfügiger Druck — vielleicht null — herrschen kann, und der mit der Tiefe wachsende Druck eben ausreicht, die der zunehmenden Temperatur entsprechende Möglichkeit der Vergasung der flüssigen Massen hintanzuhalten.

Würde sich die innere Kugel um τ^0 abkühlen, so würde eine Länge l der Oberfläche übergehen in $l(1 - \alpha\tau)$, die Verkürzung würde daher $\lambda = l\alpha\tau$ betragen; die hiedurch geweckte elastische Kraft P der darüberliegenden Schicht bezogen auf den Querschnitt q , ergibt sich aus der Gleichung

$$\lambda = \frac{1}{E} l \frac{P}{q}$$

wobei E der Elastizitätsmodul des Materiales ist, oder für die auf die Querschnittseinheit wirkende Kraft $P:q = P_0$:

$$P_0 = E\alpha\tau = 0.0004 E\tau,$$

wobei ein bereits ziemlich großer Ausdehnungskoeffizient für die Innenmasse gewählt ist. Der Elastizitätskoeffizient ist nun pro cm^2 für

Sandstein	$E = 63.000$,	demnach $P_0 = 25 \tau$
Kalkstein	189.000,	70 τ
Marmor	260.000,	95 τ
Schiefer	1,100.000,	400 τ

Geringfügige Abkühlungen im Innern werden also schon elastische Kräfte in den äußeren Schichten wecken können, die bei den kristallinen Gesteinen der tieferen Schichten der Erdkruste ganz bedeutend sein können, oder es werden sich Hohlräume bilden, die bei genügender Vergrößerung zu Einstürzen führen werden. ¹⁾

Faltungen und Berstungen, sowie Einstürze werden daher meist nur lokaler Natur sein. Wenn höher liegende ausgedehnte Strata schwächere oder überhaupt keine Abkühlung erfahren, so müssen Faltungen oder Überschiebungen auftreten; wenn sie eine stärkere Abkühlung zeigen, werden Berstungen stattfinden. Es werden daher diese geologischen Prozesse nicht als Kataklysmen, als ungeheure Umwälzungen auftreten, sondern sie werden langsam, nach Maßgabe der stattfindenden Abkühlungen erscheinen; die Hebungen treten, wie es von den Geologen auch bezeichnet wird „staccato“ auf.

Während die Stärke der Abkühlung von der Leitungsfähigkeit und spezifischen Wärme abhängt, tritt als nächster bestimmender Faktor noch der Ausdehnungskoeffizient auf, welcher, wie man sieht, einen ganz ähnlichen Einfluß hat. Treten Schichten von verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten und verschiedener Leitungsfähigkeit übereinander auf, so können sich Berstungen und Faltungen kombinieren, es treten „Verwerfungen“ auf.

¹⁾ Die Hohlräume können mit Dämpfen der flüssigen Massen ausgefüllt sein; aber selbst ein Vakuum ist nicht absolut auszuschließen, und erst dann unmöglich, wenn die wirkenden Drucke einen gewissen Grad übersteigen.

Betreffen starke oberflächliche Abkühlungen Strata von großer Widerstandsfähigkeit, so werden, ehe es zur Berstung kommt, im Innern Drucksteigerungen — ebenfalls lokaler Natur auftreten, welche dann nach Berstung der darüber liegenden Strata zu Eruptionen führen: die Vulkane.

Hiedurch sind manche Erscheinungen des Vulkanismus auf einfache Weise erklärt. Wäre in der Tat der „kolossale“ Druck im Erdinnern Ursache der Berstung der Rinde, so müßte jede Berstung eine Entladung in dem Maße zur Folge haben, daß sofort der ganze im Innern der Erde stattfindende Druck auf eine Atmosph., dem Gegendrucke der Luft sinkt¹⁾. Daß die Bildung von parasitischen Kratern nicht eine Folge des angeblich hohen Druckes sein kann, folgt schon daraus, daß ja der Hauptkrater trotz der Bildung seitlicher, parasitischer Krater, meist sogar vor der Bildung derselben, offen ist, daß aus demselben Dämpfe und Asche ausströmen. Im Gegenteil muß man jeden parasitischen Krater als eine Folge der Retraktion seiner Seitenwände entstanden denken.²⁾

Auch die Temperatur im Erdinnern kann durch die angegebenen hohen Drucke nicht wesentlich beeinflusst werden.

Ein vollkommen widerstandsfähiger Körper, der durch keinen Druck zusammengedrückt werden kann, wird sich auch nicht erwärmen. Wenn aber ein Druck P auf einen Körper wirkt, dessen Querschnitt q , dessen Länge l ist, so wird die Kraft Pq kg (wenn P in kg pro cm^2 und q in cm^2 ausgedrückt ist) eine Verkürzung εl bewirken, und dabei wenn l in cm ausgedrückt ist, eine Arbeit durch Überwindung des Widerstandes auf dem Wege $\frac{\varepsilon l}{100}$ m leisten,

die gleich ist $\frac{Pq\varepsilon l}{100}$ kgm , welche einer produzierten Wärmemenge

$$Q = \frac{Pq\varepsilon l}{42400} \text{ Cal} = \frac{10 P\varepsilon ql}{424} \text{ cal}$$

entspricht. Ist das spezifische Gewicht des Körpers s (in gr pro cm^3 , da l und q in cm und Q in cal ausgedrückt ist), die spezifische Wärme c und die Temperaturerhöhung durch den herrschenden Druck τ , so ist die zu dieser Temperaturerhöhung erforderliche Wärmemenge:

$$Q = qlsc\tau$$

und es wird daher³⁾

¹⁾ Durchbrechung der Rinde ist schon durch die Dicke derselben ausgeschlossen. (Uhlig, Erdgeschichte S. 277). Allerdings kann die Höhe der Ausbrüche auch ganz außerordentlich werden; die Pinienwolke beim Ausbruch des Krakataua 1883 war 11 km , die Aschenwolke am 26. Aug. 27 bis 33 km . Doch zeigt dies noch nicht von einer Kraft von selbst nur 1000 Atmosphären.

²⁾ Teilweise findet sich diese Annahme schon bei Uhlig, der die Vulkanausbrüche als Ergebnisse der Abkühlung und Schrumpfung der Erde ansieht, wodurch „Bruchlinien“ entstehen. (l. c. S. 284.)

³⁾ Würde als Längeneinheit 1 m angenommen, so wäre der Druck pro m^2 gleich 10000 P und $Q = \frac{10000 Pq\varepsilon l}{424}$ Cal ; dann wäre das spez. Gew. pro m^3 gleich 1000 s kg ; daher dasselbe Resultat wie oben.

$$\frac{10 P \epsilon}{424} = s c \tau; \quad \tau = \frac{10 P \epsilon}{424 s c}$$

Als Mittelwert für sc kann man 1 wählen, was ebensowohl für Wasser, als auch genähert für andere Körper gilt, so daß

$$\tau = \frac{10 P \epsilon}{424}$$

wird. Da für Wasser $3 \epsilon = 0.00005$ ist, so wird für 800 Atmosphären τ etwa 0.0003°C . Setzt man den Kompressionskoeffizienten der das Erdinnere zusammensetzenden Körper ungefähr gleich demselben Werte, so wird für einen Druck von 3,000.000 Atmosphären die Temperaturerhöhung

$$\tau = \frac{0.0005 \times 3.000.000}{3 \cdot 424} = 1.2^{\circ} \text{C}.$$

Die Erwärmung der Körper durch Druck fällt daher überhaupt nicht ins Gewicht.¹⁾

Wäre nun eine erkaltende Masse vollkommen in Ruhe, so würden die früher angestellten Rechnungen trotzdem Temperaturen im Innern bis zu hunderttausenden Graden geben. Die Ursache des Auftretens dieser Resultate kann nun in zwei Richtungen gelegen sein.

Eine erkaltende Masse ist niemals in Ruhe, sondern es werden stets infolge der Erkaltung an der äußeren Seite Bewegungen gegen das Zentrum und andererseits durch die Gegenströmung der erwärmten Massen Konvektionsströmungen nach außen auftreten, die in einem Gasball die eigentliche Ausgleichung bewirken, aber auch in einer erkaltenden Flüssigkeit, in welcher sie die Hauptrolle spielen, eine beständige Zirkulation und damit eine Erkaltung in der Gesamtmasse zur Folge haben, während die eigentliche Abgabe der Wärme durch Strahlung nur von den äußeren Partien stattfindet.

Konvektionsströmungen wurden auch von O. Fisher, wenn auch nicht ganz in diesem Sinne angenommen. T. J. J. See suchte nun die Unmöglichkeit solcher Konvektionsströmungen im Innern der Erde nachzuweisen.²⁾ Seine Rechnungen, unter Annahme des Laplace'schen Dichtigkeitsgesetzes führen, ähnlich wie die später für gasförmige Körper gegebenen zu außerordentlich hohen Drucken im Innern, die er gleichzeitig als Maß der Starrheit (Modul of rigidity) deutet. Bei dieser Starrheit, die derjenigen des Stahles gleichkäme, sind nun Konvektionsströme auszuschließen. Daß diese Drucke mit dem „Maß der Starrheit“ nichts gemein haben, wurde schon oben erwähnt; immerhin werden bei den hier auftretenden hohen hydrostatischen Drucken von einer gewissen Tiefe ab Konvektionsströmungen nicht auftreten können, ohne zu den gewaltigsten Störungen Anlaß zu geben. Das Innere befindet sich eben in einem Zustande der relativen Ruhe, welche man vielleicht als Starrheit erklären könnte; es ist aber ein großer Unterschied gegen die Starrheit einer festen Masse. Würde an irgend einer Stelle am Meeresgrunde durch irgend einen Prozeß eine größere Wassermasse bedeutend erwärmt, so müßte notwendigerweise eine Störung auftreten, welche sofort von den gewaltigsten Konvektionsströmungen gefolgt

¹⁾ Die Arbeit von R. v. Kövesligethy, welche E. Rudolph in Wagner's Geogr. Jahrbuch, 30. Bd. 1907, S. 3 anführt, konnte ich nicht vergleichen, da sie ungarisch geschrieben ist.

²⁾ Researches on the rigidity of the heavenly bodies, Astron. Nachr. Bd. 171, S. 369.

sein würde. Es befinden sich also die tiefsten Schichten in einem Zustande des labilen Gleichgewichtes, der labilen Starrheit. Nur dadurch, daß dieser Umstand übersehen wurde, konnte See zu dem Ausspruche kommen, daß Unregelmäßigkeiten, welche zeitweise auf den Himmelskörpern von Beobachtern beobachtet werden, durch irgend welche optische oder atmosphärische Täuschung verursacht sind.¹⁾ Oberflächlich und bis zu einer beträchtlichen Tiefe können selbst bei den beträchtlichen Drucken daselbst Strömungen auftreten, und bei Ereignissen in der Tiefe, die von gewaltigen Störungen gefolgt sind, können Umwälzungen, Ausbrüche auftreten, wie sie zum Beispiel in der Zeit der erhöhten Sonnentätigkeit — Flecken, Fackeln — sicher keine optischen oder atmosphärischen Täuschungen sind.

Selbstverständlich treten die Konvektionsströmungen nach beiden Seiten auf; sie in aller Strenge zu verfolgen ist aber der gegenwärtigen Analyse nicht möglich. Man kann sie aber in einfacher Weise dadurch berücksichtigen, daß das Wärmeleitungsvermögen k erheblich vergrößert wird. Es ist dann in *g* S. 16 für k nicht der Wert aus der Wärmeleitung der Gesteine zu setzen, sondern es kann durch die Konvektionsströme die 10 fache, 20 fache Wärmemenge durchgeleitet werden, und es kann daher allgemein angenommen werden, daß an Stelle von k ein Wert $\rho^2 k$ zu setzen ist, wobei für ρ ein Wert nicht angegeben werden kann; es kann $\rho^2 = 9, 16, \dots 100$ angenommen werden.

Da aber die Konvektionsströmungen nur auf eine gewisse Tiefe beschränkt sind, so sollte eigentlich ρ , da $\rho^2 k$ nicht das reine Leitungsvermögen darstellt, noch vom Orte abhängig sein, und überdies, da mit der Zeit und zunehmenden Verfestigung die Strömungen sich vermindern, auch als Funktion der Zeit. Es wäre daher, strenge genommen, an Stelle von k der Ausdruck zu setzen:

$$\frac{\rho^2 k \psi(x)}{\varphi(t)}$$

Welcher Art die beiden Funktionen φ und ψ sind, ist nicht unmittelbar angebar. Man könnte $\psi(x)$ umgekehrt proportional der Dichte setzen, wodurch der Einfluß der Viskosität berücksichtigt würde; für $\varphi(t)$ könnte man t oder t^n setzen, so daß bei wachsendem t das Leitungsvermögen abnimmt, was mit der Tatsache, daß bei fortgesetzter Abkühlung eine immer langsamere weitere Abkühlung stattfindet $\left(\frac{d\vartheta}{dt} \text{ wird mit wachsendem } t \text{ immer kleiner} \right)$ übereinstimmt. Die hier sich ergebende Differentialgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \left(\frac{\rho^2 k \psi(x)}{s c \varphi(t)} \right) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$$

in dieser allgemeinen Form, oder selbst mit einfachen zulässigen Funktionen für $\psi(x)$ zu integrieren, ist mir nicht gelungen. Ebenso ist nicht für jede Wahl von t die Gleichung integrierbar. Hingegen läßt sich die Differentialgleichung für den Fall $\psi(t) = t^n$ verhältnismäßig leicht integrieren. Sei also

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\rho^2 k}{s c t^n} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$$

¹⁾ l. c. S. 386: are due to some kind of delusions either optical or atmospheric.

oder wenn

$$\frac{\rho^2 k}{s c} = \rho^2 g^2 = h^2$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{h^2}{t^n} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial t} = g^2 \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x^2} \quad (2)$$

war

$$\vartheta' = \vartheta'_0 + \Theta \Phi(u); \quad u = \frac{a-x}{2g\sqrt{t}} = \frac{y}{2g\sqrt{t}}; \quad \Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\mu^2} d\mu.$$

Setzt man das Integral der Gleichung (1) in der Form voraus

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Theta \Phi(v), \quad v = \frac{y \cdot \varphi(y, t)}{2g\sqrt{t}}$$

so folgt

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{y \varphi}{4 g t \sqrt{t}} \left(1 - \frac{2t}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2g\sqrt{t}} \left(\varphi + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

folglich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= -\frac{2\Theta}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} \frac{y \varphi}{4 g t \sqrt{t}} \left(1 - \frac{2t}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial y^2} &= -\frac{2\Theta}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} \frac{y \varphi}{4 g^3 t \sqrt{t}} \left(\varphi + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{2\Theta}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} \frac{1}{2g\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (1) würde folgen

$$1 - \frac{2t}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{h^2}{g^2 t^n} \left(\varphi + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 - \frac{2h^2}{t^{n-1} y \varphi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right).$$

Setzt man in dieser Gleichung $\varphi(t, y) = \varphi_1(y) \cdot \varphi_2(t)$

so würde

$$\left(1 - \frac{2t}{\varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right) t^{n-1} = \frac{h^2 \varphi_2^2}{g^2 t} \left(\varphi_1 + y \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 - \frac{2h^2}{y \varphi_1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_1 + y \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right).$$

Diese Gleichung würde erfüllt, wenn $\varphi_2 = \sqrt{t}$ gesetzt wird; die linke Seite wird dann Null, und die rechte Seite eine bloße Funktion von y ; allein dann würde $v = (y \cdot \varphi_1 : 2g)$ unabhängig von t ; das Integral daher nicht das allgemeine. Setzt man aber rechts

$$\varphi_1 + y \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = c_1 \quad (4)$$

so wird die rechte Seite von y unabhängig, und es folgt

$$\left(1 - \frac{2t}{\varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right) = \frac{h^2 \varphi_2^2}{g^2 t^n} = c_1^2. \quad (5)$$

Diese beiden Gleichungen sind zu integrieren.

Die Gleichung (4) liefert

$$\frac{dy}{y} = \frac{d\varphi_1}{c_1 - \varphi_1}; \quad \varphi_1 = c_1 \left(1 + \frac{c}{y}\right).$$

Die Gleichung (5) gibt die Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{\varphi_2}{2t} - \frac{h^2}{g^2} c_1^2 \frac{\varphi_2^3}{2t^{n+1}}$$

Setzt man in dieser

$$\varphi_2 = t^{\frac{n}{2}} \chi(t)$$

so wird

$$t \frac{d\chi}{dt} = -\frac{n-1}{2} \chi - \frac{h^2 c_1^2}{g^2} \chi^3.$$

Ein partikuläres Integral ergibt sich aus $d\chi : dt = 0$, $\chi = b_0$,

$$b_0^2 = -\frac{(n-1)g^2}{c_1^2 h^2}$$

woraus folgt, daß $n < 1$ sein muß (ein positiver echter Bruch oder eine beliebige negative Zahl).

Die Differentialgleichung für χ gibt

$$\begin{aligned} \frac{dt}{t} &= 2 \frac{d\chi}{(1-n)\chi - \rho^2 c_1^2 \chi^3} \\ (1-n) \frac{dt}{t} &= \left(\frac{2}{\chi} + \frac{\rho c_1}{\sqrt{1-n-\rho c_1 \chi}} - \frac{\rho c_1}{\sqrt{1-n+\rho c_1 \chi}} \right) d\chi \\ t^{1-n} &= \frac{c' \chi^2}{(1-n) - \rho^2 c_1^2 \chi^2} \\ \chi^2 &= \frac{(1-n)t^{1-n}}{c' + \rho^2 c_1^2 t^{1-n}} \end{aligned}$$

Für $c' = 0$ geht dieses Integral in die obige partikuläre Lösung über; führt man statt c' eine andere Konstante $c' = d\rho^2 c_1^2$ ein, so wird

$$\chi = \frac{\sqrt{1-n}}{\rho c_1} \frac{t^{\frac{1-n}{2}}}{\sqrt{d+t^{1-n}}}$$

$$\begin{aligned} \varphi(y, t) &= \varphi_1(y) \cdot \varphi_2(t) = c_1 \left(1 + \frac{c}{y}\right) t^{\frac{n}{2}} \frac{\sqrt{1-n}}{\rho c_1} \frac{t^{\frac{1-n}{2}}}{\sqrt{d+t^{1-n}}} \\ v &= \frac{\sqrt{1-n}}{2h} \frac{y+c}{\sqrt{d+t^{1-n}}} = \frac{\sqrt{1-n}}{2h} \frac{a-x+c}{\sqrt{d+t^{1-n}}} \end{aligned}$$

Dabei ist

$$h = \rho \sqrt{\frac{k}{sc}}$$

und dann ist das Integral der Differentialgleichung (1)

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 + \Theta \Phi(v)$$

Für $t = 0$ wird $v = \frac{\sqrt{1-n}}{2h} \frac{a-x+c}{\sqrt{d}}$ und kann daher nur konstant werden,

wenn $b = 0$ ist; dann würde $\Phi(v) = 1$. Es wird

$$\begin{aligned} & \text{1) } t = 0 & \text{2) } t \text{ beliebig:} \\ \text{Für } x = 0 \text{ (Mittelpunkt): } & v_m = \frac{\sqrt{1-n}}{2h} \frac{a+c}{\sqrt{d}} & v_m = \frac{\sqrt{1-n}}{2h} \frac{a+c}{\sqrt{d+t^{1-n}}} \\ \text{für } x = a \text{ (Oberfläche): } & v_0 = \frac{\sqrt{1-n}}{2h} \frac{c}{\sqrt{d}} & v_0 = \frac{\sqrt{1-n}}{2h} \frac{c}{\sqrt{d+t^{1-n}}} \end{aligned}$$

Soll nun für jede beliebige Zeit an der Oberfläche $\vartheta = \vartheta_0$ werden, so müßte $\Phi(v_0) = 0$, also auch $v_0 = 0$ sein; dann müßte $c = 0$ sein; ist c nicht gleich Null, so wird aber für große Werte von t das Zusatzglied $\Phi(v_0)$ nur mäßig und mit wachsenden Zeiten immer kleiner, so daß die Oberflächentemperatur rasch den Grenzwert $\vartheta = \vartheta_0$ mit genügender Annäherung erreicht, sofern c nur entsprechend klein gewählt wird. Damit die Oberflächentemperatur auch für $t = 0$ klein bleibe, muß $d^2 > c$ sein. Da

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{2\Theta}{V\pi} c^{-v^2} \cdot \frac{\sqrt{1-n}}{2h} \frac{1}{\sqrt{d+t^{1-n}}}$$

ist, und für kleine Werte von $a - x$ und große Werte von t

$$e^{-v^2} = 1$$

ist, so wird an der Oberfläche

$$\frac{\Theta \sqrt{1-n}}{h V\pi \sqrt{d+t^{1-n}}} = \frac{1}{v}$$

und daraus

$$\frac{\Theta}{\sqrt{d+t^{1-n}}} = \frac{\rho g V\pi}{v \sqrt{1-n}}$$

Wäre n negativ, so würde nach Gleichung (1) die Temperaturabnahme mit der Zeit wachsen, die Abkühlung würde immer rascher erfolgen. Dieser Fall kann den Tatsachen nicht entsprechen, da nach Bildung der Kruste die Temperatur an der Oberfläche fast konstant und die innere Wärme nur langsam verloren geht. Es muß also n positiv, und daher ein echter Bruch sein; es wird dann die Abkühlung im Laufe der Zeiten immer langsamer. Man kann dieses so auffassen, daß an Stelle des früheren k jetzt $\rho^2 k t^{-n}$ tritt, also die durch Konvektionsströmungen erzeugte Leitung eine viel raschere, aber mit der Zeit abnehmende ist. Da erfahrungsgemäß die Abnahme von $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ mit der Zeit aber äußerst gering ist, wird n ein sehr kleiner Bruch sein.

Nun folgt

$$d + t^{1-n} = \left(\frac{v\Theta}{g}\right)^2 \frac{1-n}{\pi \rho^2}$$

wobei der Wert von d bei sehr großem t auch weggelassen werden kann; dann folgt, daß für kleine Werte von n nur $\rho^2 t$ an Stelle von t tritt, also die Abkühlungszeiten im Verhältnis ρ^{-2} verkürzt werden, während sonst keine merklichen Unterschiede gegen die frühere Lösung erscheinen. Auch hier wird

$$\frac{\sqrt{1-n}}{2h \sqrt{d+t^{1-n}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2v\Theta},$$

und damit

$$v = \frac{\sqrt{\pi}}{2v\Theta} (a - x + c)$$

so daß die Temperatur von dem mit wachsenden Zeiten wachsenden Wert von v abhängig erscheint. Nach genügend langen Zeiten, wenn v groß geworden ist, wird auch hier

$$\Phi(v) = 1.1284 v = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v = \frac{a-x+c}{v\Theta}$$

und damit

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{a-x+c}{v}$$

Wenn auch hiernach festgestellt erscheint, daß die Temperatur im Erdmittelpunkte seit dem Beginne der Krustenbildung noch keine wesentliche Erniedrigung erfahren hat, indem die verschiedenen Annahmen nur zu mehr oder weniger langdauernden Erkaltingsperioden geführt haben, so ist damit aber noch keineswegs dargetan, daß die Temperatur im Erdmittelpunkte auch wirklich jene sein müsse, welche der Kontraktion der Erdmasse auf ihre gegenwärtige Größe (ohne Berücksichtigung von Wärmeverlusten) entspricht. Vor der Krustenbildung waren die Konvektionsströmungen noch viel bedeutender, wenn sie sich auch schon zu jener Zeit infolge des in größerer Tiefe herrschenden Druckes nur auf mehr oder weniger oberflächliche Zonen erstreckten.

Zunächst aber wäre noch der Einfluß des Strahlungsverlustes zu untersuchen. Die Formel (S. 16):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = g^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - b \vartheta$$

berücksichtigt eine äußere Wärmeleitung längs der ganzen Oberfläche des leitenden Stabes. Eine solche äußere Leitung kommt im Innern der Erde nicht vor, weil jeder Stab als angrenzendes Medium einen Stab mit gleicher Wärmeverteilung hat. Für eine Ausstrahlung nach außen müßte, wenn man das Stefan'sche Gesetz zu Grunde legt, für jeden Punkt im Innern ein Glied $-\alpha \vartheta^4$ angesetzt werden. Diese Strahlung wird aber nur bis zu einer gewissen Tiefe reichen, bei welcher die Dichte noch nicht so groß ist, um durch Absorption wesentlich geändert zu werden. Setzt man die Dicke dieses Kernes gleich demjenigen, bis zu welchem die Temperatur nach den oben gefundenen Beziehungen als nahe konstant gelten kann und als strahlende Schale den oberen Teil, in welchem die Temperaturabnahme eine raschere Tiefenstufe zeigt, so wird durch Ausstrahlung in dieser äußeren Schale die Temperatur an der Oberfläche des inneren Kernes rascher fallen, und dadurch ein erheblicheres Temperaturgefälle im Innern erzeugen. Setzt man dann voraus, daß die Temperatur bis zu dieser Schicht infolge der im Kerne stattfindenden Leitung überhaupt konstant bleibt, so verteilt sich die Ausstrahlung der Oberflächenschicht auf das ganze Volumen des inneren Kernes, was allerdings nur dann als strenge richtig angesehen werden dürfte, wenn die Masse der inneren Kugel ein absoluter Leiter wäre; ist aber diese Bedingung auch nicht erfüllt, so wird die Ausgleichung der Temperatur des Kernes etwas längere Zeit beanspruchen, aber schließlich doch wieder zu jenem stabilen Zustand führen, bei welchem der Kern gleiche Temperatur hat, und von seiner Oberfläche aus die Strahlung beginnt.

Für die äußere Kugelschale, so lange eben noch der Körper gasförmig ist, findet Strahlung nach außen statt, welche allerdings nicht nach dem Stefan'schen Gesetz stattfinden, sondern erheblich kleiner sein wird; denn

der durch Absorption für die Strahlung verlorene Teil wird die Schichten, in denen die Absorption erfolgt, erwärmen, so daß in diesen die Strahlung verkleinert erscheint. Im Mittel möge die Strahlung für jede Kugelschicht nach dem einfachen Gesetze der Proportionalität der Strahlung mit dem Temperaturüberschusse über die Temperatur des Weltraumes¹⁾ angenommen werden, so daß die Differentialgleichung für die Wärmeverteilung jetzt

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{h^2}{t^n} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \alpha \vartheta$$

wird, wobei α ein außerordentlich kleiner Bruch sein muß.

Die Integration dieser Differentialgleichung ist wieder verhältnismäßig leicht; setzt man

$$\vartheta = e^{-\alpha t} \vartheta'$$

so wird für ϑ' die Differentialgleichung erhalten

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial t} = \frac{h^2}{t^n} \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x^2}$$

deren Integral bereits abgeleitet ist, es wird demnach

$$\vartheta = e^{-\alpha t} [\vartheta_0 + \Theta \Phi(v)]; \quad v = \frac{\sqrt{1-n}}{2h} \frac{a-x+c}{\sqrt{d+t^{1-n}}}$$

Welche Zeit von dem Beginne der Nebelverdichtung bis zu dem Momente der Krustenbildung verflossen ist, ist uns unbekannt; einen rohenäheren Wert kann man von derselben aber jetzt erhalten, wenn man die durch die Kondensation ohne Ausstrahlung zu erlangende Temperatur bei der Krustenbildung als $\Theta = 198.600^0$, die wirklich vorhandene Mittelpunkts-temperatur (die allerdings nur hypothetisch angenommen werden kann) etwa 4000^0 gleich $e^{-\alpha t} \Theta$ ansieht. Dann hat man

$$e^{-\alpha t} \Theta = 4000^0; \quad \Theta = 198.600^0;$$

daraus folgt

$$e^{+\alpha t} = 49.65, \quad t_0 = \frac{3.9}{\alpha};$$

t_0 ist die Zeit vom Beginne der Nebelkondensation bis zur Krustenbildung. Setzt man $\alpha = 0.000001$, so würde $t_0 = 4,000.000$ Jahre folgen, also ein jedenfalls relativ geringer Zeitraum.

Von dem Momente der Solidifikation kann die Strahlung als ganz belanglos übergangen werden. Um dieses einzusehen, soll die Erkaltung unter der Voraussetzung desselben Gesetzes, aber eines noch viel kleineren α , betrachtet werden.

Durch Differentiation nach x folgt aus demselben

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = - e^{-\alpha t} \frac{2\Theta}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} \frac{\sqrt{1-n}}{2h\sqrt{d+t^{1-n}}}$$

¹⁾ Die älteren Strahlungsgesetze haben diese Annahme, wobei aber wohl keine genügende Abtrennung der äußeren Wärmeleitung auftritt.

Die Entwicklung von e^{-n^2} wird hauptsächlich wegen des Faktors $(\alpha - x + c)^2$, welcher für die Oberfläche außerordentlich klein ist, stets übergangen werden können, und man hat

$$-\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\Theta}{h \sqrt{\pi}} \left(1 - \alpha t + \frac{1}{2} \alpha^2 t^2 \dots\right) \frac{\sqrt{1-n}}{\sqrt{d+t^{1-n}}}$$

und dieser Wert muß gleich sein $1/30$. Damit wird, wenn d gegenüber t vernachlässigt wird:

$$\left(1 - \alpha t + \frac{1}{2} \alpha^2 t^2\right) \frac{1}{\sqrt{t^{1-n}}} = \frac{1}{m^{1-n}}$$

wenn

$$\frac{\sqrt{1-n} \cdot \nu \cdot \Theta}{h \sqrt{\pi}} = m^{1-n}$$

gesetzt wird. Der erste Näherungswert für $t = m^2$, gibt dann in aufeinanderfolgenden Näherungen:

$$t = m^2 \left[1 + \frac{2\alpha}{1-n} m^2 + 9\alpha^2 m^4\right]$$

Hier kann also n völlig übergangen werden; da dann m^2 für $\rho = 30$ den Wert 125.500 Jahre, für $\rho = 10$ noch den Wert 1,255.000 Jahre annehmen würde, so müßte $\alpha' > 0.000\ 000\ 001$, d. h. $\alpha' > 0.001 \alpha$ angenommen werden, um dem Klammerausdruck noch einen den Wert von t beeinflussenden Betrag zu erteilen.

Wie auf Seite 31 erwähnt wurde, ist jedoch noch eine Ergänzung vorzunehmen. Die „Stäbe“, längs deren in der Erde die Leitung vom Zentrum zur Oberfläche stattfindet, sind nicht prismatisch, sondern als Kugelsektoren zu betrachten, deren Querschnitte sich nach außen erweitern. Obzwar es wohl von vornherein klar ist, daß sich infolge der Ausbreitung der Wärme auf immer größere Flächen in diesem Falle für den Mittelpunkt eine höhere Ausgangstemperatur ergeben wird müssen, soll der Vollständigkeit wegen die Untersuchung auch noch in dieser Richtung durchgeführt werden.

Die in dem Raume I, II (S. 16) von I nach II übertretende Wärmemenge Q_1 und die im Raume II, III von II nach III übertretende Wärmemenge Q_2 drücken sich aus durch

$$Q_1 = k q t \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad Q_2 = k \left(q + \frac{dq}{dx} dx\right) t \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)'$$

und damit wird die Differentialgleichung jetzt

$$kqt \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx + k \frac{dq}{dx} t \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx - hp t \vartheta dx = q s c t \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dx.$$

Da nun die Oberfläche der Kugel vom Halbmesser x gleich ist $4\pi x^2$ und für jeden Kugelteil

$$\frac{dq}{q} = \frac{dO}{O} = 2 \frac{dx}{x}$$

ist, so wird

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = g^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + 2 \frac{g^2}{x} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - b \vartheta.$$

Diese Gleichung ¹⁾ ist ein spezieller Fall der allgemeinen Gleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = g^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{2g^2}{\varphi(x)} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - b\vartheta$$

wobei noch

$$g^2 = \frac{h^2}{t^n}$$

sein kann. Um diese Gleichungen zu integrieren, sei

$$\vartheta = \frac{u e^{-bt}}{\chi}$$

wo χ eine bloße Funktion von x , u aber eine Funktion von x und t ist. Die Substitution in die Differentialgleichung ergibt, indem das Glied $b\vartheta$ wegfällt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2g^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) - g^2 \frac{u}{\chi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich, wenn

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{1}{\varphi(x)}$$

gesetzt wird. Hieraus folgt

$$\log_n \chi = \int \frac{dx}{\varphi(x)}$$

und

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1 - \varphi'(x)}{\varphi(x)^2}$$

so daß die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g^2 \frac{1 - \varphi'(x)}{\varphi(x)^2} u$$

wird. ²⁾ Wenn $\varphi(x) = x + p$; $\varphi'(x) = 1$ ist, wird

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

und dabei wird

$$\log_n \chi = \int \frac{dx}{x+p}; \quad \chi = \frac{C}{a} (x+p).$$

Da im vorliegenden Falle $p = 0$ ist, so wird das Integral

$$\vartheta = \frac{a u e^{-bt}}{Cx} = \frac{a e^{-bt}}{Cx} \left[\vartheta_0 + \Theta \Phi \left(\frac{\sqrt{1-n}}{2h} \frac{a-x+c}{\sqrt{d+t^{1-n}}} \right) \right]$$

¹⁾ Diese Gleichung findet sich bereits bei Fourier, Théorie analytique de la chaleur. Fourier integriert dieselbe durch Einführung von $y = \vartheta x$. Es ist dies auch nichts anderes, als die für die Wärmeleitung in der Kugel direkt abgeleitete Gleichung $\frac{\partial(x\vartheta)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2(x\vartheta)}{\partial x^2}$ (vgl. z. B. V. v. Lang, Einleitung in die theoretische Physik, Wärmeleitung).

²⁾ Die Gleichung wird noch integrabel, wenn $\frac{1 - \varphi'(x)}{\varphi(x)^2} = m$, konstant ist; dann wird, wenn $\varphi(x) = z$ gesetzt wird

$$\frac{dz}{dx} = 1 - m z^2; \quad z = \varphi(x) = \frac{1}{m} \frac{n e^{2x} - 1}{n e^{2x} + 1}$$

Bildet man hier wieder

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{a}{C} e^{-bt} \left(-\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

für $x = a$, so wird, wenn der Einfachheit wegen $C = 1$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)_{x=a} = \frac{1}{v} = e^{-bt} \left(\frac{\vartheta_0}{a} + \frac{\Theta}{hV\pi} \frac{V\sqrt{1-n}}{Vd + t^{1-n}} \right)$$

und daher

$$\frac{\Theta}{hV\pi} \frac{V\sqrt{1-n}}{Vd + t^{1-n}} = \left(\frac{e^{bt}}{v} - \frac{\vartheta_0}{a} \right)$$

daher für $b = 0$ oder gleich einem sehr kleinen Werte α dieselben Beziehungen wie früher, nur, wie vorauszusehen, mit einer wesentlich längeren Erhaltungsdauer.

Die Resultate der bisherigen Untersuchung können daher folgendermaßen zusammengefaßt werden:

1. Die Temperatur des Erdinnern, wenngleich die Erde durch Kondensation der sie bildenden Nebelmassen eine Temperatur von nahe 200.000^o erlangt haben müßte, braucht nicht höher zu sein, als etwa die Schmelztemperatur der Gesteine, zu welcher Abkühlung der relativ geringe Zeitraum von 4,000.000 Jahren ausgereicht haben mag.

2. Der in irgend einem Punkte des Erdinnern wirkende Druck kann eine merkliche Erhöhung dieser Temperatur überhaupt nicht hervorrufen und werden daher die Gesteine in demjenigen Zustande verharren, welcher ihrer durch die fortschreitende Abkühlung bedingten Temperatur entspricht.

3. Die Abnahme der Temperatur gegen das Erdinnere zu hat nur in der Nähe der Erdoberfläche die geothermische Tiefenstufe von 30 *m* pro Grad C; in der Tiefe von etwa 400 *km* ist bereits die Temperatur nahe gleich derjenigen im Erdmittelpunkte.

4. Der Tangentialdruck der Gesteinsmassen vermag Hebungen (Gebirgsbildung) nicht hervorzubringen; der Tangentialdruck von über 1 Million Atmosphären ist nur eine das Gleichgewicht eines beliebig großen Teiles der Erdkruste bedingende Kraft; sie kann durch einen mäßigen, von innen nach außen wirkenden Druck ersetzt werden.

5. Tektonische Veränderungen, Hebungen, Faltungen, Retraktionen und Berstungen der Rinde, Vulkanismus können durch die infolge von regionalen ungleichen Abkühlungen von Kern und Rinde auftretenden Kräfte erklärt werden.

Aus der Annahme der Faltungen infolge der seitlichen Druckkräfte erhält O. Fisher eine Auftreibung nach beiden Seiten, d. i. nach außen und innen, so daß an jeder Stelle, wo sich ein Gebirge erhebt, eine ähnliche Masse in das Substratum eintaucht. Dabei wird in einer gewissen Tiefe unter der Oberfläche sich eine Schicht befinden, die der Faltung nicht unterworfen ist, welche er die indifferente Schicht nennt. Seine Rechnungen, die mitunter nicht völlig einwandfrei sind, ergeben diese indifferente Schicht in der Tiefe von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{3}$

der Dicke, im Mittel $\frac{2}{3}$ der Dicke¹⁾, so daß er dieselbe in 15 km unter der Oberfläche und 35 km über dem Kern setzt. Die Verdickung, welche sich unter jedem Berge nach unten finden soll, nennt er die Wurzel des Berges (the root of the mountain)²⁾ und findet eine Bestätigung dieser Ansicht in dem Umstande, daß durch die Lotablenkungen Massendefekte unter den Gebirgen konstatiert wurden, welche er dem Umstande zuschreibt, daß die leichtere Kruste von dem dichteren Substratum getragen wird, die leichteren Bergwurzeln in die dichtere Lava eintauchen und diese verdrängen. Er nimmt für die Kruste das spezifische Gewicht des Granits, für die unterliegende flüssige Masse die Dichte des Basalts an, so daß das Verhältnis 0.905 ähnlich demjenigen zwischen Eis und Wasser (0.918) wäre.³⁾ Auch Airy soll angeblich⁴⁾ das flüssige Substratum als den dichteren Bestandteil angenommen haben. Diese Annahme ist jedoch wenig wahrscheinlich. J. H. Pratt hatte schon eingewendet, daß die kondensierte Masse dichter sein müsse als die geschmolzene, welches Argument aber Fisher nicht gelten läßt; er meint, die Schichten müssen nach innen zu dichter werden. Lord Kelvin⁵⁾ hingegen sagt, daß unter der Kruste die flüssigen Teile in consequence of their less specific gravity nach aufwärts streben und die Kruste zu durchbrechen suchen.

Auch aus der Temperaturabnahme folgert Fisher eine dickere Kruste unter den Bergen, indem sich aus Tunnelbohrungen ergab, daß die geothermische Tiefenstufe ν unter den Bergen größer wäre.

1) Dieses Resultat leitet Fisher aus der Überlegung ab, daß die über der neutralen Schicht gelegenen Teile durch den Druck nach aufwärts, die unter derselben liegenden nach abwärts bewegt werden müssen; er findet für den Druck in der Tiefe x :

$$p = g \rho x + \int_0^x f dx + C \text{ für den ober der neutralen Schicht, und}$$

$p' = -g \rho x + \int_0^x f dx + C'$ für den unter derselben gelegenen Teil; für die neutrale Zone in der Tiefe h folgt daraus

$$g \rho h + \int_0^h f dx = -g \rho (k - h) + \int_h^k f dx + g \rho k$$

somit $\int_0^h f dx = \int_h^k f dx$; für einen konstanten Wert des Reibungskoeffizienten f wird daraus

$$f h = f (k - h); \quad h = \frac{1}{2} k$$

Für einen veränderlichen Wert wird

$$f = \lambda \cos \frac{\pi x}{2k}$$

angenommen, womit

$$\lambda \frac{2k}{\pi} \sin \frac{\pi h}{2k} = \lambda \cdot \frac{2k}{\pi} \left(1 - \sin \frac{\pi h}{2k}\right)$$

und daraus $h = \frac{1}{2} k$ gefolgert. Hier ist nun die Einführung von f im allgemeinen und insbesondere des \cos für denselben nicht recht begründet, daher das Resultat etwas willkürlich.

2) l. c. S. 143.

3) l. c. S. 278.

4) Fisher, l. c. S. 147.

5) On the secular cooling of the Earth. Doch nimmt auch Marcel Bertrand (Comptes rendus Bd. 130 [1900] S. 217) an, daß mitunter die Basis der Faltungen in das Substratum eindringt

Indem nun nach Fisher die äußeren, frei liegenden Erhebungen durch Denudation erniedrigt werden, ergibt sich, daß der untere in die Lava eintauchende Teil noch viel bedeutender sein müsse als der äußere, und da er unter dem Meere keine Höhlungen annimmt, so schließt er, daß die Dicke der Kruste unter dem Meere 35 *km*, unter den Bergen etwa 50 *km* wäre; ja, etwas später (S. 286) schließt er aus dem Dichteverhältnis, daß die Tiefe der Beigwurzeln etwa 10mal so groß sein müsse, wie die Erhebung der Berge (ähnlich wie bei den Eisbergen).

Diese Annahme scheint aber mit den vulkanischen Erscheinungen in direktem Widerspruch; dieselben fordern, daß die geschmolzene Lava sich zwischen die Antiklinalen hinein erhebt, eine Annahme, die Fisher allerdings von seinem Standpunkte aus verwerfen muß.

Der Vulkanismus spielt nun insoferne hier noch eine besondere Rolle, als in demselben ein Mittel gegeben ist, den Druck im Innern der Erde zu messen. Es wurde schon früher erwähnt, daß unter der Voraussetzung, daß die Vulkanausbrüche wenigstens teilweise aus dem Erdinnern stattfinden, von einem so kolossalen Druck nicht die Rede sein kann.

Nun finden aber sicher wenigstens nicht alle Ausbrüche aus dem Erdinnern statt; eine große Rolle bei den vulkanischen Erscheinungen spielt das Wasser. Auch hier hat Fisher seine Resultate durch Rechnung erhalten, weshalb gerade auf seine Arbeiten etwas näher eingegangen werden muß. Fisher behauptet, daß das Wasser in dem Magma unter der Kruste mit diesem innig gemischt sein müsse. da sich sonst eine Zwischenschicht von Wasser zwischen Kruste und Magma bilden würde, woraus folgt, daß das Wasser in dem Magma eine gleiche Dichte mit diesem haben müsse.¹⁾ Die auf diese Annahme gegründeten Rechnungen fallen aber mit dieser an sich unhaltbaren Annahme. Denn eine Kompression des Wassers in einem Gemenge, als welches man sich das Magma zu denken hat, bis zu einer Dichte gleich derjenigen des Magma ist physikalisch ausgeschlossen. Obgleich Fisher selbst anführt, daß die kritische Temperatur des Wassers 773° F. (412° C.) ist, somit das Wasser in der Tiefe von 14 *km*, in welcher diese Temperatur herrscht, nicht mehr im flüssigen Zustande existieren könnte, verwertet Fisher dieses Resultat nicht, sondern spricht von dem Austritt des Wassers (extravasation of water) aus dem Magma.

Nichtsdestoweniger scheint das Wasser in der Entfesselung vulkanischer Erscheinungen eine viel größere Rolle zu spielen, als aus den Ableitungen Fisher's folgt. Berücksichtigt man nämlich, daß bei der Verwitterung der kristallinen Gesteine das Kristallwasser frei wird, das in den Kristallen in einer Weise gebunden ist, die wesentlich von der hypothetischen Bindung im Magma verschieden ist, so kann tatsächlich eine Volumsvermehrung stattfinden, da das Kristallwasser im Kristall als verdichtet anzusehen ist. Die Überführung von Silikaten und Sulfaten in Karbonate, der erste Grad der Verwitterung, kann mitunter Freiwerden von Wasser zur Folge haben, wenn sich aus den

¹⁾ l. c. S. 190.

kristallinen Gesteinen amorphe Karbonate bilden, in anderen Fällen allerdings Bindung von Wasser, wenn sich kristallinische Karbonate mit hohem Kristallwassergehalt bilden. Die schließliche Verwitterung der letzteren wird unter allen Umständen den letzten Rest des Kristallwassers freimachen, und so kann der Verwitterungsprozeß an sich eine Steigerung des lokalen Druckes geben und damit die Ursache zu vulkanischen Eruptionen werden.

Endlich sind bei den tektonischen Kräften die durch Denudation und Massentransporte auftretenden nicht zu vernachlässigen, da sie wohl gegenüber dem sogenannten „Tangentialschub“ nur sehr gering erscheinen, hingegen tatsächlich eine sehr erhebliche Rolle spielen können. Für die Beziehungen zwischen dem Druck von innen nach außen P_1 , dem Gewichte der Auflagerungen, Q und der Festigkeit der Kruste F war die Beziehung gefunden worden (S. 12), daß

$$\begin{aligned} &\text{für } P_1 > Q + F \text{ Hebungen,} \\ &\text{für } Q > P_1 + F \text{ Senkungen} \end{aligned}$$

stattfinden werden. Dabei war P_1 derjenige Teil des von innen nach außen wirkenden Druckes, der nach Abzug des Teiles P_0 , der zur Erhaltung des Gewichtes der Kruste dient, übrig bleibt.

Wäre die Festigkeit der Kruste Null, d. h. die Erde eine Flüssigkeit bis zur Oberfläche, so würde bei jedem beliebigen innern Druck (der, wie erwähnt, als hydrostatischer Druck und nicht als Maß der Festigkeit anzusehen ist) die ganze Masse äußeren Kräften (Fliehkraft, Attraktion von Sonne und Mond) folgen. Für die hierbei auftretenden Veränderungen haben daher auch die berechneten Druckkräfte absolut keine Bedeutung; als Maß der Festigkeit hat man einzig und allein die empirisch zu bestimmenden Zahlenwerte für das die Kruste zusammensetzende Material anzusehen: für die deformierenden Kräfte kommen dann in Betracht die unter der Kruste oder in deren Innern sich entwickelnden Gas- oder Dampfspannungen und, was für das folgende ganz wesentlich ist, der Wert von Q , d. i. das Gewicht der Auflagerungen, mögen diese nun durch Sedimente oder durch Eis gebildet werden.

Die Festigkeit des die Kruste bildenden Materials ist nun eine sehr verschiedene. Um nur einige Beispiele anzuführen, ist die Festigkeit für Kalkstein 1 kg pro mm² (weicher *K.*) bis zu 5 kg pro mm² (und selbst mehr; harter, dichter *K.*), welchen Zahlen, auf den cm² bezogen, 100 bis 500 Atm. entsprechen. In diesen Einheiten ist für

Porphyr	$F = 2500 \text{ kg}$
Granit	zwischen 1000 bis 1700 „
Marmor	800 „ 1000 „
Kalkstein	100 „ 500 „
Sandstein	90 „ 180 „

Die Auflagerungen Q sind ebenso wechselnd. Die mitunter festgehaltene Annahme, daß durch den Druck der Auflagerungen Temperaturerhöhungen auftreten, die wieder zu Hebungen führen, ist physikalisch unbegründet. Temperaturerhöhungen können nur als Folge von Kompressionen, nicht aber als Folge von ruhigem Drucke erscheinen; nur dann, wenn die Auflagerungen eine

wesentlich niedrigere Temperatur als die Unterlage haben, oder wenn durch die Abtragung Materialien von niedrigerem Wärmeleitungsvermögen an die Oberfläche kommen, kann die Temperaturveränderung der Oberflächenschichten bei der Deformation eine Rolle spielen. (Die Auflagerungen von Eis müssen daher infolge der Beeinflussung der Temperatur später besonders betrachtet werden.)

Der Einfluß der Massenverschiebungen wurde von den Geologen bereits in Betracht gezogen. Durch eine bestimmte Massenanordnung, teilweise oberhalb, teilweise unterhalb eines gleichmäßigen Niveaus stellt sich ein Gleichgewichtszustand her, der von Dutton als Isostasie bezeichnet wurde. Wenn sich infolge von Massenverschiebungen durch Denudation einerseits und Ablagerung andererseits dieser Zustand ändert, so wird das Bestreben nach Herstellung eines neuen isostatischen Zustandes als gebirgsbildende Kraft auftreten.

Über die Größe der Massenverschiebungen mögen die folgenden Zahlen nach Ed. Brückner¹⁾ einen Überblick geben:

Die Reuß lagert jährlich $150.000 m^3$ Geschiebe in ihrem Delta ab; die Kander am Tunersee $300.000 m^3$, die Aare am Bielersee $450.000 m^3$.

Durch Sedimentablagerung wird der Genfersee in 30.000 Jahren, der Vierwaldstädtersee in 20.000 Jahren verschüttet sein. Seit 1660 sind im Kanton Zürich von 149 Seen bis jetzt 73 verschwunden.

Noch gewaltiger sind selbstverständlich die Massenverschiebungen durch die großen Flüsse. Der Mississippi führt nach Uhlig jährlich²⁾ ungefähr $28.000.000 m^3$ feste Teile ins Meer; ähnlich bei dem $8000 km^2$ umfassenden Delta des Ganges-Brahmaputra.

Rechnet man diese Verschiebungen auf die ganze Fläche des betroffenen Gebietes um, so erhält man die Dicke der abgetragenen Schicht. Nach Reade³⁾ beträgt die Abtragung der Elbe $0.012 mm$ jährlich, für den Nil $0.013 mm$, für die Donau $0.056 mm$; die größten Werte fand er für den Ganges und Irawadi $0.31 mm$, Kander $0.28 mm$, Arve bei Genf $0.21 mm$, Rhone $0.44 mm$. Für ganz England schätzt er die Abtragung auf $0.018 mm$ jährlich, für die ganze Erde auf $0.012 mm$. Die hiedurch bewirkte Denudation würde 1 m ergeben für den

Mississippi in 18.000 Jahren	Nil	in 14.000 Jahren
Ganges „ 7.000 „	Rhone „	4.500 „
Donau „ 20.000 .	Hoangho „	4.400 „
	Po „	2.200 „

Zu den Massenverschiebungen wären nun auch die Transporte von gelösten Bestandteilen zu rechnen. Hier wäre in erster Linie des Kochsalzes zu gedenken. Würde das ganze Meerwasser verdampft, so würde eine Salzlage von durchschnittlich etwa 100 m Dicke zurückbleiben.⁴⁾ Diese Ver-

1) Penck-Brückner, Die Alpen im Eiszeitalter. S. 598.

2) Neumayer-Uhlig, Erdgeschichte. I. Bd. S. 526.

3) Neumayer-Uhlig, ebenda, S. 587.

4) Ebenda, S. 597.

dampfung findet in der Tat statt; wäre eine solche nicht, so würde infolge der Niederschläge nicht nur über dem Meere, sondern auch über dem Festlande, dessen Niederschläge durch die Flüsse dem Meere zugeführt werden, der Meeresspiegel jährlich um 1 *m* steigen. Sei der Zufluß zu einem See in einer gewissen Zeit 10^{-10} seines Volumens, der Salzgehalt $10^{-4} = 0.01\%$, so würde in dieser Zeit 10^{-14} seines Volumens als Salz abgelagert und in 10^{14} Zeiteinheiten müßte der ganze See ausgefüllt sein. Eine allzugroße Menge gegenüber dem übrigen Geschiebe ist dies ja nicht, in ausnahmsweisen Fällen, wie beim Kaspisee oder dem Salzsee in Utah, kann die Menge etwas größer werden, in allen Fällen addiert sie sich zu den Ablagerungen der ungelösten Geschiebe.

Für die Berechnung von *Q* fehlt jedoch in den meisten Fällen das Areal, auf welches sich die Ablagerungen verteilen. Nimmt man als Mittel den von Brückner angeführten Wert von 0.5 *mm* jährlich, also eine Denudation von 1 *m* Höhe in 2000 Jahren und Ablagerung derselben an anderer Stelle, so würde dieses, das spezifische Gewicht des Sedimentes zu 2.5 angenommen, in 10.000 Jahren eine Abtragung von 1.3 *kg* pro *cm*² Fläche bedeuten. Meist sind die Ablagerungen wesentlich größer, weil sie sich auf ein kleineres Areal erstrecken, als die Abtragung. Aus den oben für den Genfer- und Vierwaldstädtersee gegebenen Zahlen folgt unter der Annahme der mittleren Tiefe von 250, beziehungsweise 120 *m* für je 10.000 Jahre eine Ablagerung von 80, beziehungsweise 60 *m*, entsprechend einem Gewichte *Q* = 20, beziehungsweise 15 *kg* pro *cm*².

Auch der Einfluß einer Umstellung der Erdachse und der infolgedessen auftretenden Änderung der Fliehkraft wird von derselben Größenordnung, wie man leicht durch eine überschlagsweise Rechnung ermitteln kann.

Das Gewicht einer Säule Wasser von 1 *cm*² Querschnitt und 10 *m* Höhe beträgt 1 *kg*; für das Material der Erdoberfläche, dessen spezifisches Gewicht zwischen 2.5 und 3, im Mittel 2.8 angenommen werden kann, ist dasselbe 2.8 *kg*. Eine Säule von 1 *km* Höhe übt daher auf den *cm*² den Druck von 280 *kg* aus. Nimmt man die Dicke der Erdkruste *n km*, so wird dieser Druck nach innen 280 *n kg* und da die Fliehkraft im Äquator etwa $\frac{1}{270}$ der Schwerkraft ist, so wird dieselbe für eine *n km* dicke Kruste

$$F = n \text{ kg pro cm}^2 \text{ Fläche (n Atmosphären).}$$

In der geographischen Breite φ ist die der Schwerkraft entgegenwirkende Komponente $f = F \cos \varphi^2$; bei einer Umstellung der Erdachse um den Winkel α beträgt der Maximalwert der Änderung (in derjenigen Meridianebene, in welcher die Umstellung der Erdachse erfolgt)

$$\Delta f = F \cos(\varphi - \alpha)^2 - F \cos \varphi^2 = F \sin \alpha \sin(2\varphi - \alpha)$$

daher der Maximalbetrag in der geographischen Breite, welche bestimmt ist durch $2\varphi - \alpha = 90^\circ$, das ist nahe 45° gleich $F \sin \alpha$ oder für mäßige Winkel α nahe $0.017 F \alpha$ daher

$$0.017 n \alpha \text{ kg pro cm}^2$$

wenn α in Graden ausgedrückt wird. Für eine Kruste von $n = 100 \text{ km}$ Dicke

und einer Umstellung von 5° würde daher die Änderung der Fliehkraftkomponente (des Druckes) gleich 8.5 kg pro cm^2 betragen¹⁾.

Diese Kräfte sind gegenüber den oben angegebenen Festigkeiten klein, aber endlich und vergleichbar; außerordentlich kurze Zeit wirkende Kräfte dieser Größe würden bei den angegebenen Festigkeiten keinen besonders merklichen Einfluß äußern können, hingegen können sie in dem Maße, als sich die Wirkung über längere Zeiträume erstreckt zu langsamen Änderungen Anlaß geben, so daß die Erdkruste diesen Einflüssen zu folgen vermag.

Man kann annehmen, daß die durch dieselben bewirkten Deformationen den Gesetzen der Elastizität folgen und somit für momentane Wirkungen auch nur von momentaner Dauer sind, hingegen für dauernde Wirkungen auch dauernd erhalten bleiben. Dann wird die Deformation proportional den wirkenden Kräften, und in dem Maße, als die Kräfte im Laufe der Zeit anwachsen, werden auch die Deformationen selbst größer werden.

Eine vollständige Theorie müßte hier den Einfluß einer von Punkt zu Punkt veränderlichen Kraft auf eine Schale von der Dicke k und dem Elastizitätskoeffizienten E untersuchen. Dieser ist aber selbst von dem Material abhängig, sein Wert von F verschieden. Für Längenänderungen ist z. B. ebenfalls auf den cm^2 bezogen

für Marmor	$E = 260.000 \text{ kg}$
„ Kalkstein	188.000 kg
„ Sandstein	63.000 kg

und die durch eine Kraft P bewirkte Längenänderung wäre ($P : E$). Allein der hier auftretende Prozeß ist keine einfache Längenänderung; es treten gegenseitige Verschiebungen der Teilchen auf. Man wird aber jedenfalls einen zu

¹⁾ Für die Gebirgsbildung wurde mitunter, neuerer Zeit wieder von H. Simroth („Die Pendulationstheorie“ 1907, S. 524) die Verteilung der Fliehkraft auf der Erde herangezogen, und die Breiten von $35\frac{1}{2}$, beziehungsweise $52\frac{1}{2}^{\circ}$ als kritische Parallelen erklärt. Simroth spricht von einer Art „Sprung der Fliehkraft“ in diesen Parallelen und erklärt die Zone zwischen 38° und 52° als die „gebirgsbildende Zone“.

$$\text{Aus dem Ausdruck für das Potential } U = \frac{Mk^2}{r} \left\{ 1 + \frac{K}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2} \cos \varphi^2 \right\}$$

$$\text{und für die Schwerkraft } g = \frac{Mk^2}{r^2} \left\{ 1 + \frac{3K}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - \frac{\omega^2 r^3}{Mk^2} \cos \varphi^2 \right\}$$

(Helmert, die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie II. Bd. S. 75) folgt nun allerdings für jene Parallelkreise, für welche $\sin^2 \varphi = \frac{1}{3}$, $\varphi = 35^{\circ} 16'$ ist, eine gewisse Bedeutung, aber keineswegs diejenige einer Unstetigkeit. Wie man sieht, werden für diese Breite Potential und Schwerkraft unabhängig von K , das heißt von der Massenverteilung im Innern der Erde; der von der Fliehkraft abhängige Teil ist der mit dem Faktor ω^2 behaftete.

Auch aus der Bedeutung dieser Parallelkreise für die Luftbewegung läßt sich die Folgerung Simroths nicht rechtfertigen. Es folgt ja für die Geschwindigkeit der Luftbewegung in der Breite φ

$$\text{nach der Theorie von Dove-Siemens } v = r \omega \left(\sqrt{\frac{1}{3}} - \cos \varphi \right)$$

$$\text{nach der Theorie von Ferrel } v = r \omega \frac{2 - 3 \cos \varphi^2}{3 \cos \varphi}$$

Für beide ergibt sich für $\varphi = 35^{\circ} 16'$ die Geschwindigkeit $v = 0$: aber von einer Unstetigkeit kann auch hier keine Rede sein.

großen Wert dieser Verschiebung erhalten, wenn man die durch eine Kraft P bewirkten Änderungen gegenüber denjenigen einer frei beweglichen Flüssigkeit proportional ($P:F$) setzt; dann wären aber die Deformationen der festen Erdrinde etwa 0·01 derjenigen einer flüssigen Erde¹⁾.

Die Quantität der Sedimentablagerung ist lokal verschieden, und mit der Zeit anwachsend, so daß schließlich für einzelne Orte $Q > P_1 + F$ werden kann und andererseits kann unter Umständen (durch die Verwitterung) der Betrag von F plötzlich bedeutend sinken. Ebenso kann es vorkommen, daß durch ähnliche Verhältnisse $P_1 > Q + F$ werden wird. Hieraus folgt, daß eine Überschreitung des inneren Druckes über einen gewissen Betrag (100 Atmosphären vielleicht selbst nur 50 oder 20 Atmosphären) meist schon mit Eruptionen verbunden sein wird und man daher der Expansivkraft von Gasmassen im Innern der Erde kaum einen höheren Betrag wird zuschreiben können.

Etwas anders gestalten sich die Verhältnisse bei Eisablagerungen. Hier tritt unter der Eisdecke Abkühlung und Kontraktion ein, daher nachfolgend Erwärmung und Hebung beim Abschmelzen der Eisdecke. Hier hat man es mit zwei Kräften zu tun, die sich summieren; denn die Vereisung wird infolge der Massenanhäufung Kontraktion sowohl durch Druck als durch Abkühlung erzeugen, das Abschmelzen Hebung sowohl durch Verschwinden des Druckes, als durch Erwärmung. E. v. Drygalsky²⁾ sieht eine Bestätigung dieser Ansicht in der Tatsache, daß die höchsten Meeresspuren an den Grenzen der Gletscherfelder sichtbar sind.

Die durch angesammelte Eismassen bewirkten Drucke sind nun aber auch³⁾ von ganz anderer Ordnung, wie die durch Sedimentablagerung auftretenden. Für eine Eisdecke von 100 m Höhe wird $Q = 9 \text{ kg}$; wenn daher die polare Eiskalotte von einer Mächtigkeit von 2000 m angenommen wird, so würde dies einem Drucke von 180 kg pro cm^2 entsprechen, ein Betrag, welchem der Sandstein nicht mehr zu widerstehen vermöchte und selbst die widerstandsfähigen Urgebirgsmassen, deren Vorhandensein in großen Tiefen vorausgesetzt werden muß, können Deformationen erleiden, deren Betrag jedenfalls bei der Betrachtung des Einflusses auf die Figur der Erde nicht übergangen werden darf.

Hebungen und Senkungen in einem relativ geringfügigen Umfange sind aus historischen Zeiten konstatierbar und kommen noch jetzt vor. Hebungen des Festlandes können konstatiert werden durch sogenannte Strandlinien und Strandterrassen, welche als deutlich ausgeprägte Marken der einstigen Bespülung der Küste mit Meerwasser, Wirkung der Brandung, Ablagerung von Meeressedimenten in einer Höhe weit über dem Meeresspiegel auftreten. Man findet sie in weiter Verbreitung über der ganzen Erde. Senkungen des Festlandes, Hebungen des Meeresspiegels sind schwerer zu konstatieren. In den Tropen hat man solche durch das Vorhandensein von Korallenstöcken

¹⁾ So daß dieser Betrag bei der Berechnung der Transgressionen der Meere übergangen werden kann.

²⁾ „Geoiddeformationen der Eiszeit“; Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin, 22. Bd. 1887, S. 169.

³⁾ S. das 4. Kapitel.

bis zu großer Tiefe konstatieren können. Da diese Stöcke von Lebewesen aufgebaut werden, die nachweislich nur in geringer Tiefe, etwa bis 40 *m* unter dem Meeresspiegel leben können, so deutet das Vorhandensein solcher Stöcke, ganzer Korallenriffe, Koralleninseln (Atolls) darauf, daß die fertigen Stöcke immer tiefer und tiefer gesunken und sich stets unter dem Meeresspiegel durch Zubau ergänzt haben. An einzelnen Küstenstrichen sind die Senkungen übrigens nachweisbar durch das Überfluten von bebautem und bewohntem Lande durch Wasser.

Senkungen sind festgestellt: an der Westküste von Frankreich, Spanien, Tripolis, Tunis, am Nildelta; in Ostsibirien, China, Hinterindien; die Koralleninseln des pazifischen Ozeans; an der Ostküste von Nordamerika südlich von Maine; an einzelnen Strecken der Westküste von Nordamerika.

Hebungsgebiete sind: Skandinavien, Grönland, die Arktis, die Nordküste von Rußland, Westsibirien, Sizilien und Sardinien, Marokko, Arabien, das rote Meer, der persische Meerbusen, Japan; Südostaustralien; das Kapland; die Hudsonsbai und der nördliche Teil von Neu-Fundland; Brasilien, Argentinien, die ganze Westküste von Südamerika.

Einige spezielle Fälle von besonderem Interesse mögen besonders angeführt werden:

Für den Kaspisee nimmt Brückner die Höhe des Spiegels in der Diluvialzeit 50 bis 60 *m* höher als jetzt, also 14 bis 24 *m* über dem schwarzen Meere.¹⁾

Bemerkenswert ist die fortwährende sekulare Hebung von Skandinavien, gegen das Innere zu ansteigend, und in der Achse der Halbinsel den größten Wert erreichend, während die gegenüber befindliche Küste von Deutschland in einem Stadium fast vollkommener Ruhe sich befindet.

Ähnliches gilt von der Küste des schwarzen Meeres, während das benachbarte jonische und ägäische Meer beträchtlichen Störungen in historischen Zeiten ausgesetzt war, worauf manche Beschreibungen von Konfigurationen des griechischen Festlandes und der griechischen Meere zu den Zeiten der Perserkriege, verglichen mit deren gegenwärtigen Konfigurationen, hindeuten.

In Amerika erheben sich die Strandlinien im Süden von Neu-England 3—8 *m* über dem jetzigen Meeresniveau, auf der Insel Nantucket südlich von Boston 27 *m*, an der Küste von Maine 65 *m*, am Champlainsee 100 *m*, an den Ufern des Lorenzostromes 140 *m*, noch höher an der Küste von Labrador und am höchsten auf den Cornwallis- und Beechy-Inseln.

Hebungs- und Senkungsgebiete stoßen oft dicht aneinander, wechseln streckenweise ab, z. B. an der Nordküste von Afrika. An einzelnen Stellen hat man Zeichen oszillatorischer Bewegung, wiederholte abwechselnde Hebung und Senkung konstatiert; so in Neapel,²⁾ am adriatischen Meere; gegenwärtig werden immer mehr und mehr solcher Erscheinungen bekannt; eine Zusammenstellung derselben siehe Wagners geogr. Jahrbuch für 1907, S. 19.

Insbesondere möchte ich die Hebung der Insel Capri erwähnen, auf welche auch M. W. Meyer hindeutet. Es gibt dies eine sehr wahrscheinliche Er-

¹⁾ Klimaschwankungen, S. 299.

²⁾ Die bekannte Erscheinung am Serapistempel bei Puzzuoli, siehe Goethes Werke, Cotta'sche Ausgabe, Bd. 40, S. 221.

klärung dafür, daß die blaue Grotte auf Capri früher nicht erwähnt wurde. Sie wurde 1826 von Maler Kopisch entdeckt. Meyer sagt hierüber: „Es ist gar kein Zweifel darüber, daß man im Altertum in dieser Grotte gebadet hat, sowie in so vielen anderen an den Ufern von Capri; dennoch aber erwähnt kein Schriftsteller des Altertums dieses Naturwunder. Bedenkt man, daß hier Augustus und Tiberius wohnten, und namentlich die Orgien des letzteren in ausführlichen Beschreibungen auf uns gekommen sind, so muß man es für unmöglich erklären, daß diese Berichte nicht auch den Zauber der blauen Grotte geschildert hätten. Wie ist dieses zusammenzureimen? Die Grotte war vorhanden, aber es war nicht die blaue Grotte . . . das Meer muß damals tiefer gestanden haben, und zwar um 5 bis 6 m, das Licht konnte frei eindringen, wie in all die anderen Grotten; ihr Zauber war verschwunden.“¹⁾

Man kann diese Hebungen und Senkungen durch eine Beweglichkeit des Meeresspiegels oder durch eine Fluktuation des Gesamtmeeresniveaus, das ist etwa durch eine Umstellung der Erdachse erklären, und E. Sueß hat daher den Namen „negative Strandverschiebungen“ (Verkürzung des Halbmessers der Hydrosphäre) für das Sinken des Meeresspiegels, für den Landgewinn, und „positive Strandverschiebungen“ (Verlängerung des Halbmessers der Hydrosphäre) für das Heben des Meeresspiegels, den Landverlust gewählt. Allein schon der Umstand, daß selbst benachbarte Küstenstriche entgegengesetzte Bewegung zeigen, deutet darauf, daß die bloße Flutung des Meeres nicht alle Erscheinungen zu erklären vermag, und daß tatsächliche Hebungen und Senkungen des Festlandes zur Erklärung herangezogen werden müssen.

Daß das Wasser aber zu Zeiten ganze Strecken der Kontinente überflutet hat, ist aus dem Vorkommen mariner Ablagerungen in der Mitte der Kontinente nachgewiesen, und diese Überflutungen, von Ed. Sueß „Transgressionen der Meere“ genannt, lassen sich wohl am leichtesten durch eine Flutung des Gesamtmeeres, der Hydrosphäre erklären. Als Ursache für dieselbe deutet E. Sueß die Möglichkeit einer Veränderlichkeit der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde an. Eine solche Transgression wird zum Beispiel in der zweiten Epoche der Trias angenommen, wo die Periode des Buntsandsteines dem freiliegenden Festland, der Muschelkalk einer Invasion des Meeres und der Keuper wieder dem Rückzug des Meeres mit Freilegung des Festlandes zugeschrieben wird.

Immerhin sind die Erscheinungen derart, daß die Transgressionen einer mittleren Hebung und Senkung des Wassers entsprechen, von welchen sich aber zahlreiche Abweichungen als Hebungen und Senkungen des Festlandes finden.²⁾

¹⁾ M. W. Meyer: Vom Himmel und der Erde. S. 187/8.

²⁾ Zur Konstatierung von Hebungen und Senkungen schlägt Uhlig (Erdgeschichte S. 388) Präzisionsnivelements z. B. alle 100 Jahre vor. Zu bemerken ist übrigens, daß Hebungen und Senkungen, wenn sie regional sind, auch die gegenseitige Lage der trigonometrischen Punkte beeinflussen müssen. Daraus folgt, daß trigonometrische Messungen möglichst synchron vorgenommen und abgeschlossen werden sollen. In der Tat wurden auch bereits Veränderungen in der Lage trigonometrischer Punkte durch Verwerfungen nach dem großen indischen Beben 12. Juni 1897 beobachtet.

II. Kapitel.

Die Gletscher.

Der Niederschlag in der Hochgebirgsregion ist infolge der daselbst herrschenden niedrigen Temperatur Schnee. Die Schneegrenze, Schneelinie oder Firnlinie, das ist die Höhe, in welcher der Schnee liegen bleibt, hängt von der geographischen Breite und Lage des Ortes ab, ist aber auch von lokalen Umständen stark beeinflusst.

Der frisch gefallene oder „Neuschnee“ ist nicht wesentlich verschieden von dem gleichen Niederschlag im Tale bei großer Kälte. Er ist staubförmig und trocken. Durch die dauernde Belastung der darüberliegenden Massen schmilzt er zusammen, wird immer härter und kompakter in Form von haselnußgroßen und noch größeren Körnern, sammelt sich in den Mulden und Hochplateaus an, und bildet dort das Gletschereis. Dort, wo namentlich in der Mittagszeit ein fortwährendes teilweises Abschmelzen längs der ganzen Oberfläche stattfindet, kommt auch Glatteis vor.

Die höchst gelegenen Teile der Gletscher sind von undurchsichtigem, zusammengesickertem Hochschnee, dem Firn bedeckt und werden als der „ernährende Teil“, das Sammelbecken oder Firnfeld (franz.: névé) bezeichnet. Sowohl die Neigung der Hochfläche als auch der Druck der Eismassen bringt die tieferliegenden Teile in Bewegung; an einzelnen Stellen findet Schmelzung statt; es entstehen feine Risse, die sich zu Gletscherspalten erweitern, in denen ein Teil des Schmelzwassers abfließt. Die zum Schmelzen nötige Wärme wird der Umgebung wieder entzogen und es tritt wieder Zusammenfrieren, Regelation ein. Durch diese lokale Schmelzung zerfällt das Gletschereis in Bruchstücke, die Gletscherkörner, welche sich talwärts bewegen; dadurch gerät der Gletscher in eine abwärts gerichtete Bewegung: er strömt. Hierbei nimmt er Gesteinstrümmen, Gerölle von dem Untergrunde, auf welchem er strömt und auf seinem Rücken selbst größere auf ihn gefallene Felsblöcke mit und lagert sie als Moränen ab. Die am Grunde abgelagerten bilden die Grundmoräne, die seitlich niedergelegten die Seitenmoränen; bei dem Zusammenfließen zweier Gletscher vereinigen sich deren Seitenmoränen und bilden eine Mittelmoräne. In einer gewissen tiefen Region angelangt, schmilzt der untere Teil, die Gletscherzunge vollständig ab; hier hört der Transport des Materiales durch den Gletscher auf, die Gesteinsmassen häufen sich zur Stirn- oder Endmoräne

an, die mitunter ganz ansehnliche Dimensionen erreicht. Nur ein Teil des Materiales wird durch den Gletscherbach noch weiter geführt und bildet Schotterablagerungen von verschiedener Mächtigkeit.

Die Gletscher und Gletscherbäche können so Material in weit entlegene Gebiete führen, wo dasselbe als ortsfremdes Material, größere Felsblöcke als erratische Blöcke bezeichnet, auftritt, von denen Trümmerhaufen und zusammengekittetes Gestein von demselben Orte, als Breccien und Nagelfluh (engl. cemented gravel) wohl zu unterscheiden sind.

Wenn auch schon am Firnfeld Abschmelzen stattfindet, so wird das eigentliche Abschmelzen, die Ablation erst in den tiefer gelegenen Partien erfolgen. Die Ursachen der Ablation sind sehr mannigfaltig: Reibung am Boden und innere Reibung der Eismassen, höhere Temperatur des durch das Eis selbst vor Ausstrahlung geschützten Erdbodens, die Sonnenstrahlung, welche in den höheren Luftschichten infolge der geringen Absorption ausgiebiger wirkt. Uhlig führt auch die in der Schweiz landläufige Ansicht an¹⁾: „Der liebe Gott und die goldene Sonne vermögen nichts gegen den Schnee, wenn der Föhn nicht kommt.“ Doch bezieht sich dieser Ausspruch wohl hauptsächlich auf den Talschnee; denn der Föhn ist wohl im Tal, nicht aber in der Gletscherregion ein warmer Wind; er wird warm durch Kompression in den unteren Luftschichten. Er vermag wohl abgeschmolzene Schnee- und Eismassen (Lawinen) talwärts zu befördern, sie abzuschmelzen vermag er nicht.

Man unterscheidet Gletscher, welche an den Hängen in den hochgelegenen Teilen der Bergstöcke bleiben und nicht tief herabreichen als Hängegletscher, von den tief in die Talmulden herabreichenden, meist viel größeren Gletschern, den Talgletschern.

Das Verhältnis der Oberfläche von Firnfeld und Gletscherstrom ist sehr verschieden; für die Alpengletscher ist nach Heim²⁾ das Verhältnis der Abschmelzungsfläche zum Sammelbecken: für die Ortlergruppe 3·7 : 1, Tauern 3·8 : 1, Obergrindelwald 4·8 : 1, Aletschgletscher 3·4 : 1, Gornergletscher 2·45 : 1, Oberaargletscher 1·81 : 1, Unteraargletscher 1·35 : 1; im Mittel dürfte das Firnfeld ein Drittel der Fläche des Gesamtgletschers betragen. Wo der Niederschlag als Schnee sich über ausgedehntere Regionen erstreckt, in den arktischen und den diesen naheliegenden Regionen wird das Firnfeld größer. Am Folgefond in Norwegen entfällt bei 250 *km*² Gesamtoberfläche etwa 200 *km*² auf das Firnfeld; in den Polargegenden (Grönland) wird das Firnfeld zu einer unübersehbaren Eisdecke, welche als Inlandseis das Land unter sich begräbt.

Die Gletscherbewegung ist schon seit 1700 bekannt und wird seit 1841, zuerst von Agassiz, durch Messungen verfolgt. Die erste theoretische Arbeit rührt von Rendu, Bischof von Anncey her, der in seiner, in den Memoiren der Pariser Akademie veröffentlichten Schrift „Théorie des glaciers de la Savoie“ bereits die wesentlichsten Gesichtspunkte auseinandersetzt.

¹⁾ Erdgeschichte, I. Bd. S. 545.

²⁾ Gletscherkunde S. 264.

Die Geschwindigkeit der Gletscherbewegung ist eine sehr verschiedene und hängt selbstverständlich vom Gefälle ab. Sie kann pro Stunde 1 bis 2 *cm*, auch 3 *cm* betragen; doch schwanken die Werte außerordentlich. Der Vernagtgletscher hat bei einer Neigung von 17 bis 24° eine Geschwindigkeit von 9 *m* in 24 Stunden, das ist zirka 37 *cm* pro Stunde, ein für Alpengletscher außerordentlich hoher Betrag,¹⁾ der nur durch einige grönländische Gletscher übertroffen wird. Die größte Geschwindigkeit der skandinavischen Gletscher gibt Ch. Rabot²⁾ zu 18 *cm* pro Tag (nämlich 4·2 *m* vom 28. Juni bis 20. August 1897 auf dem Mikajökel im schwedischen Lappland), eine recht bescheidene Größe. Wesentlich größere Geschwindigkeiten maß E. v. Drygalsky.³⁾ Er fand durch Beobachtung von Bambusstangen, die in Bohrlöchern eingesenkt wurden, am Sermiarsutgletscher in 24 Stunden 10 *cm* bis 40 *cm*; gegen das Innere des Landes wurde die Geschwindigkeit geringer, gegen das Ende wächst sie, wahrscheinlich infolge des Fehlens des Gegendruckes. Die Geschwindigkeit ist aber nicht längs der ganzen Breite die gleiche; sie war an der rechten Seitenmoräne 0·7 *cm*, an der rechten Mittelmoräne 6 *cm*, an der linken Mittelmoräne 8·1 *cm*.⁴⁾ Der Sermiarsutgletscher ist ein Küstengletscher; im großen Karajateisstrom, der vom Inlandseis kommt, beträgt die Geschwindigkeit 6 bis 19 *m* in 24 Stunden⁵⁾ und ebenso im Jakobshavnergletscher 15 bis 22·5 *m* in 24 Stunden.⁶⁾ Die größte Geschwindigkeit wurde nach J. Geikie⁷⁾ von C. Ryder bei dem großen Eisstrom beobachtet, der zur Bai von Augpadlartok herabgeht; sie beträgt über 30 *m* in 24 Stunden. „Die Küstengletscher haben ungefähr dieselbe Geschwindigkeit in einem Jahre, welche der Inlandseisstrom in einem Tage besitzt.“⁸⁾

Auf die Geschwindigkeit der Gletscherbewegung ist daher der durch das Gewicht der Eismassen auf die darunter und tiefer liegenden Schichten ausgeübte Druck von wesentlichem Einfluß. Bei sehr hohen Drucken verhalten sich nämlich selbst feste Körper, Ton, Blei, selbst Eisen, wie zähflüssige plastische Massen. Versuche von Spring⁹⁾ und Kieck mit Metallpulvern verschiedener Metalle (Blei, Wismuth, Zinn, Zink, Aluminium, Kupfer, Antimon, Platin) haben gezeigt, daß dieselben unter Drucken von 2000 bis 6000 Atmosphären sich zu einheitlichen Massen mit teilweise kristallinischem Gefüge vereinigen; anderseits verhielten sich Marmorblöcke so hohen Drucken gegenüber wie plastische Massen. Auch hier mögen durch die Kompression und Deformation unter hohen Drucken (äußere und innere Reibung) erzeugten Temperaturänderungen eine gewisse Rolle spielen: Zerbrechen und Zusammen-

1) Heim, l. c. S. 67.

2) Les variations des longueurs des glaciers, 1900, S. 150.

3) Grönlandexpedition der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin, 1891—93, S. 210.

4) l. c. S. 352.

5) Ibidem. S. 270.

6) Heim, l. c. S. 145.

7) „The great ice age.“ S. 37.

8) E. v. Drygalsky, l. c. S. 361.

9) Spring, Bulletin de l'academie royal de Belgique, Ser. II, Bd. 49, S. 322.

schweißen. Unter dem Mikroskop fand Gumbel die innere Struktur derartiger Massen wie zu einem feinen Staub zermalmt und wieder zusammengekittet, eine Art Kataklas- und Microbreccienstruktur.¹⁾ Der Druck, bei welchem diese Umformung stattfindet, wird von Willis und Hayes zu 800 bis 2400 Atmosphären angegeben.²⁾

Neuere Untersuchungen rühren von Tamann³⁾ und A. v. Obermayer⁴⁾ her; v. Obermayer verwendete dabei Drucke bis zu 390 Atmosphären.

Wenn auch der für ähnliche Umformungen des Eises notwendige Druck wesentlich kleiner sein sollte, so bleibt es immerhin außerordentlich fraglich, ob selbst die größten in der Natur auftretenden Drucke mit den hier erforderlichen vergleichbar sind. Wenn man die Ausbildung und Umwandlung des Gletscherkornes, d. i. die Ausbildung von Eisstücken verschiedener Größe durch Entstehen von Zwischenräumen infolge von Schmelzung und deren Wiedervereinigung durch Regelation mit der plastischen Umformung identifizieren will, dann allerdings kann man diese Bezeichnung auch für die Eisbewegung gelten lassen; es ist aber vielleicht besser, hier wie auch in jenen Fällen, wo bei hohen Drucken ein Zertrümmern und wieder Zusammenschweißen stattfindet, nicht von plastischer Umformung zu sprechen, da dieses Wort in seiner ursprünglichen Bedeutung ein Fließen ohne Trennung der Teile bedeutet,⁵⁾ und eventuell die Bewegung des Eises durch Schmelzen und Regelation als pseudoplastische Umformung zu bezeichnen. Zu dieser Art der Bewegungen des Eises gehören nun allerdings keine allzu großen Drucke; Heim berichtet, daß er die Versuche von Tyndall und Helmholtz an einer kleinen hydraulischen Presse mit 6 Atmosphären Druck gemacht hat.⁶⁾

Daß in der Tat diese Auffassung die richtige ist, zeigt auch die Tatsache, daß die Geschwindigkeit der Gletscherbewegung, die „Beweglichkeit“ der Gletscher im Winter eine wesentlich kleinere ist, als im Sommer. Heim⁷⁾ gibt für das Verhältnis der Geschwindigkeiten im Sommer und Winter:

¹⁾ Uhlig, Erdgeschichte, I. Bd., S. 350.

²⁾ 11.000 bis 34.000 englische Pfund auf den Quadratzoll. Penck rechnet für die Mächtigkeit der glazialen Eismassen von 1200 bis 1300 m den Druck 1·1 bis 1·2 Millionen kg pro m². Bemerkenswert ist übrigens, daß die Druckfestigkeit des Eises keine so hohe ist; es ist die Zugfestigkeit bei 0°: 7 bis 8 kg pro cm², die Druckfestigkeit 21·6 kg pro cm². „Eine Eissäule von 216 m Höhe würde ihren eigenen Fuß durch ihre Last zerquetschen“, bemerkt Heim (l. c. S. 287).

³⁾ „Kristallisieren und Schmelzen, ein Beitrag zur Lehre von den Änderungen des Aggregatzustandes.“

⁴⁾ A. v. Obermayer, „Versuche über den Ausfluß fester Körper, insbesondere des Eises unter hohem Druck“, Sitzungsbericht der Wiener Akademie, Bd. 113, II. Abt., S. 511.

⁵⁾ Nach Heim zerfallen die schwerflüssigen Massen in a) zähflüssige (viskose) bei denen die Kohäsion größer, als die innere Reibung ist; auf Druck weichen sie plastisch aus, auf Zug aber verengen sie den Querschnitt bevor sie reißen; sie ziehen Fäden; b) die dickflüssigen, die auf Druck plastisch ausweichen, sich aber gegen Zug spröde zeigen; sie zerreißen ohne vorherige Querschnittsänderung; diese Unterscheidung nimmt auch Obermayer (l. c. S. 516) an.

⁶⁾ l. c. S. 324.

⁷⁾ l. c. S. 176.

Am Mer de Glace: Maximum 1·32 *m* täglich (Juli), Minimum 0·29 *m* täglich (Dezember) = 100 : 22 ¹⁾

Unteraargletscher 0·374 : 0 133 = 100 : 36

Grindelwaldgletscher 100 : 25

Küstengletscher in Grönland 0·300 : 0·076 = 100 : 25 (Mittel aus 6 Gletschern)

Inlandseisströme 100 : 75

und er zieht daraus den Schluß, daß der Einfluß der Jahreszeit umso geringer wird 1. je gewaltiger der Gletscher und 2. je stärker das Gefälle ist. In beiden Fällen ist der Druck der Gletschermasse erhöht.

Die Geschwindigkeit der Gletscher ist an den Seiten stets kleiner, als in der Mittellinie, aber auch in den verschiedenen Teilen von oben nach abwärts verschieden.²⁾ Schon aus seinen Messungen 1841 bis 1846 fand Agassiz, daß die Geschwindigkeit am Finsteraargletscher am oberen Ende 9 *cm*, 1500 *m* vom unteren Ende aber 20 *cm* ist (sämtliche Geschwindigkeiten pro Tag). Am Unteraargletscher fand er die Geschwindigkeit in der Mitte am schnellsten: am oberen Ende 8·1. in der Mitte (4300 *m* von den Enden) 19·4 *cm*, am unteren Ende 10·5 *cm*, Schlagintweit fand 1847/48 am Hintereisgletscher die Geschwindigkeit am oberen Ende 12·2 *cm*, in der Nähe des Endes 7·7 *cm*, hingegen an der Pasterze die Geschwindigkeit nach unten zunehmend. Forbes, 1842—50 am Mer de Glace: Geschwindigkeit nach unten zunehmend; die größte Geschwindigkeit oberhalb des Eissturzes, mit dem der Gletscher endet. Grad und Dupré 1869 am Aletschgletscher: Am oberen Ende 40·4 *cm*, in der Mitte (7½ *km* von den Enden) 29·4 *cm*, gegen das untere Ende 24 *cm*; Sévé 1868/70 in Norwegen, Geschwindigkeit nach unten zu abnehmend; Gosset und Held 1874/84 am Rhonegletscher, am oberen Teile bis zum Sturz, nach abwärts zunehmend, von da weiter nach unten abnehmend. Steenstrup bei den grönländischen Gletschern gegen das untere Ende zunehmend ohne Vermehrung der Böschung u. z. Itisdliarsukgletscher 4 *km* ober dem Ende 5·0 *m*, an der Abbruchstelle 14·6 *m*; der Karajakbrae 4 *km* ober dem Ende 4·7 *m*, am Ende 10·5 *m*,³⁾ hieraus zieht Heim den Schluß: „Bei Gletschern mit regelmäßigem Talbette von gleichförmiger Böschung finden wir stets dasselbe Verhältnis: Die Geschwindigkeit ist am größten wenig unterhalb der Firnlinie, von hier nimmt sie nach oben und unten ab“; die größere Geschwindigkeit der Grönlandgletscher sucht er auf Verkleinerungen des Querschnittes zurückzuführen.⁴⁾

Der Satz hat sich in dieser Fassung nicht bestätigt gefunden. Im allgemeinen müßte die Geschwindigkeit gegen die Abbruchstelle hin zunehmen, weil der Druck der oberhalb liegenden Eismassen wirkt, und am Ende der

¹⁾ In der Zusammenstellung bei Heim wohl nur irrtümlich 100 : 77 angegeben.

²⁾ Es ist gut für die Bezeichnung des Ortes feste Bezeichnungen einzuführen, und ist im folgenden für die Unterscheidung in vertikaler Richtung: höhere und tiefere Schichten, für die Unterscheidung in horizontaler Richtung obere, mittlere und untere Teile konsequent beibehalten.

³⁾ Heim, Gletscherkunde S. 157.

⁴⁾ Ebenda S. 171.

Gegendruck fehlt. Auch gibt Heim zu: „Die Mächtigkeit des Gletschers ist einer der wichtigsten Faktoren für seine Bewegung und namentlich ist er unter den meisten jetzt vorkommenden Verhältnissen stärker als der Faktor der Neigung des Untergrundes . . . ich bin der Überzeugung daß, wenn wir eine genügend mächtige Masse von Blei auf einen etwas steilen Talboden bringen könnten, durch seine eigene Belastung auch das Blei eine dem Gletscher nachgebildete Bewegung, Spaltung etc. zeigen würde.“

Genauere Untersuchungen hat Drygalsky¹⁾ vorgenommen, und seine Untersuchungen haben manches Licht über die Gletscherbewegung gebracht. Er fand im allgemeinen die Beobachtungen von Steenstrup bestätigt. Die Bewegung des Eisstromes ist umso langsamer, je mehr man sich vom Meere entfernt, und landeinwärts geht; gleiche Querschnitte in der Nähe des Meeres und tiefer landeinwärts werden in gleichen Zeiten von verschiedenen Eismassen passiert, und zwar am Meere von größeren Eismassen. Hierzu ist aber nicht gerade, wie Drygalsky meint eine größere Mächtigkeit im Innern notwendig. Wenn die Eismassen gegen das Innere zu an Mächtigkeit zunehmen, so wird dieses natürlich umso vielmehr der Fall sein; aber selbst dann, wenn die Mächtigkeit des Eises gegen das Innere zu nicht zunimmt, wird doch durch den Druck der oberhalb liegenden Massen, der natürlich um so größer ist, je weiter der betrachtete Punkt abwärts liegt, und den immer mehr abnehmenden Gegendruck von unten, die Geschwindigkeit wachsen müssen²⁾. Immerhin ist es auffällig, daß landeinwärts die Mächtigkeit des Eises, soweit sich dieselbe überhaupt mit einiger Sicherheit bestimmen läßt, kleiner werden soll; auch spricht sich Drygalsky hierüber nicht mit voller Bestimmtheit aus; er sagt: „Indessen liegen Anhaltspunkte vor, daß der Eisstrom gegen das Meer hin mächtiger wird, weil seine Seitenwände gegen das Ende hin immer steiler unter das Eis fallen“³⁾.

Veränderungen in der Geschwindigkeit müssen durch Veränderungen im Querschnitt auftreten. Ist v die mittlere Geschwindigkeit, q der Querschnitt an einer gewissen Stelle, und sind v' , q' diese Größen an einer anderen Stelle, so ist

¹⁾ Grönlandexpedition der Gesellschaft für Erdkunde Berlin, S. 270.

²⁾ Dem Gegendruck des Wassers bei den polaren Eismassen scheint kein allzugroßer Einfluß zuzukommen; wenn auch, wie mitunter angenommen wird, das Kalben der Gletscher (Abbrechen von Eisbergen) durch den Auftrieb erfolgen sollte, so spielt der hierbei auftretende Gegendruck für die Geschwindigkeit doch kaum ein nennenswerte Rolle. Auch für das Kalben spricht Heim demselben jeden Einfluß ab, er sagt: „Wo Flut und Ebbe deutlich sind, kann man oft sehen, daß die Gletscher und das Kalben nicht mit der Flut steigen und nicht mit der Ebbe sinken, daß also der Gletscher an seinem vorderen Ende nicht schwimmt. Der Dovegletscher auf Franz-Josefsland kalbt stets bei eingetretener Ebbe, die Flut hatte ihn unterschmolzen, die Ebbe läßt seinen Vorderrand hohl, er bricht ein.“ (Gletscherkunde S. 177) Hingegen gibt Drygalsky (Grönlandexpedition S. 393 und 520 als Ursache des Kalbens den Auftrieb des Wassers an, wenn der Eisberg seine Basis verliert, d. h. wenn er durch das Wasser von der flachen Unterlage abgehoben wird. Es werden wohl aber beide Einflüsse zusammenwirken; bei Gletschern an Steilküsten mögen die Verhältnisse wie beim Dovegletscher liegen; erstreckt sich die Flachküste weit ins Meer hinaus, so wird wieder das Kalben durch Auftrieb die Regel sein.

³⁾ l. c. S. 271.

$$v q = v' q'$$

denn diese Produkte stellen die in der Zeiteinheit durch die Querschnitte durchgewälzten Eismassen dar, welche natürlich in jedem Querschnitt dieselben sein müssen. (Kontinuitätsgleichung für die Bewegung der Flüssigkeiten.) Beim Gletscher wird diese Gleichung nun allerdings nicht streng erfüllt sein, da sich Spalten (Hohlräume) bilden, doch werden dadurch die Verhältnisse nicht wesentlich geändert.

Die Geschwindigkeit gegen die Tiefe zu muß aber, wenigstens von einer gewissen Stelle an, abnehmen. Betrachtet man die Gletscherbewegung in einem gewissen Querschnitte, so wird von oben nach abwärts zu der Druck der darüber liegenden Eismassen, der dem hydrostatischen Druck der Flüssigkeiten analog ist, nach abwärts zunehmen; da aber am Boden sowie an den Seitenwänden die Reibung am Gletscherbette die Bewegung stark verzögert und dadurch die Bewegung der zunächst angrenzenden Schichten gehindert wird, so wird von einer gewissen Tiefe an bis zum Gletscherboden die Geschwindigkeit abnehmen müssen.

Drygalsky hatte die Geschwindigkeit der oberflächlichen Schichten durch eingesetzte Stangen gemessen; bis zu den Tiefen, bis zu denen dieselben reichten (etwa 1·5 bis 2 m), scheint sich nun überhaupt keine Verschiedenheit in der Geschwindigkeit gezeigt zu haben, da eine solche sich durch eine, wenn auch nur geringe Vor- oder Zurückneigung der Stangen verraten hätte; von einer solchen erwähnt aber Drygalsky nichts.

Die Bewegung der Gletscher erfolgt also so, wie diejenige einer Flüssigkeit in einer Röhre. Die größte Geschwindigkeit hat ein Stromfaden in der Achse (beim Gletscher aber nicht direkt in der Mitte); von da nimmt die Geschwindigkeit der in einer Röhre fließenden Flüssigkeit gegen die Ränder zu ab, wobei die durch den allseitigen gleichmäßigen Druck erzeugte, an allen Punkten des Umfanges gleichartig wirkende Reibung eine gleiche Geschwindigkeitsverminderung erzeugt, während diese beim Gletscher nur nach den Seiten und in die Tiefe zu stattfindet, während die oberflächlichen Schichten nicht durch Reibung gehindert werden.

Nach Drygalsky ist die Geschwindigkeit der oberflächlichen Schichten am größten; sie haben die geringsten relativen Bewegungen gegen die darunter liegenden Schichten, von denen sie passiv getragen werden; ihre wahre Geschwindigkeit ist aber am größten, weil jede untere Schicht ihre Bewegung auf die nächst darüberliegende überträgt¹⁾. Auch Geikie ist dieser Ansicht²⁾.

Auf alle diese Verhältnisse nimmt Finsterwalder³⁾ nicht Rücksicht. Für seine Abhandlung ist wesentlich zu bemerken, daß er die in der Funktionentheorie übliche Terminologie (einfach und mehrfach zusammenhängende Räume, Abbildungen der verschiedenen Querschnitte auf die Abschmelzungszone; Stromlinien u. s. w.) einführt, wodurch die bekannten Tatsachen mit Funktionen-

1) Grönlandsexpedition S. 535.

2) The great Ice age. S. 35.

3) Der Vernagtferner: wissenschaftliche Ergänzungshefte zur Zeitschrift des Deutschen und Österreichischen Alpen-Vereines, I. Bd. 1. Heft 1877.

theoretischen Erörterungen elementarer Natur verbunden werden. Ob auf diesem Wege neue Resultate zu erwarten sind, möchte ich bezweifeln; für denjenigen, der mit der Funktionentheorie vertraut ist, ergibt sich eine recht interessante Deutung der Tatsachen; aber nicht mehr. So folgt das Resultat: Wenn im Firnfeld eine Insel ist, so tritt keine Mittelmoräne auf, ist aber die Insel im Abschmelzungsgebiet, so tritt eine Mittelmoräne auf — doch keineswegs aus der Theorie der mehrfach zusammenhängenden Räume, sondern wesentlich daraus, daß im Firnfeld die vom Grunde abgelösten Geschiebe nicht an die Oberfläche kommen können, weil im Sammelbecken die Vermehrung der Eismassen durch oberflächliche Apposition stattfindet, während im Abschmelzungsgebiete durch die oberflächliche Abschmelzung tieferliegende Schichten mit ihrem mitgeführten Material an die Oberfläche kommen und längs der Nunataker (aus dem Gletschereis hervorstehende Inseln) Seitenmoränen bilden, die sich am unteren Ende derselben zu einer Mittelmoräne vereinigen.

Auch die Gleichung $v_1 : v_2 = dF_2 : dF_1$ ist nichts anderes als die bekannte Kontinuitätsgleichung. Diese bezieht sich selbstverständlich nur auf die Gesamtheit der bewegten Eismassen, und nimmt nicht auf die verschiedenen Geschwindigkeiten in den einzelnen Teilen eines Querschnittes Rücksicht. Die Ausdrucksweise: „Man kann bei schmalen Gletscherzungen von ebenen, zur Gletscherachse senkrechten Querschnitten sprechen, und wenn die Neigung des Gletschers gering ist, diese als normal ansehen“¹⁾ ist jedenfalls inkorrekt; denn die Geschwindigkeiten v_1, v_2 sind nur mittlere Geschwindigkeiten, in den räumlich getrennten, mit dem Gletschereis nicht als zusammenhängend gedachten Querschnitten; und im strömenden Eise wird ein an irgend einer Stelle eben und vertikal geführter Querschnitt eben stets deformiert; über diese Deformationen kann auf rein geometrischem Wege, ohne Betrachtung der wirkenden Kräfte aber natürlich nichts ausgesagt werden.

Über die bei der Gletscherbewegung zu berücksichtigenden Momente gibt zum Teil die Spaltbildung und die Blaublätterstruktur Aufschluß. An jedem Gletscher sieht man Querspalten in der zur Strömungsrichtung senkrechten Richtung, die durch Zerreißen der Eismassen bei der nach abwärts rascher werdenden Bewegung entstehen. Wird dabei die Böschung größer, so kann die Geschwindigkeitszunahme so beträchtlich sein, daß an dieser Stelle eine völlige Trennung, ein Gletscherbruch entsteht. Tritt anderseits der Gletscher aus einer Talenge in eine Talerweiterung, so werden durch das Auseinandertreten der Gletschermassen Längsspalten erscheinen. Randspalten quer zur Gletscherbewegung können dort auftreten, wo die am Rande liegenden Eismassen nur sehr schwach bewegt sind, und die weiter nach innen zu liegenden, von der Strömung erfaßten von den oberhalb liegenden Partien getrennt werden.

Wenn man nach dem Vorschlage von Heim²⁾ quer über den Gletscher in gerader Linie eine Steinreihe legt, oder nach dem Vorgange Drygalsky's Stangen versenkt, so wird man finden, daß dieselben nach abwärts aus der

1) „Der Vernagtferner“, S. 58.

2) l. c. S. 207.

geraden Linie abweichen; die mittleren werden weiter vorrücken als die wandständigen. Durch trigonometrische oder photogrammetrische Aufnahmen kann man den Weg der einzelnen Punkte verfolgen und erhält so Bewegungslinien des Gletschers, welche sehr nahe mit den Stromlinien zusammenfallen, sich von diesen aber dadurch unterscheiden, daß die letzteren nach Maßgabe der oberflächlichen Ablation aus der Tiefe an die Oberfläche treten, d. i. als Bewegungslinien bestimmter Eisteilchen aufzufassen sind. Die gleichzeitige Lage der sämtlichen Fixpunkte in den aufeinanderfolgenden Momenten hingegen gibt Linien, die nahe mit den Niveaulinien (Linien gleichen Druckes) zusammenfallen, und nahe senkrecht zur Richtung der Bewegung, d. i. zur Richtung des Druckes stehen. Die Blaublätterstruktur fällt ebenfalls nahe mit diesen Linien zusammen.

Von geometrischer Regelmäßigkeit kann dabei natürlich keine Rede sein; der Gletscher bewegt sich eben nicht als geometrisches Gebilde, sondern ist physikalischen Gesetzen unterworfen.

Einer der wesentlichsten Faktoren ist, wie schon erwähnt, die Mächtigkeit des Eises; diese ist nun sehr verschieden. Heim gibt für den Jäacobshavnergletscher in Grönland 260 *m*; Drygalsky für den Sermiarsutgletscher auf der Halbinsel Nugsuak (Grönland) an, daß er sicher die Mächtigkeit von 200 *m* nicht erreicht. Beides sind kleinere Randgletscher. Viel mächtiger ist das grönländische Inlandseis. Zwar ist die Höhe der Eisberge keineswegs so groß; Drygalsky gibt für dieselben 80 bis 200 *m*, im Mittel 140 *m*¹⁾ und ebenso sind die Floeberge der antarktischen Region Tafeln von 500 bis 1000 *m* Durchmesser, aber meist nur von 60 bis 70 *m* Höhe.²⁾ Aber für die Dicke des grönländischen Inlandseises in Grönland nimmt Nansen 1700 bis 2000 *m* an³⁾; daß es sich um sehr beträchtliche Dicken handelt, kann jedenfalls auch daraus geschlossen werden, daß keine Obermoränen da sind; es kommt kein Geschiebe vom Boden an die Oberfläche, und nur wo Nunataker sind, liefern diese durch Abbröckelung vereinzelte Blöcke.

Von den verschiedenen Theorien der Gletscherbewegung führt Heim⁴⁾ die folgenden als die wichtigsten an:

I. Theorien, welche noch andere Kräfte als die Schwerkraft voraussetzen.

a) Dilatationstheorie: Das zwischen den entstandenen Spalten eindringende Wasser gefriert, dehnt sich aus, und stößt dabei den ganzen vorangehenden Teil vor. Diese von Joh. Jac. Scheuchzer⁵⁾ 1705 begründete Theorie, der sich auch Charpentier⁶⁾ 1830 und, wenigstens im Anfang seiner Studien Agassiz⁷⁾ anschlossen, wird schon dadurch widerlegt, daß die großen Gletscher-

¹⁾ Grönlandexpedition S. 381.

²⁾ Heim, Gletscherkunde S. 270.

³⁾ Geikie, *The great Ice age*, S. 44. Der Wert, den Stapff annimmt („Niveauschwankungen der Eiszeit.“ Jahrbuch der kgl. preußischen geologischen Landesanstalt und Bergakademie, Berlin 1888) 100 bis 400 *m*, entbehrt jeder Begründung.

⁴⁾ l. c. S. 294.

⁵⁾ *Itinera alpina* IV. S. 287.

⁶⁾ Gilbert's *Annalen*, Bd. 63, S. 388 und *Essai sur les glaciers*. 1841. S. 22.

⁷⁾ *Etudes sur les glaciers* 1842.

spalten kein Wasser führen, die kleinen Spalten aber nur denjenigen Teil vorstoßen würden, der bis zur nächsten größeren Spalte reichen würde, daß aber ferner das Maximum der Bewegung am Abend, beim Eintritt des Gefrierens erfolgen müßte.

b) Das Wachstum der Gletscherkörner. Als Gletscherkorn ist dabei jede durch Schmelzung von der Umgebung abgetrennte Eismasse zu betrachten. Geikie gibt als Größe des Gletscherkornes $\frac{1}{7}$ bis 4 inches (das ist $\frac{1}{2}$ bis 10 cm) an. Durch Anfriren von Niederschlägen und durch Umschmelzen tritt eine Kornvergrößerung, eine Volumszunahme auf. Zu den Anhängern dieser Theorie gehören: Hugi 1843,¹⁾ der als wesentliche Ursache für die Vergrößerung der Körner das Anfriren von Wasserdampf der Luft ansieht; Elie de Beaumont,²⁾ H. Ladame (1842), Nicollet (1844), Bertin (1866) und Gad (1867), welche das Kornwachstum durch Schmelzwasser entstanden annehmen. Noch in neuerer Zeit hat diese Theorie Forel³⁾ wieder aufgenommen; er erklärt das Kornwachstum durch Tau, Regen, Schnee, Schmelzwasser, die entstandenen Veränderungen aber durch Wärme, weshalb er seine Theorie auch die thermische Theorie nennt. (Doch nimmt er außerdem als wirksame Faktoren: Schwere und Regelation, also Plastizität.)

Auch hier gelten im Wesen dieselben Einwände wie für a). Die Rechnungen aber, welche Heim zur Wiederlegung vorführt,⁴⁾ bedürfen einiger Ergänzungen. Als gegebene Daten führt er nach einer für den Aletschgletscher ausgeführten, etwas modifizierten Rechnung an: Oberfläche 10,000.000 m², Volumen der Gletscherzunge $V = 1,200,000.000$ m³, Kornvergrößerung von 6 mm auf 60 mm Durchmesser, daher das Volumsverhältnis 1:1000. Zeit zur gänzlichen Erneuerung der Zunge = (Länge: mittlere Geschwindigkeit) = 200 Jahre; jährliche Ablation: 3 m. Nun wird gerechnet: jährliche Volumszunahme des Kornes = $\sqrt[200]{1000} = 1.05 = 1 + x$; es ist daher die Volumszunahme des Gletschers nach dem ersten Jahre $V + Vx$; nach dem zweiten Jahre kommt $\frac{199}{200} Vx$ dazu, nach dem dritten $\frac{198}{200} Vx \dots$ u. s. w., dann wird die gesamte Oberflächenzunahme in den aufeinanderfolgenden 200 Jahren = 600 Millionen m² angenommen; es ist also die Summe

$$S = V + Vx + \frac{199}{200} Vx \dots + \frac{1}{200} Vx = V + 100 Vx = 7200 \text{ Millionen } m^3,$$

woraus sich für die Ablation jährlich 12 m ergeben müßte, also ein viel zu großer Wert gegenüber dem beobachteten.

Die Rechnung würde sich richtiger folgendermaßen gestalten: Die Kornvergrößerung ist in n Terminen (1 Termin kann auch weniger als ein Jahr sein) auf das a -fache ($a = 1000$) gewachsen; dieses gibt pro Termin $x = \sqrt[n]{a} - 1$.

Da die Ablation in jedem Termine von der jeweiligen ganzen Oberfläche erfolgt, so hat man in jedem Termine von jeder Oberfläche oder summarisch

¹⁾ Die Gletscher, S. 10.

²⁾ Influence du froid extérieur sur la formation des glaciers, 1842.

³⁾ Le grain des glaciers, Arch. des sciences de Genève, 1882.

⁴⁾ Gletscherkunde, S. 303.

die Ablation von der Summe aller Oberflächen zu berechnen. Diese letztere ist aber, weil in jedem Termine der Gletscher um $\frac{1}{n}$ seiner Länge vorrückt, und von dem Anfangsstande im zweiten Jahre nur $\frac{n-1}{n}$, im dritten nur $\frac{n-2}{n}$ der Oberfläche vorhanden ist:

$$\Sigma O = O \left[\frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \right] = \frac{n+1}{2} O \text{ (nahe 1000 Millionen } m^2 \text{).}$$

Durch Zunahme des Gletscherkornes wäre nun das in derselben Weise gerechnete Gesamtvolumen, von welchem die Ablation stattfindet:

Nach dem ersten Termin: $V_1 = V + Vx = V(1+x)$

„ „ zweiten „ $V_2 = V_1 + \frac{n-1}{n} V_1 x = V_1 \left(1 + \frac{n-1}{n} x \right)$

„ „ dritten „ $V_3 = V_2 + \frac{n-2}{n} V_2 x = V_2 \left(1 + \frac{n-2}{n} x \right)$

daher nach dem n^{ten} Termin,

$$V_n = V(1+x) \left(1 + \frac{n-1}{n} x \right) \left(1 + \frac{n-2}{n} x \right) \dots \left(1 + \frac{2}{n} x \right) \left(1 + \frac{1}{n} x \right).$$

Nimmt man hier natürliche Logarithmen, so folgt:

$$\log_n V_n = \log_n V + \log_n (1+x) + \log_n \left(1 + \frac{n-1}{n} x \right) + \dots$$

und in Reihen entwickelt:

$$\log_n V_n = \log_n V + \frac{x}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} - \frac{x^2}{2n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{x^3}{3n^3} \left(\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \right)^2 - \frac{x^4}{4n^4} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} + \frac{x^5}{5n^5} \left(\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \right)^2 \cdot \frac{2n^2+2n-1}{3}$$

und wenn nun die Termine unendlich klein, und die Zahl derselben unendlich groß genommen werden:

$$\log_n V_n = \log_n V + \frac{nx}{2} \left(1 - \frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x^2}{3 \cdot 4} - \frac{x^3}{4 \cdot 5} + \dots \right).$$

Nun ist

$$nx = n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

Setzt man

$$a = \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = e^z$$

so wird

$$nx = z = \log_n a, \quad \lim x = \lim \frac{z}{n} = 0$$

$$V_n = V \cdot \sqrt[n]{a}$$

unabhängig von der Geschwindigkeit der Strömung und nur abhängig von der Kornvergrößerung: ein eigentlich selbstverständliches Resultat.

Ist nun die jährliche Ablation $\delta \times$ Oberfläche, also pro Termin $\frac{m \delta}{n} \times$ Oberfläche (wenn ein Termin der n^{te} Teil von m Jahren ist), so ist die Gesamtablation in den n Terminen

$$\Delta = \frac{m}{n} \delta \cdot \Sigma O = \frac{m \delta}{n} \cdot \frac{n+1}{2} O$$

daher für $n = \infty$

$$\Delta = \frac{1}{2} m \delta O.$$

Da nun diese Ablation das ganze Volumen V_n in den n Terminen aufzehrt (während sich dabei der ganze Gletscher erneuert hat), so ist $\Delta = V_n$ und daher

$$\delta = \frac{2 V \sqrt{a}}{m O}$$

und mit den von Heim angegebenen Zahlen $\delta = 12 \sqrt{10} = 38 m$; eine noch viel größere, ganz unzulässige Zahl.

Die erhaltene Formel kann noch anders geschrieben werden. Da $V : O = D$, die Mächtigkeit des Gletschers bedeutet, so folgt allgemein:

$$\delta m = 2 D \sqrt{a}$$

oder

$$\frac{\sqrt{a}}{m} = \frac{\delta}{2 D}$$

eine allgemeine Beziehung zwischen Mächtigkeit, jährlicher Ablation, Dauer des Durchströmens des Gletschers und Kornvergrößerung, wenn diese allein als Ursache der Gletscherbewegung angesehen wird.

Für $\delta = 3 m$, $D = 120 m$ müßte $m = 2530$ Jahren angenommen werden, um $a = 1000$ zu erhalten, oder für $\delta = 3 m$, $D = 120 m$, $m = 200$ Jahre würde $a = 6 \cdot 25$, $\sqrt[3]{a} = 1 \cdot 842$, das Korn also kaum doppelt so groß.

II. Theorien, welche vorwiegend als bewegende Kraft die Schwere annehmen.

a) Gleitende Bewegung an der schiefen Ebene, 1760 von Altmann und Gruner aufgestellt, 1779 von Saussure ausgebaut und auch nach ihm benannt. Saussure sowie auch Forel (siehe oben) lassen jedoch auch andere Bewegungsursachen zu, sowie auch andererseits, wie die Gletscherspuren (Schliffe, Schrammen) beweisen, jedenfalls gleitende Bewegung mitwirkt.

b) Vorübergehende Verflüssigung. Croll hat 1869 angenommen, daß unter den Einwirkungen der Sonnenstrahlen eine teilweise Verflüssigung des Gletschereises stattfindet, und dadurch momentane Talbewegung erfolgt. Daß diese Theorie nicht den Tatsachen entspringt, ist leicht einzusehen, da die Wirkung der Sonnenstrahlen nicht tief eindringt.

Die Ansicht von Thomson¹⁾, daß die Verflüssigung durch hohen Druck, Eindringen in die benachbarten Lücken Wiederausammenfrieren und Nachgleiten des oberhalb befindlichen Gletscherteiles erfolgt, kann nach dem gegenwärtigen Stande der Gletscherforschung nicht wohl in diese Gruppe gezählt werden, wie dies Heim tut, sondern enthält eigentlich bereits die folgenden Theorien, ziemlich ausgebildet, in sich.

c) Bewegung durch Plastizität oder Halbfüssigkeit des Eises. Diese wurde schon von Bardieu 1750 behauptet, dann von Rendu²⁾ als ein gewisser

1) Transaction of the Royal Society of Edinburgh 1849.

2) Theorie des Glaciers, 1841.

Grad von Duktilität des Eises aufgefaßt und von Forbes¹⁾ und H. Schlagintweit²⁾ direkt als Plastizität angesprochen. Bei dieser Auffassung sind jedoch zwei verschiedene Richtungen zu unterscheiden:

1. Die Annahme, daß die plastische Umformung des Eises ohne Bruch stattfindet von Matthews, Biancini, Pfaff, K. J. v. Steenstrup vertreten.

2. Die Annahme, daß die Umformung durch Bruch und Regelation erfolgt. Diese von Hopkins³⁾ begründete, durch Versuche von Tyndall⁴⁾, Tresca u. a. gestützte Ansicht ist die jetzt fast allgemein angenommene. Sie berücksichtigt einerseits die nachgewiesene Struktur des Gletschereises, das Gletscherkorn als Element des bewegten Eises, sowie auch anderseits die Schwerkraft als treibende Kraft; dabei gerät jedoch nicht die ganze Eismasse als solche in Bewegung, so daß der Reibung am Boden als Gegenkraft nur eine sekundäre Bedeutung zukommt, wie dies bei der Bewegung der Gletscher tatsächlich der Fall sein muß; denn trotz außerordentlicher Reibung, welche die Gletscherschliffe und Schrammen verursacht, findet dennoch Bewegung statt. Endlich berücksichtigt diese Theorie auch die „Plastizität unter relativ niederem Druck“, wie derselbe in den Eismassen der Gletscher auftritt.

Ob dabei das Gletscherkorn eine feste Einheit ist, die Gletscherkörner verwachsen und wieder zerfallen, oder ob in jedem Augenblicke jedes Gletscherkorn neu entsteht, ist eine offene Frage. Heim neigt der ersten Ansicht zu und meint sogar, daß die Regelation von der kristallographischen Orientierung der Eiskristalle abhängig ist und führt Versuche von Bertschinger an, nach denen nur solche Eiskristalle verwachsen, welche mit parallelen Achsen aneinandergesetzt waren, während bei nicht paralleler Orientierung nur teilweise Regelation stattfindet.⁵⁾ Das Eis verhält sich daher im großen und ganzen wie eine übereinandergeschichtete Menge von Körnern, nicht unähnlich einem Sandhaufen, von diesem aber in mancher Beziehung, vor allem durch das wechselnde Verwachsen und Zerfallen der Körner, verschieden; immerhin ist hier wie dort der Druck der aufgeschichteten Massen das wirkende Motiv⁶⁾, weshalb zunächst die wichtigsten Sätze über den Erddruck abgeleitet werden sollen, da sich hieraus manche Berichtigungen von Irrtümern in anderweitigen Ableitungen von selbst ergeben werden.

Bekanntlich wird bei der Verschiebung einer Masse vom Gewichte Q auf einer horizontalen Unterlage die zur Überwindung der Reibung nötige Kraft $P = \alpha Q$ sein, wenn α der Reibungskoeffizient ist, der sich durch $\alpha = \tan \rho$ ausdrücken läßt, wobei ρ der Reibungswinkel genannt wird.

1) Travels in the Alps of Savoy 1843.

2) Untersuchung über Gletscher, 1857.

3) Philosophical Magazine, 1845.

4) Glaciers of the Alps, 1860.

5) l. c. S. 330.

6) Nach Heim (l. c. S. 533) hat zuerst Bernhard Friedrich Kuhn, 1787 „Versuche über den Mechanismus der Gletscher“ in Höpfner's Magazin für Helvetiens Naturkunde diesen Druck als treibendes Agens erklärt. Auch soll er schon alte Moränen richtig gedeutet, und aus denselben auf frühere ungewöhnlich große Ausdehnung der Gletscher geschlossen haben.

Da also

$$\text{tang } \rho = \frac{P}{Q}$$

ist, so folgt, daß der Winkel ρ der Winkel ist, den die Diagonale des Parallelogrammes aus P und Q mit der Richtung des Druckes einschließt (Fig. 4). Ist daher Q gegeben, so erhält man durch Auftragen von $A B = Q$ und ρ gleich dem Reibungswinkel, diejenige Kraft $P = B C$, welche zur Überwindung des Reibungswiderstandes nötig ist. Jede Gerade $A D$, welche mit $A B$ einen kleineren Winkel δ einschließt, wird eine Strecke $B D$ abschneiden, bei welcher noch die Reibung nicht überwunden wird; für jede Strecke $A E$, für welche der Winkel $\delta > \rho$ ist, wird Bewegung auftreten.

Seien nun (Fig. 5) $M N$, $M P$ zwei fixe Flächen, welche die Massenkörper I, II, III von einander trennen. Die Masse III wird einen Druck auf die Trennungsflächen $M N$, $M P$ ausüben, und es wird Gleichgewicht bestehen, wenn der nach abwärts wirkende Druck G der Masse III sich so in die beiden Drucke E und F zerlegt, daß E und F als Komponenten von G erscheinen. Drucke wirken allerdings normal zu den Flächen; allein, zu den Drucken E , F treten noch die Reibungswiderstände; herrscht an der Fläche $M N$ eine Reibung entsprechend dem Winkel ϵ so würde: Normaldruck + Reibung durch eine Kraft E ersetzt werden können, die gegen die Vertikale um einen Winkel ψ geneigt ist, wobei das Gleiten verhindert wäre, so lange $\epsilon < \rho$ ist, wenn ρ den Reibungswinkel an der Fläche $M N$ bedeutet. Ebenso würde an der zweiten Fläche $M P$ das Gleiten verhindert, so lange $\delta < \rho'$ ist. Wenn nun auch das Gleiten an sich durch die Einkeilung zwischen $M N P$ verhindert ist, so geben diese Kräfte E , F das Maß des Widerstandes, und man könnte die Flächen $M N$, $M P$ auch entfernen, wenn statt derselben im Schwerpunkte von $M N P$ die beiden Gegendrucke E , F angebracht würden. Jede dieser Flächen hat demnach einen Druck in der Richtung E beziehungsweise F auszuhalten, dessen Größe sich aus den Gleichungen bestimmt:

$$E : F : G = \sin (F G) : \sin (E G) : \sin (E F)$$

Da nun $(F G) = 180^\circ - \psi'$, $(E G) = 180^\circ - \psi$; $(E F) = \psi + \psi'$ ist, so wird

$$E : F : G = \sin \psi' : \sin \psi : \sin (\psi + \psi').$$

Nunmehr sei $M N$ eine feste Wand, II + III aber eine bewegliche Masse, in welcher durch eine beliebige Fläche $M P$ der Teil III herausgeschnitten wurde. Dabei kann die in dem Raume $M N Q$ befindliche Masse vollkommen frei beweglich sein, z. B. ein Sandhaufen, in welchem die einzelnen Teile nicht durch Kohäsion zusammengehalten werden: die das Gleiten verhindernde Kraft ist dann die innere Reibung; es kann die Masse eine zähflüssige sein, die einen gewissen Grad von Kohäsion hat, so daß das Abgleiten durch innere Reibung + Kohäsion verhindert wird. Der Koeffizient α ist dann nicht der Reibungskoeffizient, sondern eine Funktion der inneren Reibung und der Kohäsion. Ist der Körper absolut fest, so wäre $\alpha = \infty$, $\rho = 90^\circ$; je zäher der Körper ist, desto größer ist daher α und damit ρ .

Für eine gewisse Lage von $M P$ wird sich nun der Teil II völlig passiv verhalten; es wird, wenn die Fläche $M N$ entfernt würde, der Teil $M N P$ ab-

gleiten, während II ungeändert bleibt; eine in dieser Lage befindliche Fläche nennt man die Gleitfläche. Dabei wird, wenn der Teil III abgerutscht ist, sich ein weiterer Teil von II ablösen können, und dieses wird so lange stattfinden, bis die Masse II durch eine Fläche MQ begrenzt ist, welche unter dem Reibungswinkel ρ gegen den Horizont geneigt ist, da erst dann die einzelnen Teilchen die an dieser Fläche anliegen, durch Reibung am Gleiten verhindert werden. Nach dieser Fläche wird sich daher eine frei aufgelagerte bewegliche Masse (Sandhaufen, Lehm usw.) formen. Der Winkel ρ bildet den natürlichen Böschungswinkel, die Fläche MQ die natürliche Böschungsfläche oder Reibungsfläche. Die Lage der Gleitfläche hingegen hängt von der stützenden Fläche MN und dem auf dieselbe ausgeübten Druck ab.

In der Theorie des Erddruckes handelt es sich nun um die Bestimmung der Größe des Druckes E und um die Lage der Gleitfläche.

Da $\psi' + \delta = \varphi$ ist, so wird $\psi' = \varphi - \delta$ und demnach

$$E = G \cdot \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\psi + \varphi - \delta)}.$$

Da ferner $\psi + \varepsilon = i$, gleich dem Neigungswinkel der Fläche MN ist, so wird $\psi = i - \varepsilon$, von dem Werte von ε abhängig sein. Herrscht an dieser Wand überhaupt keine Reibung, so wäre $\varepsilon = 0$; für die Theorie des Erddruckes ist nun die Wahl für ε außerordentlich wichtig,¹⁾ für die gegenwärtige Untersuchung wird über ε später eine Wahl getroffen.

Da

$$\frac{\partial E}{\partial \delta} = -G \frac{\sin \psi}{\sin(\psi + \varphi - \delta)^2}$$

ist, welcher Ausdruck nie Null werden kann, aber, weil $\psi < 90^\circ$, stets negativ ist, so wird mit wachsendem δ der Druck E abnehmen. Der geringste Druck wird ausgeübt werden, wenn für δ sein Maximalwert eingesetzt wird, und dieser ist nach obigem ρ ; der Wert

$$E_0 = \frac{G \sin(\varphi - \rho)}{\sin(\varphi + \psi - \rho)}$$

kann daher jedenfalls als ein Minimalwert des auf die Fläche MN ausgeübten Druckes angesehen werden.

Die Größe dieser Kraft kann leicht konstruktiv gefunden werden. Macht man auf der natürlichen Böschungslinie $MA = G$, und zeichnet AB unter dem Winkel ψ gegen die Böschungslinie, so ist $AB = E_0$, wie leicht durch Auflösung des Dreieckes MAB gefunden wird; Linien AB , welche unter dem Winkel ψ gegen die natürliche Böschungslinie geneigt sind, heißen Stellungslinien.

Die Größe von G ist von der Lage von MP abhängig. Es ist für ein Prisma von der zur Zeichnungsfläche senkrechten Breite b :

$$G = b F s$$

wenn mit F die Fläche des Dreieckes MNP und mit s das spezifische Gewicht

¹⁾ S. hierüber z. B. Heinrich Müller-Breslau, Erddruck auf Stützmauern, Stuttgart 1906.

der Masse bezeichnet wird¹⁾. Ändert man den Winkel φ um $d\varphi$, so wird, wenn $MP = l$ gesetzt wird, die Änderung von G :

$$dG = -\frac{1}{2} b s l^2 d\varphi.$$

Es folgt aber aus dem Werte von E_0 :

$$\frac{dE_0}{d\varphi} = \frac{dG}{d\varphi} \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\psi + \varphi - \delta)} = \frac{G \sin \psi}{\sin(\psi + \varphi - \delta)^2}.$$

Der Druck E wird nun für jene Lage der Gleitfläche, bestimmt durch den Winkel φ , ein Minimum, für welchen $\frac{dE}{d\varphi} = 0$ ist, also für

$$\frac{dG}{d\varphi} = - \frac{G \sin \psi}{\sin(\varphi - \delta) \sin(\psi + \varphi - \delta)}.$$

Das absolute Minimum von E wird hiernach dann stattfinden, wenn gleichzeitig $\delta = \rho$ gesetzt wird also für

$$\frac{dG}{d\varphi} = - \frac{G \sin \psi}{\sin(\varphi - \rho) \sin(\psi + \varphi - \rho)}.$$

Zieht man durch den noch unbekanntem Punkt P die Stellungslinie PR und setzt $MR = x$, $RP = y$, so wird aus dem Dreiecke MRP :

$$\sin(\varphi - \rho) = \frac{y \sin \psi}{l}; \quad \sin(\psi + \varphi - \rho) = \frac{x \sin \psi}{l}$$

und setzt man diese Werte, sowie die Werte für G und $\frac{dG}{d\varphi}$ ein, so erhält man

$$\frac{1}{2} b s l^2 = \frac{b F s l^2}{x y \sin \psi}$$

und daraus

$$F = \frac{1}{2} x y \sin \psi = \text{Fläche des Dreieckes } MPR.$$

Die Gleitlinie hat daher zwischen der Böschungslinie und der Mauer jene Lage, daß die durch P gezogene Stellungslinie aus dem Raume MPQ ein dem Raume MPN gleiches Volumen ausschneidet.

Um nun den Punkt P zu bestimmen, ziehe man die Stellungslinie NU durch N ; Sei $MU = a$, $MQ = c$, $NP = m$, $PQ = n$, so ist

$$c : x = \triangle MPQ : \triangle MPR = \triangle MPQ : \triangle MPN = n : m \\ (c - x) : (x - a) = n : m$$

demnach

$$c : x = (c - x) : (x - a); \quad x = \sqrt{ac}.$$

Sind daher Mauer MN , Böschungslinie MQ (durch den Winkel ρ) und obere Begrenzung NQ gegeben, so wird durch N die Stellungslinie gezogen (bestimmt durch den Winkel ψ , d. h. die innere Reibung und Kohäsion der Masse); die mittlere geometrische Proportionale zwischen MQ und MU bestimmt den

¹⁾ Ist die Oberfläche NQ noch gleichmäßig belastet, u. zw. auf der Flächeneinheit mit dem Gewichte q , so wird, wenn $NP = m$ ist:

$$G = b F s + b m q = b F \left(s + \frac{m q}{F} \right) = b F \left(s + \frac{2 q}{h} \right) = b F s'$$

ebenso wird

$$dG = - \left(\frac{1}{2} b s l^2 d\varphi + b l d\varphi \operatorname{cosec} \omega q \right) = - \frac{1}{2} b l^2 d\varphi \left(s + \frac{2 q}{l \sin \omega} \right) = - \frac{1}{2} b l^2 s' d\varphi$$

Punkt R , mittels dessen durch die Stellungslinie RP der Punkt P , also die Gleitlinie MP bestimmt ist.

Um die Strecke $NP = m$ zu berechnen, hat man, wenn $NU = e$ gesetzt wird:

$$\frac{y}{e} = \frac{c-x}{c-a} = \frac{c-\sqrt{ac}}{c-a} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{1}{1+\eta}; \quad \eta = \sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Nun ist, wenn L die Länge der Mauer MN und i ihre Neigung gegen den Horizont ist:

$$e = \frac{L \sin(i+\rho)}{\sin \phi}; \quad y = \frac{L \sin(i+\rho)}{(1+\eta) \sin \phi}.$$

Ist J der Neigungswinkel der oberen Begrenzungsfläche NQ gegen den Horizont, so ist $QNM = i+J$; damit wird

$$m = \frac{L \sin(i+\varphi)}{\sin(i+\varphi-i-J)} = L \frac{\sin(i+\varphi)}{\sin(\varphi-J)}$$

oder, um den Winkel φ zu eliminieren:

$$m+n = L \frac{\sin(i+\rho)}{\sin(\rho-J)}$$

und

$$\frac{m}{m+n} = \frac{x-a}{c-a} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{\eta}{1+\eta},$$

folglich, wenn die Konstante

$$\frac{\sin(i+\rho)}{1+\eta} = k$$

gesetzt wird:

$$m = \frac{\eta k L}{\sin(\rho-J)}; \quad y = \frac{k L}{\sin \phi}.$$

Hiermit kann nun auch der Druck E_0 leicht berechnet werden. Es ist aus dem Dreiecke MPR :

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \varphi - \rho}{\sin(\phi + \varphi - \rho)}$$

$$E_0 = G \cdot \frac{y}{x} = b F s \cdot \frac{y}{x} = b s \cdot \frac{1}{2} x y \sin \phi \cdot \frac{y}{x} = \frac{1}{2} b s \sin \phi y^2$$

$$E_0 = \frac{1}{2} b s \frac{k^2 L^2}{\sin \phi}.$$

Dieser Druck zerlegt sich in zwei Komponenten, eine vertikale E_v und eine horizontale E_h ; diese sind:

$$\left. \begin{aligned} E_v &= E_0 \cos \phi = \frac{1}{2} b s k^2 L^2 \cot \phi \\ E_h &= E_0 \sin \phi = \frac{1}{2} b s k^2 L^2 \end{aligned} \right\} k = \frac{\sin(i+\rho)}{1+\eta}$$

Dabei ist noch

$$c = \frac{L \sin(i+J)}{\sin(\rho-J)}; \quad a = \frac{L \sin(i+\rho-\phi)}{\sin \phi}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\sin(i+\rho-\phi) \sin(\rho-J)}{\sin(i+J) \sin \phi}}.$$

Spezielle Fälle:

1. Lotrechte Wand, schräges Gelände: $i = 90^\circ$;

$$\eta = \sqrt{\frac{\cos(\rho - \psi) \sin(\rho - J)}{\cos J \sin \psi}}, \quad k = \frac{\cos \rho}{1 + \eta}; \quad m = \frac{\eta}{1 + \eta} L \frac{\cos \rho}{\sin(\rho - J)}.$$

2. Lotrechte Wand, wagrechtes Gelände: $i = 90^\circ, J = 0$;

$$\eta = \sqrt{\frac{\cos(\rho - \psi) \sin \rho}{\sin \psi}}; \quad k = \frac{\cos \rho}{1 + \eta}; \quad m = \frac{\eta}{1 + \eta} L \cot \rho.$$

3. Lotrechte glatte Wand; schräges Gelände; in 1. $\epsilon = 0, \psi = 90^\circ$;

$$\eta = \sqrt{\frac{\sin \rho \sin(\rho - J)}{\cos J}}; \quad k = \frac{\cos \rho}{1 + \eta}; \quad m = \frac{\eta}{1 + \eta} L \frac{\cos \rho}{\sin(\rho - J)}.$$

4. Lotrechte, glatte Wand; wagrechtes Gelände; in 2. $\epsilon = 0, \psi = 90^\circ$;

$$\eta = \sin \rho, \quad k = \tan(45^\circ - \frac{1}{2} \rho)$$

$$m = \frac{\sin \rho}{1 + \sin \rho} L \cot \rho = L \tan(45^\circ - \frac{1}{2} \rho); \quad E_h = \frac{1}{2} b s L^2 \tan(45^\circ - \frac{1}{2} \rho)^2.$$

5. Lotrechte Wand, schräges Gelände, Reibung an der Wand gleich derjenigen an der Gleitfläche; in 1. $\epsilon = \rho, \psi = (90^\circ - \rho)$;

$$\eta = \sqrt{\frac{\sin 2\rho \sin(\rho - J)}{\cos J \cos \rho}} = \sin \rho \sqrt{2 \left(1 - \frac{\tan J}{\tan \rho}\right)}.$$

6. Lotrechte Wand, wagrechtes Gelände, Reibung an der Wand gleich derjenigen an der Gleitfläche; in 5. $J = 0$;

$$\eta = \sqrt{2} \cdot \sin \rho; \quad m = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos \rho}{1 + \sqrt{2} \cdot \sin \rho} L; \quad k = \frac{\cos \rho}{1 + \sqrt{2} \cdot \sin \rho}.$$

Die Ableitung hat aber nur Gültigkeit für $J < \rho$; für $J = \rho$ würde $c = \infty$ und damit $x = \infty$. d. h. Gleitlinie und Böschungslinie fallen zusammen. Wenn $J > \rho$, d. i. NP' die Begrenzung der Masse, so fällt der Schnittpunkt (Q) auf die andere Seite von M ; dann würden die Gleichungen zur Bestimmung von x :

$$c : x = n : m; \quad (c + x) : (x - a) = n : m$$

und es würde $x = \sqrt{-ac}$. Tatsächlich fiel die Gleitlinie unter die Böschungslinie nach MP' . Man hat dann

$$c : x = n : m = (c + x) : (a - x); \quad x = -c \pm \sqrt{c(a + c)}$$

Aber die Formeln werden nicht mehr anwendbar, weil nunmehr nicht der Druck eines begrenzten Keiles, sondern einer nach oben unbegrenzten Masse auf die Wand wirkt.

Auf die Bewegung des Eises angewendet, bedeutet dies, daß die Formeln nur anwendbar sind, so lange die Neigung der Gletscheroberfläche gegen den Horizont kleiner ist, als der Böschungswinkel des Eises. Ein Böschungswinkel ist nun allerdings beim Eise nicht beobachtet, aber man kann für die Bewegung des Eises wohl von einem solchen sprechen, sobald die Drucke so groß werden, daß das Eis fließt. Sind die hiezu nötigen Bedingungen erfüllt, so fließt das Eis über die Böschungslinie, gleitet aber in jedem Punkte nach der Gleitfläche und da es in jedem Punkte eine Gleitfläche gibt, so würden die Stromlinien

in erster Linie den Gleitflächen parallel verlaufen. Ist die Oberfläche des Eises aber nahe parallel der Böschungslinie, so würde, da dann auch die Gleitfläche nahe parallel der Böschungsfäche ist, folgen, daß die Stromlinien nahe parallel der Böschungsfäche verlaufen. Dieses scheint auch in der Natur wenigstens sehr nahe der Fall zu sein; würde die Eisschicht nach aufwärts viel mächtiger werden, so ergäbe sich ein so mächtiger Überdruck, daß die Eismassen wie Wasser fließen würden; daraus ergibt sich eine selbsttätige Regelung dahin, daß die Oberfläche des Eises sehr nahe der Böschungslinie parallel bleibt. Für Eis ist die Böschungslinie, was für Wasser die horizontale Oberfläche.

Der Böschungswinkel ist aber dann beim Eise nicht konstant; je mächtiger die Eismassen, desto geringer muß er sein. Denn der Druck von mächtigen Eismassen bewirkt nach abwärts eine Lösung der Kohäsion und eine Verringerung der Reibung durch Einlagerung von Wasser zwischen die Gletscherkörner. Während also bei Sand-, Lehm-, Tonmassen u. s. w. entweder eine große innere Reibung oder aber eine große innere Kohäsion zwischen den Massenelementen anzunehmen ist, ist bei mächtigen Eismassen keiner der Faktoten von so beträchtlicher Größe, und es wird daher der Böschungswinkel mäßig sein, und man kann dann die Oberfläche des Eises nahe parallel der Böschungsfäche annehmen.¹⁾ Der Einwurf v. Drygalsky's²⁾ gegen die Ableitungen von Stapff³⁾ daß dieser Böschungs- und Gleitfläche nicht trennt, ist daher, obzwar prinzipiell richtig, praktisch in diesem Falle belanglos.

Um nun die Gleichgewichtsbedingung als Grenzfall für die Bewegung des Gletschereises zu erhalten, nimmt Stapff an, daß für die Bewegung der vertikalen Wand MW die Differenz der von den beiden Prismen NMW und WMP (NM und PM die Gleitflächen zu beiden Seiten) ausgeübten Kräfte maßgebend ist. Daraus erhält er mit Berücksichtigung der Reibung f auf der Bodenfläche eine Gleichgewichtsbedingung die für $b = 1$, mit einer kleinen, von Drygalsky angebrachten Korrektur

$$\frac{1}{2} L^2 s \sin J \frac{\cot \rho^2 \sin 2\rho}{(1 + \sin \rho)^2} + 2 L^2 s \cot \rho \sin J = 2 L^2 f \cot \rho \cos J,$$

ist, in welcher die Dicke der Eisschicht herausfällt.

Aus dieser Gleichung, die übrigens nicht vollständig den Formeln für den Erddruck entspricht, folgt

$$\cot J = \frac{1}{f} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\cos \rho^2}{(1 + \sin \rho)^2} \right]$$

so daß er folgert, daß für die Bewegung die Mächtigkeit der Schicht nicht in Betracht kommt⁴⁾. Unter der Voraussetzung, daß der Reibungskoeffizient von

¹⁾ Auch die Oberfläche, da die Oberflächenschichten durch die Bewegung der unteren ihre Lage erhalten. Wäre übrigens $J > \rho$, so würde die Mächtigkeit nach oben zunehmen; ist $J < \rho$ so kann die Mächtigkeit trotzdem nach oben zunehmen (oder aber auch abnehmen) je nach der Neigung des Gletscherbodens.

²⁾ „Zur Frage der Bewegung von Gletschern und Inlandeis“. Neues Jahrbuch für Mineralogie und Geognosie. II. Bd. 1890, S. 170.

³⁾ „Niveauschwankungen der Eiszeit“ Jahrbuch der kgl. preuß. geologischen Landesanstalt und Bergakademie Berlin. 1888.

⁴⁾ l. c. S. 24.

Eis auf glatter Unterlage 0·03 ist (Reibungswinkel 1° 43') und daß der Böschungswinkel für Eis 30° wäre, findet er aus seiner Gleichgewichtsbedingung, daß, wenn das Gefälle des Gletscherbodens 1° 29' ist, eben das Gleiten beginnen kann und hieraus schließt Stapff: „Dieser Winkel ist 14' kleiner als der Reibungswinkel des Eises auf glatter Unterlage, und die Differenz ein Maß für den Anteil, welchen innere Drucke an der Gletscherbewegung haben.“

Daß aus der Gleichung die Höhe der Eisschicht herausfällt und trotzdem der „innere Druck“ einen Einfluß auf die Bewegung hat, ist ein Resultat, welches natürlich auffallen muß. Drygalsky hat hier außer dem schon vorhin erwähnten Einwande hervorgehoben, daß der Schub, den eine vertikale Wand erfährt und den er den Böschungsschub nennt,¹⁾ nicht verwechselt werden dürfe mit dem Schub, den sie ausübt, und daß für die Bestimmung des ersteren ein Integral anzuwenden wäre, wodurch in dem ersten vom Böschungsschub abhängigen Teile L^3 auftreten und L daher nicht wegfallen würde. Allein: die Bildung dieses Integrales könnte doch wohl nicht die dritte Potenz von L ergeben, da sich das Integral ja auf die Länge des Gletschers erstrecken müßte.

Es genügt aber vollständig, die Gleichgewichtsbedingung mit Rücksicht auf Gewicht und Reibung aufzustellen, wie dies Drygalsky tut. Zum Böschungsschub, den er vorerst ebenfalls in der von Stapff angegebenen Form annimmt, $\frac{1}{2} L^2 s \tan J \cot \rho^2 \cdot \frac{\sin 2\rho}{(1 + \sin \rho)^2}$ werden die aus dem Gewichte der Wand entstandenen Widerstände auf der schiefen Ebene hinzugefügt. Das Gewicht der Wand ist (für die Dicke 1) $s L \sec J$, daher die Kraft auf der schiefen Ebene $s L \tan J$ und der Reibungswiderstand $f s L \sec J \cos J$, folglich wird die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{1}{2} L^2 s \tan J \cot \rho^2 \frac{\sin 2\rho}{(1 + \sin \rho)^2} + s L \tan J = s L f$$

woraus sich

$$\cot J = \frac{1}{f} \left\{ 1 + \frac{1}{2} L \cot \rho^2 \frac{\sin 2\rho}{(1 + \sin \rho)^2} \right\} = \frac{1}{f} \left\{ 1 + L \frac{\cos \rho^3}{\sin \rho (1 + \sin \rho)^2} \right\}$$

ergibt. Mit dem von Stapff angegebenen Werte $f = 0\cdot03$ und dem Grenzwerte $J = 1'$ rechnete nun Drygalsky nach dieser Formel für verschiedene Böschungswinkel jene Mächtigkeit, welche noch eine Bewegung erzeugt. Seine Resultate sind:²⁾

$\rho = 0^\circ$	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$L = 0$	10·64	25·58	75·81	176·9	394·1	918·7	2500	9000	75·700	∞

Für $\rho = 30^\circ$ würde also eine Mächtigkeit von 200 m genügen.

v. Drygalsky aber erhebt den weiteren, ganz berechtigten Einwand dagegen, daß der Böschungswinkel des Eises 30° angenommen werde. Dieses kann wohl der Böschungswinkel sein; sobald aber die Mächtigkeit des Eises

¹⁾ l. c. S. 171.

²⁾ Ibid. S. 176.

so groß wird, daß man es mit einer viskosen Masse zu tun hat, ist, wie auch schon oben erwähnt wurde, dieser Wert nicht maßgebend. „Da die Plastizität des Gletschereises eine mit dem Druck wachsende, absolute Verschiebbarkeit der Teilchen ermöglicht, so bleibt als einziger Widerstand, der der Verschiebung entgegenwirkt, nur die innere Reibung“, und indem v. Drygalsky diese zu 0.03 annimmt, folgert er daraus, wie aus der Tafel auch zu ersehen ist, „eine eminente Beweglichkeit des Eises.“¹⁾

Die oben angewendeten Formeln sind aber, wie aus den hier mitgeteilten Ableitungen ersichtlich, nicht richtig; die Differenz der beiden Kräfte wäre unter der Voraussetzung, daß längs der vertikalen Wand keine Reibung stattfindet:

$$\frac{1}{2} b s L^2 \cos \rho^2 \cos J \left[\left\{ \sqrt{\cos J + \sin \rho \sin (\rho - J)} \right\}^{-2} - \left\{ \sqrt{\cos J + \sin \rho \sin (\rho + J)} \right\}^{-2} \right]$$

welche Formel auch Drygalsky zum Schlusse anführt. Auch die Annahme $\rho = 1^\circ 43'$ hält er zum Schlusse nicht aufrecht: man kann für ρ irgend einen Wert annehmen, stets wird sich eine bestimmte Mächtigkeit ergeben, welche die Bewegung bei noch so geringen Neigungen ermöglicht.

Allein die Reibung an der vertikalen Wand ist eben nicht Null, wenn man die Reibung des Eises überhaupt berücksichtigt. Sobald ein Druck von beiden Seiten ausgeübt wird, tritt eine Reibung auf, und man muß die Formeln von Fall 5), S. 67 verwenden, in denen J und ρ sehr nahe gleich sind, überdies ρ einen mäßigen Betrag hat, so daß η sehr klein wird. Es wird dann mit Vernachlässigung von Gliedern zweiter und höherer Ordnung von η :

$$k = \cos \rho (1 - \eta + \eta^2) \\ E_h = \frac{1}{2} b s L^2 \cos \rho^2 (1 - \eta + \eta^2)^2.$$

Den Gegendruck erhält man, indem J negativ gesetzt wird; es wird dann

$$E_h' = \frac{1}{2} b s L^2 \cos \rho^2 (1 - \eta' + \eta'^2)^2 \\ e = E_h - E_h' = b s L^2 \cos \rho^2 (\eta' - \eta)$$

$$\eta = \sin \rho \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{\tan J}{\tan \rho}}; \quad \eta' = \sin \rho \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{\tan J}{\tan \rho}}.$$

Daraus folgt durch Entwicklung der $(\frac{1}{2})^{\text{ten}}$ Potenzen:

$$\eta' - \eta = \sqrt{2} \cos \rho \tan J \\ e = b s L^2 \cos \rho^3 \tan J \sqrt{2}.$$

Dieser Schub wirkt auf ein Wandstück von der Dicke $d\alpha$; es wird daher der Gesamtschub

$$E = \int e d\alpha$$

Setzt man dabei voraus, daß L, b, J konstant sind, so wird

$$E = b s L^2 D \cos \rho^3 \tan J \sqrt{2}$$

wobei D die Dicke der betrachteten Eismasse ist. Das Gewicht dieser Eismasse ist $b s L D$; die Kraft welche auf der schiefen Ebene von der Neigung J hin-

¹⁾ Ibid. S. 179.

zutritt, daher $b s L D \sin J$, die Reibung $f b s L D \cos J$, und daher die Gleichgewichtsbedingung¹⁾, wenn sofort durch $b s L D$ gekürzt wird:

$$L \cos \rho^3 \operatorname{tang} J \sqrt{2} + \sin J = f \cos J.$$

Da nun J stets sehr klein vorausgesetzt werden kann, so kann $\cos J = 1$ gesetzt werden, und es wird

$$\sin J = \frac{f}{1 + L \cos \rho^3 \sqrt{2}}; \quad L = \frac{f - \sin J}{\sin J \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\cos J^3}$$

¹⁾ Für die Bewegung des Gletschers wäre die Kraft e auf den Keil NMP (Fig. 5) bezogen; schneidet man einen ähnlichen Keil $N'M'P'$ heraus, so bleibt auf die vertikale Fläche MM' der Druck der Masse $MM'P'P'$ nach abwärts, derjenige der Massen $MM'NN'$ in entgegengesetzter Richtung; es ist aber der Druck des Keiles $M'N'P'$ für $J = \rho$:

$$e' = \sqrt{2} b s (L - d L)^2 \cos \rho^2 \sin \rho$$

demnach die auf die Fläche $b d L$ wirkende Horizontalkraft

$$X' = e - e' = 2 \sqrt{2} b s L d L \cos \rho^2 \sin \rho$$

und die auf die Flächeneinheit wirkende Kraft $X = 2 \sqrt{2} s L \cos \rho^2 \sin \rho$. Die Differentialgleichungen der Bewegung werden nun in der Euler'schen Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right)$$

wobei für die innere Reibung (vgl. Kirchhoff. Vorlesungen über mathematische Physik; Mechanik S. 165 und 370).

$$X_x = p - 2k \frac{\partial u}{\partial x} \quad Y_z = Z_y = -k \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$Y_y = p - 2k \frac{\partial v}{\partial y} \quad Z_x = X_z = -k \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$Z_z = p - 2k \frac{\partial w}{\partial z} \quad X_y = Y_x = -k \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

ist. Setzt man diese Werte ein und bezeichnet die Operation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = U$$

so werden die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{k}{\mu} \left(\Delta u + \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{k}{\mu} \left(\Delta v + \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{k}{\mu} \left(\Delta w + \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

Die Kontinuitätsgleichung wird hier eine etwas andere als die gewöhnliche Form erhalten. Das ursprüngliche Volumen $V = dx dy dz$ geht in $V_1 = (dx + d^2x) (dy + d^2y) (dz + d^2z)$ über; es ist aber $V_1 - V = \alpha V dt$, wenn α die in der Zeiteinheit stattfindende Ablation bedeutet, die eine Funktion des Ortes und der Zeit sein kann; damit wird, wenn $dx : dt = u$ u. s. w. eingeführt wird:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\alpha = U.$$

Während für inkompressible Flüssigkeiten $\alpha = 0$, für kompressible Flüssigkeiten $\alpha = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}$ ist, ist hier $\alpha = U$ die in der Zeiteinheit stattfindende Ablation.

Für die Integration dieser Gleichungen kann der von Thomson („Dynamical problems regarding Elastic spheroidal Shells and Spheroids of Incompressible Liquid“ Phil. Transact

aus welcher sich J für eine gegebene Mächtigkeit oder diese für eine gegebene Neigung ermitteln läßt. Man sieht aber sofort, daß selbst für eine mäßige Mächtigkeit der Winkel J nicht allzu groß zu sein braucht, um Bewegung des Gletschers zu erzeugen. Für $f = 0.03$, $L = 100 \text{ m}$ wird für

$$\rho = 10^0, 20^0, 30^0 : J = 46'', 53'', 1' 8''.$$

Die Bewegung des Gletschereises findet aber nicht ganz parallel mit der Oberfläche statt; die Strömungslinien heben sich und kommen nach und nach an die Oberfläche, wo die Bewegung infolge der Ablation aufhört. Diese Erscheinung ist auch dadurch bewiesen, daß mitunter Erratika höher gefunden werden, als der Ausgangspunkt liegt, von dem sie kommen. Für jene Fälle, in denen die Niveaudifferenzen der beiden Punkte nicht sehr verschieden sind, kann wohl die Hebung der Stromlinien ausreichen, nicht aber in jenen Fällen, in denen die Differenz eine beträchtliche ist: 100 bis 500 m oder auch mehr. In solchen Fällen muß wohl an Hebungen und Senkungen gedacht werden. Auch Forel ¹⁾ hebt diesen Nichtparallelismus der Stromlinien mit der Oberfläche hervor; doch ist die daraus von Forel gezogene Folgerung, daß die innere Bewegung nicht durch Umbildung der plastischen Masse, sondern durch Gleiten der Schichten aufeinander stattfindet, keineswegs berechtigt.

Der Druck der Gletschermassen auf die Unterlage ist nun jedenfalls ein ganz beträchtlicher, so daß Gerölle vom Gletscherboden abgerissen und mitgeführt wird; anderseits wird aber auch der Gletscherbach große Massen von Gerölle talwärts befördern. Es ist eine nicht leicht zu lösende und viel umstrittene Frage, die Kraft des Eises und des Wassers zu vergleichen.

Bd. 153. 1863) eingeschlagene Weg gewählt werden. Differenziert man die drei Gleichungen der Reihe nach nach x, y, z und addiert, so folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{1}{\mu} \Delta p + \frac{2k}{\mu} \Delta U$$

Haben die Kräfte ein Potential V , so wird die rechte Seite

$$= \Delta \left[V + \frac{1}{\mu} (2kU - p) \right].$$

Für stationäre Strömungen ist $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$; allein Schwierigkeiten machen die drei anderen Glieder links.

Das Integral der Gleichung

$$\Delta \left[V + \frac{1}{\mu} (2kU - p) \right] = 0$$

ist bekanntlich eine Summe von Kugelfunktionen, deren Konstanten so zu bestimmen sind, daß den Zustandsgleichungen der Aufgabe genügt wird. Da V bekannt und ebenfalls nach Kugelfunktionen zu entwickeln ist, so würde damit $(2kU - p)$ bekannt werden; allein in dieser allgemeinen Form ist das Integral nicht angebar. Fourier integriert übrigens die Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \Delta v$$

durch die Substitution

$$v = \varphi(x, t) \cdot \psi(y, t) \cdot \chi(z, t)$$

wodurch sie auf die drei einfacheren wiederholt behandelten Gleichungen zurückgeführt erscheint:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}$$

¹⁾ Archive des sciences physiques et naturelles de Genève. III. Serie Bd. 22. S. 276.

Dollfuß bestimmte den Schlamminhalt des Gletscherbaches in den Alpen für Juli—August gleich $142\text{ g pro } m^3$. Helland¹⁾ fand aus Bestimmungen in Grönland und Norwegen ebenfalls für die Monate Juli—August $148\text{ g pro } m^3$. Dieses gibt pro Tag in $1,150.000\text{ m}^3$ Wasser $163.000\text{ kg} = 60\text{ m}^3$ Gesteinsmasse, folglich mit Rücksicht darauf, daß ein so beträchtlicher Transport doch nur in die Sommermonate fällt, jährlich einen Transport von 6.000 m^3 . Geikie gibt folgende Zahlen für die Gletscher: der Jostedalsbrae führt in einem Sommertage $2.000.000\text{ kg}$ Sediment, im ganzen Jahre $180.000.000\text{ kg}$ nebst $13.000.000\text{ kg}$ gelöster Stoffe, zusammen 69.000 m^3 , entsprechend der Seite eines Würfels von 41 m Seitenlänge; der Vatnajökul in Island führt nach Helland noch viel mehr Geschiebe, nämlich 1677 m^3 in einer Sekunde oder $145.000.000\text{ m}^3$ täglich, daher im Jahre eine Denudation gleich einem Würfel von 176 m Seitenlänge. Nach Fred Svenonius liefert der schmale Gletscher von Norbotten in Schweden in einem Septembertage 68.200 m^3 Wasser mit 7878 kg Sediment, äquivalent mit 3 m^3 Felsen, daher in den 4 Sommermonaten 1454 m^3 Denudation.²⁾

Dem gegenüber steht die Tatsache, daß Wildbäche nach großem Regen in einem Tage mehr Geschiebe führen als der Gletscherbach in einem Jahre. In wenigen Tagen können 1-, 2- selbst $3.000.000\text{ m}^3$ Geschiebe talwärts geführt oder in einen See versenkt werden. Der Geschiebe- und Schlammtransport der Gletscherbäche ist also sehr viel geringer, geradezu verschwindend gegenüber demjenigen der gewöhnlichen Bäche und Flüsse.³⁾

Zur Erläuterung der mitunter ganz gewaltigen verheerenden Wirkungen von Wassermassen braucht man ja nur an die Folgen jeder Überschwemmung zu denken. Allerdings sind die hierbei auftretenden Wassermassen doch von ganz anderer Ordnung als diejenige selbst der gewaltigsten Wild- und Gletscherbäche. Um aber über die Gewalt der letzteren ein Urteil zu gewinnen, möge das folgende von Uhlig⁴⁾ angeführte Beispiel hier einen Platz finden: Am 12. Juli 1892 ergoß sich Wasser aus zwei kleinen Höhlungen am Gletscherende des kleinen Gletschers Tête-rousse samt dem Eise der Gletscherzunge und dem Moränenschutt ins Tal. „Beladen mit Geröllmassen, Felsblöcken und Schlamm gelangte die Lawine mit reißender Geschwindigkeit ins Tal, füllte, sich fortwährend vergrößernd, die Schlucht von Bionnay 35 m hoch an, vergrub den unglücklichen Badeort St. Gervais und ergoß sich endlich bei Le Fayet erschöpft in die Arve. Von der Gewalt der Bewegung gibt die Tatsache eine Vorstellung, daß einzelne fortgeschobene Blöcke bis zu 200 m^3 Inhalt hatten. . . . Die Masse des talwärts gebrachten Materials wurde auf 800.000 m^3 geschätzt.“ Und auch die Entstehung der Riesentöpfe und Strudellöcher (Löcher von beträchtlichem Durchmesser und beträchtlicher Tiefe, oft in großer Zahl geschart, meist in der früheren Glazialregion gelegen) führt Uhlig⁵⁾ auf die erodierende Wirkung des

1) Heim, Gletscherkunde, S. 363.

2) J. Geikie, The great Ice Age, S. 39.

3) Heim, l. c. S. 365.

4) Erdgeschichte, S. 472.

5) l. c. S. 479. Die Tatsache des Auftretens von gekritzten Geschieben wird auch nicht stets als unzweideutiger Beweis angesehen werden können, denn nach Uhlig (l. c. S. 518) liefern auch Murbrüche gekritzte Geschiebe.

Wassers zurück, und jeder, der einmal einen Murbruch (Losreißung von Gesteinsmassen nach Wolkenbrüchen an einem Berghang) zu beobachten Gelegenheit hatte, wird sich überzeugt haben, daß durch solche der Transport von ganz gewaltigen Blöcken erklärt werden kann.

Immerhin führt Heim über die Wirkung des Gletschers als solchen noch einige sehr interessante Daten an. Er sagt, daß im allgemeinen kein Werk von Menschenhand den Gletscher aufzuhalten vermag, daß er Erde, Wiesen aufwühlt, Felsen mitreißt, daß sich aber oft wieder der Gletscher über seine eigenen Moränen hinwegwälzt. „Der Glacier du Tours (Chamounix) rückte 1818 über bewachsenen Weidegrund vor; er ließ den Weidenboden unzerstört. Als er sich 1822 wieder stark zurückzog, trieben die Wurzelstöcke von *Trifolium alpinum*, *Trifolium caespitosum*, *Cerastium latifolium*, wieder Blätter und Blüten; sie waren unzerstört lebensfähig geblieben. . . Im Jahre 1865 kam unter dem im Zurückgehen begriffenen Grindelwaldgletscher ein 150 Jahre verdeckter und vergessener Marmorbruch wieder zum Vorschein; in den behauenen Marmorblöcken, die deutlich geschrammt waren, war aber nirgend mehr als 1 bis 2 mm abgeschliffen worden; überall waren noch die vertieften Spitzmeißelhiebe erhalten.“¹⁾ Hiernach würde in Marmor, der doch nicht zu den härtesten Gesteinen gehört, in 10.000 Jahren kaum 10 cm abgeschliffen werden.

Während nach Penck²⁾ das durch Gebirgsfaltungen präformierte Tal-system durch die sich im Eiszeitalter in die Ebene ergießenden Gletscher erweitert und vertieft und in den Interglazialzeiten durch Flußgeschiebe verschüttet wurden und Heim der Meinung war, daß die Erosion durch das fließende Wasser erfolgt — Heim und Penck sollen seit 1886 ihre Standpunkte wesentlich genähert haben — drückt sich Uhlig³⁾ dahin aus, daß die Entstehung der Talterrassen nicht einheitlich, sondern durch verschiedene Ursachen entstanden ist.

Neuerer Zeit vertritt auch Kilian wieder die Ansicht, daß die Talerosion der Wasserwirkung zuzuschreiben ist. In der Tat erklärt sie die Bildung der Talterrassen viel besser. Kilian nimmt an, daß die eisfreien Täler (im Unterlauf) der Wassererosion ausgesetzt waren, während der obere Teil so lange gegen dieselbe geschützt war, bis sich das Eis auch hier zurückzog.

Natürlich kommt es wesentlich auf die Größe des Druckes an, welcher aber bedingt ist durch die Mächtigkeit der Gletscher. Heim gibt an, daß der Druck des Eises beim Aletsch- und Gornergletscher 2—4 Tonnen, bei den grönländischen Ausläufern des Binneneises 7—8 Tonnen pro dm^2 ist. Wäre der Druck gleich demjenigen einer Flüssigkeitssäule, so ließe er sich aus der Mächtigkeit berechnen. Ist diese in Metern ausgedrückt h , so ist das Volumen einer solchen Säule vom Querschnitt $1 cm^2$ gleich $100 h cm^3$, und da das spezifische Gewicht des Eises $0.9 g$ ist, so würde der Druck $90 h g$ oder $0.09 h$

1) Heim, l. c. S. 355 und 375.

2) Die Alpen im Eiszeitalter. S. 623.

3) Erdgeschichte. S. 516. S. hierzu auch das 11. Kapitel.

kg sein. Bei einer Höhe von 200 m, welche für unsere Alpengletscher vielleicht schon als zu großer Wert gelten kann, würde dieser Druck 18 kg pro cm² also gleich 18 Atmosphären sein.¹⁾

Im Ganzen ist dieser Druck kein übermäßiger. Er vermag wohl die bekannten Schrammen und Kritzen zu erzeugen, aber er reicht wohl kaum aus, jene gewaltigen Erosionen zu erzeugen, welche man den Gletschern zuschreibt. Es ist wohl nur die irrtümliche Auffassung von der Kraftwirkung, die sich nach Tonnen ausdrückt, welche zu den erwähnten Irrtümern Anlaß geben konnte. Heim selbst scheint die Größe der Kraft ganz richtig beurteilt zu haben, wenn er trotz dieser so außerordentlich großen Zahlen schreibt: „Die Zirkus-, Tal- und Fjordbildung durch Gletscher halte ich für eine allzstarke Verkennung der Tatsachen über die Wirkung der verschiedenen Agentien.“²⁾ Er zeigt auch an zahlreichen Beispielen, daß der Gletscher nur schleift, nicht aber beseitigt, und kommt zum Schlusse, „der Gletscher ist im Ganzen viel weniger Abtrenner und Furcher, als vielmehr Umlader und Exportmittel für den Schutt.“

Als Hauptverfechter der Erosion durch den Gletscher trat in neuerer Zeit A. Penck auf. Es ist nun allerdings nicht zu übersehen, daß auch Verwitterungen unter dem Gletscher vorkommen und daß dann das Abbrechen von Stücken wesentlich erleichtert ist, allein die auf diese Weise abgetrennten Stücke sind gegenüber den durch die Wirkung des reißenden Wassers bewirkten Erosionen doch recht geringfügig.

Es darf nicht übersehen werden, daß Wasser so wie Eis nicht so sehr durch den Druck, als durch die kinetische Energie, die lebendige Kraft, Wirkungen auszuüben vermag und ausübt: Ruhiger Druck vermag bewegliche Massen vor sich herzuschieben; zum Abtrennen fester Massen gehört kinetische Energie. Da die lebende Kraft $\frac{1}{2} m v^2$ von der Geschwindigkeit abhängt, so wird, die Geschwindigkeit des Gletscherbaches nur zu 1 m pro Sekunde angenommen,

¹⁾ Es wäre gut, wenn bei diesen Angaben eine einheitliche Bezeichnung angenommen würde, und habe ich hier alle Drucke in kg auf den cm², d. i. in Atmosphären, angegeben. Auch die Druckwirkungen des Wassers wirken oft durch die Angabe von gewaltigen Zahlen besonders imponierend. Für die Brandung des Meeres gibt Uhlig im Bristolkanal: Horizontaldruck 137 kg, Vertikaldruck 11.500 kg auf den m²; bei Civittavechia 16.000 kg, an der nord-schottischen Küste bei starken Stürmen 30.000 kg pro m² (l. c. S. 528). Rechnet man diese Zahlen auf Atmosphären umf ($1 m^2 = 10.000 cm^2$), so erhält man: Bristolkanal: Horizontaldruck 0·0137 Atmosphären; Vertikaldruck 1·15 Atmosphären; Civittavechia 1·6 Atmosphären; Schottische Küste bei Sturm 3·0 Atmosphären. Diese Drucke sind gar nicht so bedeutend und würden bei stetigem ruhigen Druck kaum eine Wirkung ausüben, wie ja auch das ruhende Meerwasser, dessen Druck in der Tiefe viel gewaltiger ist, keine Erosion bewirkt. Es ist die Kraft des bewegten Wassers, dem die zerstörende Kraft zukommt. Nimmt man die Geschwindigkeit der Brandung gleich 10 m pro Sekunde, so kommt jedem kg Wasser eine lebendige Kraft $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot 10^2 = 5 kg$ zu. Dieser in der Richtung der Bewegung, also in horizontaler Richtung ausgeübte Druck verliert sich an der Flachküste in der Reibung auf dem Boden, hat aber immerhin den Erfolg der Anschwemmung von Sand. An der Steilküste äußert er sich in der Gewalt der Brandung, so daß bei der Größe der bewegten Massen dieser hydraulische Druck den hydrostatischen bedeutend überwiegt.

²⁾ l. c. S. 400.

diese gleich 3600 m pro Stunde, also die lebendige Kraft 3600^2 , das ist 10 Millionen Mal größer als die lebendige Kraft eines selbst mit der Geschwindigkeit von 1 m pro Stunde sich bewegenden Gletschers und die Arbeit eines kg Wassers gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot 3600^2 = 50.000\text{ kgm}$ ist noch 250mal größer als die Arbeit, welche ein 200 m mächtiger Gletscher auf dem Wege von 1 m leistet.

Es erlangt dies eine große Bedeutung bei der Frage nach der Entstehung der Täler, Seen und Fjorde. Nach der einen Ansicht wirkt hier das Eis erodierend (de Mortilly, Ramsay, Penck), nach der anderen konservierend, das heißt ausfüllend, die Verschüttung verhütend. (Agassiz, Heim.) Auch hier ist wieder Penck der Hauptverfechter der erodierenden Wirkung des Eises. Allerdings sagt er,¹⁾ daß die erodierende Tätigkeit des Eises nicht dem Eise, sondern dem in das Eis eingebetteten Gestein, welches wie die Zähne einer Feile wirkt, zukommt, und bezüglich der Fjorde bemerkt er, daß bei der Bildung derselben Wasser und Eis gewirkt haben,²⁾ aber von S. 368 bis S. 391 wird die stark erodierende Wirkung des Eises zu beweisen versucht, der auch die Alpenseen ihr Dasein verdanken sollen, indem die Gletscher in deren Becken sich bewegten, deren Boden aushöhlten.

Wenn Penck hier von den Annahmen von Lyell und R. S. Ball behauptet: „Diese Annahmen sind zu wenig ausgearbeitet, um in eine spezielle Diskussion gezogen werden zu können“,³⁾ so wird die Diskussion auf die Dauer doch nicht aus der Welt geschafft.

Hiergegen sind Geikie und Chamberlin wohl als Anhänger der zweiten Richtung zu bezeichnen, wengleich der erstere sich nicht genug dezidiert ausspricht. Die beiden folgenden Aussprüche⁴⁾ sind hiefür die charakteristischsten, aber kaum in Einklang zu bringen. „When glacier ice filled such a fiord it would be strangled in the narrow pass and the motion of the ice advancing from behind would be impeded. Hence there would be a heaping up of the glacier and intensified pressure upon the rocky bed would produce its natural effect, increased erosion“ „The work of erosion probably commenced with the final melting of the ice streams and their névéfields and was carried on during a prolonged interglacial epoch.“ Aber ganz konform mit dem letzteren Ausspruche sagt Chamberlin⁵⁾ von dem „Interval following the East Jowan formation“⁶⁾: „Broad valleys were cut in the older formation“ Die Zeit der Entblößung von Eis war lange genug „to permit a notable change in the configuration and the condition of the lands, the development of capacious valleys, the general carving of the surface into an erosion topographic.“

1) „Die Vergletscherung der deutschen Alpen“, S. 380.

2) Ibid. S. 430.

3) Ibid. S. 418.

4) The great Ice Age SS. 235 und 581.

5) Ibid S. 763.

6) Um des Zusammenhanges willen mußten hier manche Aussprüche über die eiszeitliche Vergletscherung, die erst im 4. Kapitel ihre Erklärung finden können, angeschlossen werden.

Die Verteilung der Gletscher ist eine ziemlich ungleichmäßige. Bekannt sind in Europa die Alpengletscher, die skandinavischen Gletscher; der Ural ist gletscherlos.

In Asien ist die Kette des westlichen Himalaya und das Karakorumgebirge sehr stark vereist und mächtige Gletscherströme ziehen weit talwärts. Im letzteren Stocke hat der Arandagletscher 48 *km* Länge, der Baltorgletscher soll einen Eisstrom von 56 *km* Länge haben; der Biafogletscher einen solchen von 64 *km* Länge.¹⁾

Kuen-Luen und Thian-Schan haben im westlichen Teile noch große Gletscher, sind hingegen im östlichen Teile, sowie der ganze Altai und der östliche Himalaya wenig oder gar nicht vergletschert.

Nordamerika hat Gletscher in der Nähe des großen Ozeans nördlich von + 43° Breite mit beträchtlicher Entfaltung derselben gegen Aljaska. In Südamerika südlich von etwa — 35° wird die Gletscherentfaltung sehr stark; unter 50° Breite stoßen die Gletscher schon Treibeis ins Meer.

Bemerkenswert ist die starke Vergletscherung von Neu-Seeland, wie ja das dortige Gebirgssystem mit dem Namen Neu-Seeländische Alpen charakterisiert ist. Der Franz Josef-Gletscher und der Prinz Alfred-Gletscher reichen hier bis 215 *m* über dem Meere herab. „In gleicher nördlicher geographischer Breite (42—45°) und bei gleicher Höhe finden wir in Europa (Südfrankreich, Italien) Zitronen, Orangen, Weintrauben und selbst hohe Palmen, und befinden uns in glühender Sonnenhitze weit entfernt von Schnee und Eis.“²⁾

Zu der starken Vergletscherung (Inlandeis) in Grönland und der reichen Entfaltung derselben auf Spitzbergen, Franz Josefsland, steht in sonderbarem Kontraste die Gletscherarmut der arktischen Inselwelt Nordamerikas und ganz Nordasiens.

Über den antarktischen Kontinent sind in der letzten Zeit bedeutsame Ergebnisse erzielt worden. Während 1882 Heim noch schrieb: „Das Betreten der Südpolarländer ist durch eine Eiswand unmöglich“,³⁾ ist man gegenwärtig, namentlich durch Drygalsky, Nordenskjöld und Shakleton, über dessen Expedition allerdings noch die wissenschaftlichen Berichte zu erwarten sind, über die Südpolarländer wenigstens im allgemeinen ziemlich gut informiert.

Zu bemerken ist noch, daß Vereisung und Vulkane sich nicht ausschließen, wie sich an den Gebirgen Islands, Neu-Seelands, den Cordilleren und Anden zeigt; und auch die höchsten Spitzen Afrikas, der Klima-Ndjaro und Kenia, haben unter den eisbedeckten Spitzen Krater.

1) Heim, l. c. S. 427.

2) Ibid. S. 449.

3) Ibid. S. 490.

III. Kapitel.

Klima- und Gletscherschwankungen.

Es ist eine schon lange bekannte Tatsache, daß die Gesamtheit der sogenannten klimatischen Faktoren: Temperatur, Luftdruck, Feuchtigkeit, Niederschläge, das Klima, keine absolute Konstante ist, sondern periodischen Veränderungen unterliegt. Diese Veränderungen fielen auch frühzeitig auf; man war aber geneigt, eine mehr sekulare Veränderung, eine allgemeines Kälter- oder Wärmerwerden anzunehmen, wobei natürlich stets der momentane Witterungscharakter auf das Urteil bestimmend einwirken mußte; in kälteren und feuchteren Epochen sprach man von einer allgemeinen Verschlechterung des Klimas, in wärmeren und trockeneren Epochen war man geneigt, eine allgemeine Erwärmung anzunehmen.

L. W. Meech ¹⁾ bemerkt, daß 1709 viele Familien in ihren Häusern erfroren und daß das Mittelmeer damals teilweise zugefroren gewesen sein soll; daß 1740 der Schnee in Spanien 10 Fuß tief lag und daß 1776 die Donau unterhalb Wiens eine 5 Fuß dicke Eisdecke hatte.

Zur wissenschaftlichen Sicherstellung der Tatsachen reichen derartige allgemeine Angaben nicht aus, wenn sie auch in der Gesamtkette der Tatsachen nicht zu unterschätzende Momente bilden. „Eine Klimaänderung ist eine so große Sache, daß da schon ganz andere Beweisstücke vorliegen müssen, als die kleinen Geschichten, wie sie die Reisenden hinter dem Feuer der Alpenhütten erhörchen“ sagt Ed. Richter ²⁾.

Genauere Untersuchungen rühren von Ed. Brückner ³⁾ her, der zunächst den Zusammenhang zwischen den Wasserspiegeln in den Seen mit dem Klima verfolgte. Günstig war für diese Untersuchungen der Umstand, daß für den Kaspisee zahlreiche Beobachtungen seit den ältesten historischen Zeiten herangezogen werden konnten. Aus Aufzeichnungen über die Weite, bis zu welcher das Meer an die steinernen Festungsmauern in Derbent heranreichte, ließen

¹⁾ On the relative intensity of the Heat and Light of the Sun upon different latitudes of the Earth, 1857, S. 39.

²⁾ „Die Schwankungen der Alpengletscher“. Zeitschrift des deutschen und österreichischen Alpenvereines 1891, Bd. 22, S. 73.

³⁾ Klimaschwankungen seit 1750 nebst Bemerkungen über die Klimaschwankungen der Diluvialzeit, 1890.

sich Schlüsse über die Höhe des Wasserstandes ziehen. „Ob dieses Resultat sicher ist, ist schwer zu entscheiden“; denn Voraussetzung für dieselben war, daß die Mauerpfeiler, welche hiebei gleichsam die Stelle von Pegeln vertreten mußten, richtig identifiziert wurden, daß keiner derselben zerstört worden war usw. ¹⁾ Andererseits geben versunkene Gebäude an den Ufern des Sees Anhaltspunkte dafür, über die Lage des Seespiegels bei tiefem Wasserstande zu entscheiden.

So fand Brückner; Für 915 bis 921 Stand 8·82 *m* über dem jetzigen Wasserspiegel; im 12 Jh. 4·20 *m* unter demselben. ²⁾ Um 1306/07 : 11·2 *m* über, 1638 : 4·88 *m* über dem jetzigen Niveau. Als Ursache wurde schon seit 1740 von vielen Gelehrten die Witterung: Wärme, Regen und Luftfeuchtigkeit angesehen. Reisende: Rytschkow, Pallas, Hanway erwähnen, daß den Bewohnern bekannt ist, daß mit dem Steigen des Wassers größere Kälte zusammenfällt; auch die Aufzeichnungen über das Gefrieren der Flüsse stimmen damit überein. ³⁾

Brückner dehnte dann seine Untersuchungen auf die Gegenwart, aus welcher ja die Beobachtungen viel sicherer und zahlreicher sind, und zwar auf andere Binnenseen, sowohl auf abflußlose als auf Abflußseen, aus. Es ergibt sich aus allen dasselbe Resultat: „Es führt sich die Schwankung des Wasserstandes im Kaspischen Meere seit den 40er Jahren auf eine große Schwankung des Regenfalles in seinem Einzugsgebiete zurück, eine Abnahme desselben bis zum Beginne der 60er Jahre, und eine Zunahme nach jener Zeit“. ⁴⁾

Die Schwankungen der Seespiegel treten überall gleichzeitig auf; ein Unterschied nach der Lage des Sees ist weder in Länge noch in Breite zu erkennen; „die Seen erleben tatsächlich auf der ganzen Erde gleichzeitig eine Hochwasser- und eine Niederwasserperiode“ ⁵⁾ und ebenso ergibt sich für die abflußlosen Seen „die Gleichzeitigkeit der gleichsinnigen Epochen der Klimaschwankungen auf der ganzen Landoberfläche der Erde.“ ⁶⁾

Aus einer umfangreichen, mit äußerster Sorgfalt geführten Untersuchung über Regenperioden, Temperatur- und Luftdruckschwankungen zeigt sich dann, daß „jede der regenreichen Perioden von einer Milderung aller Luftdruckdifferenzen, jede der Trockenperioden von einer Steigerung derselben begleitet ist, und zwar sowohl der Luftdruckdifferenzen von Ort zu Ort, als auch derjenigen an demselben Orte von Jahreszeit zu Jahreszeit“ ⁷⁾ und daß diese Klimaschwankungen der Erde sich in einer Periode von $34\cdot8 \pm 0\cdot7$ Jahren vollziehen“ ⁸⁾ und auch alle Angaben über Weinernte, über kalte und warme

¹⁾ Ibid. S. 63.

²⁾ Hier schwanken die Angaben zwischen 4—6 *m*; doch kommen auch Angaben von 12 *m* vor (S. 65).

³⁾ Ibid. S. 82.

⁴⁾ Ibid. S. 79.

⁵⁾ Ibid. S. 113.

⁶⁾ Ibid. S. 131.

⁷⁾ Ibid. S. 218.

⁸⁾ Ibid. S. 272.

Winter u. s. w. bestätigen diese Periodizität. Jedenfalls aber scheint die Gegenwart seit 1815 wärmer als die Zeit von 1730 bis 1815, so daß sich neben jenen kurzen Perioden des Klimas noch solche von mehr als 100 Jahren Dauer überlagern.

Die Amplitude der Schwankung beträgt nach Brückner etwa 1° C.

Mit der elfjährigen Sonnenfleckenperiode, deren Amplitude nach Köppen 0.73° für die Tropen, 0.53° für die außertropischen Gebiete beträgt, scheint diese Periode nichts zu tun zu haben, doch ist dies durchaus noch nicht so apodiktisch auszusprechen, wie dies mitunter geschieht. Drei Sonnenfleckenperioden sind nahe 33 $\frac{1}{3}$ Jahre; aber im Laufe der Zeiten müßten die Erscheinungen auseinanderweichen. Fallen zu einer gewissen Epoche die beiden Wirkungen zusammen, so würden sie sich unter der Voraussetzung, daß die Sonnenfleckenperiode gleich 11 $\frac{1}{9}$ Jahre und die Brücknersche Periode gleich 34 $\frac{4}{5}$ Jahre genau sind, nach 386 $\frac{2}{3}$ Jahren, innerhalb deren sich 17 $\frac{2}{5}$ Sonnenfleckenperioden und 5 $\frac{5}{9}$ Brücknersche Perioden wiederholt hätten, entgegengewirken; es sind daher alle bisherigen Untersuchungen nur erste Näherungen, und eine genaue definitive Untersuchung müßte beide Wirkungen gemeinschaftlich in Berücksichtigung ziehen. Das Prinzip hiefür ist ja recht einfach; sei für eine Temperaturschwankung, die sich im Laufe einer Periode T_1 abspielt, die Amplitude $2\vartheta_1$, so ist für einen Zeitmoment t die Temperatur

$$\Theta_0 + \vartheta_1 \cos 2\pi \frac{t - t_0}{T_1}$$

wobei Θ_0 die Mitteltemperatur des Ortes und die Zeit von einem beliebig gewählten Zeitpunkt t_0 gezählt wird. Vereinigt sich die Schwankung mit einer zweiten von der Amplitude $2\vartheta_2$, welche in einer Periode T_2 abläuft, so wird die Temperatur zur Zeit t gegeben werden durch

$$\Theta = \Theta_0 + \vartheta_1 \cos 2\pi \frac{t - t_0}{T_1} + \vartheta_2 \cos 2\pi \frac{t - t_0}{T_2}$$

und aus einer genügenden Anzahl von beobachteten Werten Θ werden sich die Größen ϑ_1 , ϑ_2 , T_1 , T_2 nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen lassen. Man kann hiezu jährliche oder fünfjährige Mittel verwenden: bei einer strengen Ausgleichung würden die lokalen Einflüssen entspringenden, den Gang der Erscheinung trübenden Unregelmäßigkeiten sich ohnedies eliminieren und man könnte daher auch erwarten, daß sich aus einer solchen Untersuchung der genauere Einfluß des Reichtums an Sonnenflecken auf die Temperaturverhältnisse konstatieren lassen würde. Allein mit Rücksicht auf die Schwierigkeit der Beobachtungen und auf die Länge der ganzen Periode (773 Jahre) wird diese Erwartung wohl als sehr optimistisch aufgefaßt werden können, wengleich es eine verdienstliche Arbeit wäre, eine Ausgleichung der Beobachtungen nach dieser Richtung hin vorzunehmen. Hundert Jahre, das ist ein Siebentel der Periode, könnten immerhin schon ganz bemerkenswerte Resultate zutage fördern und jedenfalls kann man unter diesem Gesichtspunkte das Brücknersche Resultat noch nicht als definitiv ansehen.

Daß die 35jährige Periode nicht alle Erscheinungen erklärt, folgt schon daraus, daß die derselben entsprechenden Schwankungen der Seespiegel

zwischen 0·5 und 10 *m* angegeben werden; die eingangs erwähnten Schwankungen des Kaspisees, welche auf eine Amplitude von 15 *m* deuten, müssen also doch wohl eine andere Ursache haben, und es ist daher die Annahme von Lenz, der diese Schwankungen auf Hebungen und Senkungen des Landes zurückführte, keineswegs ganz von der Hand zu weisen. Darauf deutet auch die von Brückner angegebene Tatsache, daß 1830 im Kaspisee eine Insel von 1 *km* Länge und $\frac{3}{4}$ *km* Breite entstand, woraus auf eine Hebung von 9 *m* geschlossen wurde, während der Wasserstand nach den Beobachtungen in Baku sich nur um 3 *m* geändert hatte.¹⁾

Daß sich Klimaschwankungen auch in der Ausdehnung der Gletscher zeigen müssen, ist eigentlich vorauszusehen. Selbst im Laufe eines Jahres (Sommer und Winter) können Änderungen in der Ausdehnung auftreten; diese sind aber verhältnismäßig gering; in den Alpen bleiben die Gletscher im Winter fast stationär. Für Grönland sagt Drygalsky,²⁾ daß Sommer- und Winterrand der Gletscher um 200 bis 300 *m* schwanken, was Vorstößen und Rückzügen entspricht.

Schon 1858 hat v. Sonklar³⁾ auf die Gletscherschwankungen und ihren Zusammenhang mit Temperatur und Niederschlag hingewiesen und C. Lang⁴⁾ kommt auch zu dem Schlusse, daß einer Periode der Gletschervorstöße in unserem Jahrhundert immer eine Periode von regenreichen Jahren vorhergegangen ist. Nichtsdestoweniger hatte Brückner, obzwar er auch Zusammenstellungen über die Schwankungen der Gletscher anführt,⁵⁾ von einer Bearbeitung derselben abgesehen, da er diese Schwankungen für keinen genügenden Index für die Klimaschwankungen hielt. Diese Lücke hat Ed. Richter ausgefüllt.⁶⁾ Aus seiner sehr ausführlichen Untersuchung mögen die folgenden Resultate übersichtlich zusammengestellt werden:

1. Vorstoßperiode um 1600. Die Diskussion von 9, allerdings nicht ganz zuverlässigen Berichten (3 Berichte werden als unzuverlässig bezeichnet), gibt den Beginn des Vorstoßes 1591/92, das Maximum für den Rutor- und Gétrozgletscher 1594/95, für den Grindelwald- und Vernagtgletscher fast um dieselbe Zeit, etwas später.

2. Vorstoßperiode 1630—40; Zusammenstellung von 7 ebenfalls teilweise nicht ganz zuverlässigen Berichten (4 unsicher): Beginn 1630.

3. Vorstoßperiode um 1680; 7 Berichte, davon nur einer als unsicher bezeichnet; Beginn des Vorstoßes 1670—75.

4. Vorstoßperiode 1715; 5 Berichte, davon 2 unsicher; Beginn des Vorstoßes 1712—15.

¹⁾ Brückner, Klimaschwankungen, S. 55.

²⁾ Grönlandexpedition, S. 269.

³⁾ „Über den Zusammenhang der Gletscherschwankungen mit den meteorologischen Verhältnissen“, Sitzungsberichte der Wiener Akademie, 32. Bd., S. 194.

⁴⁾ „Der sekulare Verlauf der Witterung als Ursache der Gletscherschwankungen in den Alpen“, Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie, Bd. 20, 1885, S. 443.

⁵⁾ l. c. S. 107.

⁶⁾ „Geschichte der Schwankungen der Alpengletscher“. Zeitschrift des deutschen und österreichischen Alpenvereines, Bd. 22, 1891.

5. Vorstoßperiode um 1740; 6 Berichte, davon 2 unsicher. Beginn des Vorstoßes 1730—35; die sämtlichen Vorstöße mit Brückners feuchten Perioden ganz oder sehr nahe zusammenfallend.¹⁾ Aus 1748 und 1756 liegen Berichte über einen besonders auffälligen Rückzug des Grindelwaldgletschers vor; bemerkenswert ist das Zusammenfallen dieses Rückzuges mit einer warmen Trockenzeit in der Brückner'schen Periode.

6. Vorstoß 1770. Aus dieser Zeit liegen bereits 22 Berichte vor, von denen nur einer als unsicher bezeichnet wird; der Beginn kann mit ziemlicher Sicherheit auf 1767—68 fixiert werden.

Im 19. Jahrhundert folgte ein Vorstoß 1820, über welchen 13 Berichte vorliegen, und dann ein starker Vorstoß 1840—50, über welchen 32 sehr ausführliche Berichte zur Diskussion gelangen, unter denen vor allem der Grindelwaldgletscher, der sehr oft bis ins bewohnte Tal herabreicht, leicht zu beobachten und daher auch mit besonders brauchbaren Berichten vertreten ist.

Hauptsächlich die letzte Epoche war es, die aus naheliegenden Gründen bemerkenswerte Aufschlüsse gab. Es zeigt sich, daß wenn auch aus der ganzen Reihe der Berichte eine Periodizität mit einer nahe 35jährigen Periode gefolgert werden kann, doch Abweichungen verschiedener Art auftreten. Die Zwischenzeiten sind nicht ganz konstant, der letzterwähnte Vorstoß war verfrüht, ging aber viel langsamer vor sich, so daß 1860 noch von Vorstößen berichtet wird; ferner zeigten sich während dieses Vorstoßes unzweideutig kleine Oszillationen, und auch die Intensitäten der aufeinanderfolgenden Vorstöße sind nicht gleich. „Es besteht die Neigung, immer nur einen der Vorstöße anzudeuten, einen für die oberflächliche Beurteilung ganz zu überschlagen; . . . die 35jährige Periode in eine 70jährige zu verwandeln.“²⁾

Diese Untersuchungen erhielten eine wesentliche Erweiterung und Vervollständigung durch die Zusammenstellung der Schwankungen der zirkumpolaren Gletscher durch Charles Rabot³⁾. Die Resultate, zu denen er kommt, sind kurz zusammengefaßt die folgenden:

Unter 44 Gletschern Spitzbergens, von denen allerdings nur 6 nach genauen Angaben diskutiert werden konnten, zeigt sich so wie für die Gletscher Islands im 18. Jahrhundert ein Wachsen, welches auch in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts bestehen blieb.⁴⁾ Insbesondere wird angegeben: Der Gletscher der Magdalenenbay scheint sich 1818 bis 1839 verlängert zu haben, der Gletscher in der baie de la Recherche war noch 1838 im Wachsen, ebenso derjenige in der bai de la Pointe des Renards; der Frithjofgletscher wuchs 1860—61 enorm. Nach 1860 bis gegen 1880 begann eine Periode der Abnahme einzusetzen und diese Abnahme setzt sich noch weiter fort. Auch auf König Karls-Land zeigt ein toter Gletscher eine Abnahme. Einzelne andere

¹⁾ Auch die von Meech angeführten Kälteperioden 1709, 1740, 1776 bestätigen das Zusammenfallen.

²⁾ l. c. S. 50.

³⁾ Les variations des longueurs des glaciers 1900.

⁴⁾ l. c. S. 79.

Gletscher scheinen trotzdem auch noch jetzt zuzunehmen, so der Negrigletscher und bei anderen, so beim südlichsten in den 7 Eisbergen findet schon seit längerer Zeit keine Veränderung statt; sie scheinen stationär zu sein. Im allgemeinen glaubt aber Rabot, daß bei den Gletschern Spitzbergens gegenwärtig (um 1900) wieder ein Vorstoß zu beginnen scheint.¹⁾

Von 3 untersuchten Gletschern auf Franz Josefs-Land scheint einer noch jetzt zu wachsen, bei den beiden anderen ist entschieden eine Phase des Rückzuges zu konstatieren.

Im nördlichen Norwegen war bis zum Anfang des 19. Jahrhunderts der Gletscher des Sulitelma, der einzige unter den nördlichen Gletschern damals bekannte, im Wachsen, in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts folgte eine Zeit des Rückschreitens, die bei einigen Gletschern (Starjek jatko) durch stationäre Phasen unterbrochen war, gegenwärtig aber wieder in ein Stadium des Wachsens überzugehen scheint.

Auch in den Gletschern des westlich gelegenen Svartisen, Okstinder und Børgefjeld zeigte sich in der Mitte des 19. Jahrhunderts ein Vorstoß,²⁾ der für viele selbst noch 1870 fortbestand und dann in einen langsamen und allmähigen Rückzug überging, der bis zum Schlusse des Jahrhunderts andauerte.

Im südlichen Norwegen, in welchem die Gletscherveränderungen durch das Hereindrängen derselben in bewohnte Strecken frühzeitig sehr auffällig wurden, konnten ziemlich sichere Resultate erlangt werden.

Bei den Gletschern des Jostedalsbræe und Folgefond war im Anfang des 18. Jahrhunderts ein Wachstum von fast katastrophaler Bedeutung (Überflutung von bewohnten Ortschaften, Vernichtung von bebauten Feldern)³⁾ die Amplitude eines einfachen Wachstumes weit überschreitend. Seit 1750 folgte dann eine ziemlich lange Periode konstanter, sehr großer Ausdehnung der Gletscher und erst im Anfang des 19. Jahrhunderts begann ein langsames Abnehmen. So waren z. B. die Gletscher des eigentlichen Jostedalsbræe und des Jostefund, welche gegenwärtig getrennt sind, vor 1840 noch miteinander zusammenhängend. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts aber lassen sich mit ziemlicher Sicherheit bei fast allen Gletschern des Jostedalsbræe zwei, ihrer Größe nach gegenüber den Vorstößen des 18. Jahrhunderts weit zurückstehende Vorstöße konstatieren: 1869 und 1880 bis 1895. Gegenwärtig, seit 1895 glaubt Rabot einen Rückgang dieser Gletscher annehmen zu müssen.⁴⁾

¹⁾ l. c. S. 81. In den Alpengletschern ist bekanntlich noch gegenwärtig (1909) der Rückzug fast allgemein.

²⁾ l. c. SS. 137 und 142.

³⁾ l. c. S. 186 und 195; allerdings wird angegeben, daß die Berichte nicht ganz zuverlässig sind. Für den Bergsaeterbræe (Kronnal) und für den Nigarbræe wird angegeben, daß sie beim Vorstoße 1742 die Felder überströmt haben, so daß Steuernachlässe die Folge waren. Steuernachlässe sind nun allerdings ein unanfechtbarer Beweis; aber andere Angaben sind weniger zuverlässig. Elvekrogen soll ein Ort gewesen sein, der vom Gletscher überschwemmt worden sein soll; und Klaus Elvekrogen soll ein Mann geheißen haben, der 1790 in der Mitte der Moräne das Dach eines Hauses gesehen haben will. (S. 188.) Soll es vielleicht Klaus von Elvekrogen heißen?

⁴⁾ l. c. S. 200.

Die Gletscher des Folgefond waren etwa von 1812 an im Rückzug, worauf wieder ein Vorstoß folgte, der bis 1890 dauerte; in der Gegenwart scheint sich wieder ein Rückgang vorzubereiten.

Von den Gletschern von Jotunheim zeigen 24 Spuren von Vorstößen in der Entfernung von 200 bis 300 *m* von der Stirnmoräne. Im allgemeinen soll diese Ausdehnung im 18. Jahrhundert erfolgt sein; doch ist für andere noch eine spätere Vergrößerung nachweisbar. Der Tveraebrae und Sveljenarabrae waren 1870 noch verbunden, sie waren 1864 und 1871 in ihrer maximalen Ausdehnung; dann folgte ein schwacher Rückzug, auf welchen zwischen 1880 bis 1890 wieder eine Periode des Wachstums folgte. In der Gegenwart scheint wieder eine ganz schwache Abnahme platzzugreifen. Diese Abnahme scheint daher für ganz Südnorwegen charakteristisch, wenn sie auch nicht in dem Ausmaße stattfindet, wie in den Alpen.

Zu diesen, das 18. und 19. Jahrhundert betreffenden Angaben, welche für das 18. Jahrhundert einen ganz allgemeinen starken Vorstoß, und im 19. Jahrhundert kleinere Schwankungen nach beiden Richtungen anzeigen ¹⁾ ist nun noch hinzuzufügen, daß vor dem 18. Jahrhundert ein vielleicht durch mehrere Jahrhunderte bestehender Minimalstand der Gletscher anzunehmen ist, „La longue durée de cette phase de minimum est attesté, en Norvège par l'existence de fermes et de terres cultivées dans le voisinage immédiat des glaciers,“ damit sich aber kulturfähiger Boden herstellen könne, mußte der Boden Jahrhunderte lang frei von Eis gewesen sein.²⁾ Ebenso ist in Island eine weite eisfreie Zone in den jetzt vereisten Gebieten durch die Überreste von Kirchen und Wohnhäusern konstatiert, die unter dem Eis an der Randzone der Gletscher gefunden wurden.

Soweit die Gletscher Asiens verfolgt werden konnten, zeigt sich eine ziemliche Unregelmäßigkeit. Heim ³⁾ berichtet von den Gletschern des Himalaya: „Während im letzten und gegenwärtigen Jahrzehnt (um 1880) der Arandugletscher eine Wiese aufpflügt und den Rasen vor sich herwälzt, der Palmagletscher sich ebenfalls vergrößert, schwinden die Gletscher der gleichen Gruppe wie der Tapsa und Biafogletscher.“ Wachstum und Rückgang fallen also nicht für alle Gletscher zusammen; eine Gesetzmäßigkeit ist noch nicht gefunden. Die Annahme Heims,⁴⁾ daß die kleinen Gletscher ihre Schwankungen verfrühen, die großen und die mit flachen Böschungen verspäten, daß die Gletscher, die ihren Rückzug verspätet beginnen, auch im Wachstum erst später nachfolgen, sind wohl noch nicht genügend gesicherte Ergebnisse.

Die Gletscherschwankungen sind natürlich abhängig von dem Verhältnis des Niederschlages zur Ablation.

A. Der Niederschlag. In der Region des ewigen Schnees wird der Niederschlag zu jeder Jahreszeit als Schnee fallen; weiter herab treten beide Formen: Schnee und Regen auf, aber je höher man hinauf kommt, desto mehr

¹⁾ l. c. S. 234.

²⁾ l. c. S. 232. Der Schlußsatz von Rabot könnte angezweifelt werden. S. das 5. Kapitel.

³⁾ Gletscherkunde, S. 427.

⁴⁾ l. c. S. 504.

neigt das Verhältnis der beiden Niederschlagsformen im Sinne eines Überschusses von Schnee. Sei N die gesamte Niederschlagsmenge, und ρN die davon auf Regen, σN die auf Schnee entfallende, also $\rho + \sigma = 1$, so wird σ mit der Höhe wachsen und in der Firnregion bereits sehr nahe den Wert 1 haben. In welcher Höhe man für σ bereits die Einheit anzunehmen hat, ist nicht allgemein angebar; jedenfalls wird diese Höhe nicht wesentlich von der Firnlinie verschieden sein. N selbst allerdings nimmt weiter nach oben wieder ab, weil der absolute Feuchtigkeitsgehalt der Luft, entsprechend der niedrigen Temperatur, ein kleiner ist. σN wird daher nach aufwärts und abwärts abnehmen. Ein Teil des Regens wird übrigens stets wieder zum Abschmelzen des Schnees beitragen; ist die Temperatur des Regens im Mittel t^0 , so werden $\frac{t}{80} \rho N$ Schnee geschmolzen (weil 1 Gewichtsteil Eis 80 Cal. zum Schmelzen benötigt) so daß

$$\left(\sigma - \frac{t\rho}{80}\right) N = \left[\sigma\left(1 + \frac{t}{80}\right) - \frac{t}{80}\right] N$$

als Schnee zur Bildung des Gletschers beitragen. Das Maximum dieser Menge fällt nicht in die oberste Schneeregion, wohl aber oberhalb der Firnlinie und liefert so ein Firnfeld von nach oben und unten abnehmender Mächtigkeit, Heim ¹⁾ führt als Beispiel an, daß der Niederschlag am großen St. Bernhard 1.75 *m* jährliche Wasserhöhe erreicht, davon $\frac{3}{4}$, das ist 1.31 *m* Schnee (wohl auch nach Abzug der vom Regen wieder aufgelösten Schneemassen verstanden). Für frisch gefallenen Schnee gibt dies eine Höhe von zirka 10 *m*, als gesinterter Schnee (vom spez. Gew. 0.333) 4 *m* Höhe, als Firneis (spez. Gew. 0.628) eine Schicht von 2 *m* Höhe. Im Durchschnitt beträgt nach Heim der jährliche Schneefall, reduziert auf *mm* Wasser:

in	500 <i>m</i> ,	1000 <i>m</i> ,	1500 <i>m</i> ,	2000 <i>m</i> ,	2500 <i>m</i> Höhe
	93.7 <i>mm</i> ,	464.2 <i>mm</i> ,	559.0 <i>mm</i> ,	847.1 <i>mm</i>	

und Heim nimmt für die Alpen als Mittel für die Hochschneeregion, eine jährliche Ernährung von wenigstens 2 *m* Firnschnee oder 1 *m* Firneis.

Die Menge der Niederschläge ist aber bedingt durch die Temperatur und den Feuchtigkeitsgehalt der Luft. Dabei ist aber nicht zu übersehen, daß bei der Kondensation selbst wieder Wärme frei wird, so daß die Kondensation und das Abschmelzen einen Ausgleich der Wärme herbeiführen, und zwar bezüglich der momentanen Temperatur sowohl, als auch der zeitlichen Schwankungen, so daß die Gletscher als Regulator für das Klima bezeichnet werden können.²⁾

¹⁾ l. c. S. 87.

²⁾ Hierauf hat schon Tyndall hingewiesen; Croll allerdings meint, daß die vom Meere verdunsteten Wassermassen zum größten Teile schon in der heißen Zone kondensiert werden und Verdunstung und Kondensation in voneinander nicht sehr entfernten Regionen stattfinden. Wenn dies auch zugegeben werden muß, so fällt doch Verdunstung in die tieferen, Kondensation in die höheren Schichten. Die Größe der Verdunstung hängt aber auch von der bereits in der Luft vorhandenen Feuchtigkeit ab und ist kleiner, wenn die Luft bereits einen hohen Prozentsatz von Wasserdampf enthält.

Auch die Oberfläche des Gletschers selbst kondensiert; dabei wird ebenfalls Wärme frei, wodurch Eis geschmolzen wird; diese Kondensation trägt also nicht zur Vergrößerung der Eismassen bei; denn je 1 g Kondensationswasser liefert 537 cal, durch welche 6.7 g Eis geschmolzen werden.

Eine wiederholt beobachtete Tatsache ist es, daß zur Zeit des Vorstoßes des Gletschers das Firnfeld abnimmt. Genauere Beobachtungen hierüber rühren von Ed. Richter¹⁾ und neuerer Zeit von Garnwood am Tennantgletscher in Spitzbergen²⁾ her. Die Erscheinung wird verständlich, wenn man von der Zeit der Gletscherrückzüge ausgeht. In diesen Zeiten wird durch das starke Abschmelzen der Eismassen eine Erniedrigung der Lufttemperatur stattfinden müssen; sind dann hierbei auch starke Niederschläge, so wird der Gletscher an Mächtigkeit gewinnen, wegen der großen Kälte aber weniger beweglich sein; erst bei eintretender milder Temperatur wird die Beweglichkeit des Gletschers größer und es erfolgen die Vorstöße.³⁾ Woeikoff hält es auch für eine Regel, daß zur Zeit der Gletscherrückzüge die Sommer kalt, zur Zeit der Vorstöße warm sind.⁴⁾

B. Die Ablation ist eine dreifache. a) Die oberflächliche Ablation setzt sich zusammen aus der durch die Sonnenwärme erzeugten, zu welcher die durch die Talwände reflektierte Wärme hinzukommt und die durch die Lufttemperatur erzeugte Abschmelzung.⁵⁾ Die durch Reibung an den Gletscherwänden erzeugte Ablation kann mit c) vereinigt werden und die durch die verschiedenen rasche Bewegung und dadurch erzeugte innere Reibung auftretende mit b).

Über den Gletscher selbst wird, wenn der Feuchtigkeitsgehalt der Luft 4.88 g oder mehr beträgt (maximaler Gehalt bei 0°) Niederschlag stattfinden, wenn hingegen weniger, so wird Verdunsten stattfinden. Im allgemeinen ist nun allerdings bei jeder nach oben gehenden Luftströmung Kondensation die Folge. Allein da diese hauptsächlich am Gletscherrande erfolgt, kann über dem Gletscher nicht selten der Feuchtigkeitsgehalt unter dem Maximum bleiben und dann tritt Verdunstung auf. Über die durch Kondensation bewirkte Schmelzung, von der schon die Rede war, haben Dufour und Forel⁶⁾ am Rhonegletscher Messungen ausgeführt. Sie fanden bei

Taupunkt + 1°	Niederschlagsmenge : 0.05 mm pro Stunde = 1.2 mm pro Tag
„ + 2°	„ 0.10 mm „ „ = 2.4 mm „ „
„ + 3°	„ 0.15 mm „ „ = 3.6 mm „ „

1) „Beobachtungen an den Gletschern der Ostalpen“ : I, der Sulzbachgletscher, 1880—82, Zeitschrift des deutschen und österreichischen Alpenvereines, 1883.

2) S. Rabot, l. c. S. 242.

3) S. auch S. 93.

4) l. c. S. 90.

5) Auf Unregelmäßigkeiten derselben, Gletschertische, das sind Gletscherblöcke, die die darunterliegenden Eismassen vor dem Abschmelzen schützen und daher auf Eisfüßen stehen, ferner dunkle dünne Staublagen, die durch Absorption der Wärme das Abschmelzen befördern und zu Gletscherröhren, Gletschermühlen führen, u. s. w. braucht hierbei, da sie nur geringe Bruchteile der Gesamtablation ausmachen, keine Rücksicht genommen zu werden.

6) „Recherches sur la condensation de la vapeur aqueuse au contact de la glace.“ Arch. des sciences physiques, Bd. 40. (1871.)

also während zweier Monate 21.6 *cm* Niederschlagshöhe, welche über 1,600.000 *m*³ Eis schmelzen würden. Im großen und ganzen wird man in allen Fällen den Restbetrag (Überschuß der Niederschlagsmenge oder Ablation) zu berücksichtigen haben.

b) Die Ablation aus dem Innern, die innere Schmelzung. Diese hängt von der Temperatur und dem herrschenden Drucke (Erniedrigung des Schmelzpunktes) ab. Über die Temperatur läßt sich bisher noch nicht viel aussagen, da noch wenige Beobachtungen vorliegen; Gletscherbäche haben an der Oberfläche meist die Temperatur 0°; bei Gletscherbächen in der Tiefe wurden höhere Temperaturen beobachtet.

c) Die Ablation von unten ist eine Folge der Reibung der Gletschermassen am Boden, die von der Größe des Druckes der darüberliegenden Eismassen abhängig ist. Da die äußere Kälte nicht tief in die Eismassen eindringt, so ist die Bodenwärme selbst wohl auch nicht ohne Einfluß. Heim nahm an, daß auch hier in der Tiefe von 30 bis 50 *m* die Temperatur konstant wäre, und von da abwärts wieder zunähme. Ist z. B. in 3500 *m* Höhe die Lufttemperatur —10°, die mittlere Temperatur an der Gletscheroberfläche —6°, und rechnet man hier auf je 30 *m* Tiefe 1° Temperaturzunahme, so wäre in der Tiefe von 50 + 6 × 30 = 230 *m* die Temperatur 0°; ist der Gletscher noch mächtiger, so findet unten Abschmelzung statt.¹⁾ Auch im Winter, wo eine oberflächliche Abschmelzung nicht stattfindet, findet eine solche in der Tiefe statt. Vereinzelt Messungen bestätigen diese Annahme. Drygalsky fand²⁾ die Temperatur an der Oberfläche des Eises —15°, aber schon in der Tiefe von 2 *m* war die Temperatur infolge der schlechten Leitungsfähigkeit des Eises nahezu konstant —1.5°.

Über die Ablation ziffermäßige Beträge anzugeben, ist schwer möglich; Heim nimmt die oberflächliche Ablation im Mittel aus verschiedenen Messungen in der Firnmulde 1 *m* jährlich, in mittleren Gletscherhöhen 2 bis 2½ *m* jährlich am Gletscherrande 3 bis 3½ *m* jährlich. Drygalsky hat die oberflächliche Ablation an den in das Eis versenkten Stangen gemessen, indem durch dieselben die Stangen immer weiter herauskamen und schließlich niederfielen³⁾; als Betrag derselben findet er am Sermiarsutgletscher 2 *m* jährlich.

Im Sammelbecken sowohl wie im unteren Teile des Gletschers muß man sowohl eine Vermehrung des Eises durch Niederschläge, als auch eine Ablation annehmen; aber im Sammelbecken überwiegt die Vermehrung, im unteren Teile die Ablation. Es sei *s* der Überschuß des gesammelten über dem geschmolzenen Schnee in der Sammelregion, *a* der Überschuß der Ablation über die gesammelte Menge in der Ablationsregion, in der Zeiteinheit, als welche 1 Tag oder 1 Jahr gewählt werden kann.

s und *a* sind selbstverständlich Funktionen des Ortes, und es wird Orte geben, in denen $s = a = 0$ ist. Diese Punkte bestimmen die Schneegrenze,

1) Heim, l. c. S. 249.

2) Grönlandexpedition, S. 460.

3) Ibid. S. 220 u. 354.

welche die *Sammelregion* von der eigentlichen *Region* des strömenden Gletschers, welche kurz als *Ablationsregion* bezeichnet werden soll, trennt.

Sei F die Oberfläche des *Sammelbeckens*, h die Höhe des in der Zeiteinheit daselbst gefallenen, zu Eis zusammengesunkenen Schnees, so ist die Menge des *Eiszuwachses* Fh .

Der strömende Gletscher würde sich in der Zeiteinheit um eine Strecke $dl + dl_0$ über die *Stirnfläche* weiter bewegen; diese *Verlängerung* beträgt aber tatsächlich nur dl , während der übrige Teil dl_0 durch das *Abschmelzen* aufgehoben wird, so daß als die von der *Stirnfläche*, deren *Flächeninhalt* Q sei, abgeschmolzene *Schneemenge* $Q \cdot dl_0$ anzusehen ist. dl hingegen ist der *Gletschervorstoß*.

Ist weiter L die *Länge*, B die *Breite* des Gletschers, erstere gezählt von der *Schneelinie*, und α das *mittlere Volumen* des auf der *Flächeneinheit* abgeschmolzenen Eises, so ist das *geschmolzene Volumen* $O\alpha = LB\alpha$; es ist demnach die *Veränderung* in dem *Eisvolumen* des Gletschers gleich

$$Fh - Qdl_0 - LB\alpha$$

positiv, wenn eine *Zunahme* der *Eismenge* stattfindet. Diese Menge kann nun noch anders ausgedrückt werden. Ist dh die *Änderung* des *Niveaus* im *Sammelbecken*, positiv, wenn die *Gletscheroberfläche* steigt, so ist die *Zunahme* des Eises im *Sammelbecken* Fdh , weil die *Änderung* der *Fläche* F (die *Verschiebung* der *Firnlinie*) so klein ist, daß die hieraus resultierende *Änderung* hdF vernachlässigt werden kann. Die *Vermehrung* in der *Ablationsregion* wird Qdl an der *Stirnseite* und LdQ an der *Oberfläche*, wenn man die *Vergrößerung* des *Querschnittes* Q längs des ganzen Gletschers als konstant ansieht, selbst dann, wenn der *Querschnitt* Q selbst an verschiedenen Stellen verschieden ist; hiernach drückt sich die *Zunahme* des *Eisvolumens* durch

$$Fdh + Qdl + LdQ$$

aus, und es besteht die *Gleichung* ¹⁾

$$Fh - Qdl_0 - BL\alpha = Fdh + Qdl + LdQ. \quad (1)$$

$dl + dl_0$ wäre die *Verlängerung* des Gletschers in der Zeiteinheit, wenn keine *Ablation* stattfinden würde, also die *Geschwindigkeit* des Gletschers; wird diese mit v bezeichnet, so wird daher:

$$Fh - BL\alpha = Qv + LdQ + Fdh.$$

Zur *Zeit* des *Maximums* und *Minimums* der *Ausdehnung* des Gletschers wird derselbe *stationär*, und dann kann gesetzt werden: $dQ = dh = dl = 0$, daher $v = dl_0$, folglich

$$Fh - BL\alpha = Qdl_0; \quad (2)$$

$$L = \frac{Fh - Qdl_0}{B\alpha}.$$

Für andere Werte $F'Q'h'L'\alpha' dl_0'$ gilt eine ganz gleiche *Beziehung*, woraus folgt

$$\frac{BL\alpha}{B'L'\alpha'} = \frac{Fh - Qdl_0}{F'h' - Q'dl_0'}.$$

¹⁾ Luigi de Marchi: Le cause dell'era glaciale. S. 28.

Qdl_0 ist nun die an der Stirnfläche abgeschmolzene Menge; da längs des ganzen Gletschers von der Länge L oberflächliche und innere Ablation stattfindet, so wird die an der Stirnfläche abgeschmolzene Menge jedenfalls nur ein kleiner Bruchteil der gesamten abgeschmolzenen sein¹⁾ und man kann daher Qdl_0 gegenüber $BL\alpha$, also gegenüber Fh vernachlässigen, und man kann schreiben:

$$\frac{BL}{B'L'} = \frac{\alpha' Fh}{\alpha F'h'}$$

oder, wenn man die Oberflächen der Ablationsregion mit O , O' bezeichnet,

$$\frac{O}{O'} = \frac{\alpha' Fh}{\alpha F'h'}$$

und wenn man das Verhältnis der Fläche von Sammelregion zur Ablationsregion

$$\frac{F}{O} = f; \quad \frac{F'}{O'} = f'$$

einführt:

$$\frac{f}{f'} = \frac{\alpha h'}{\alpha' h}$$

ist $h = h'$, d. h., sind die Niederschlagshöhen bei beiden Gletschern nahe gleich, so wird:

$$f : f' = \alpha : \alpha',$$

d. h. das Verhältnis f von Sammel- und Ablationsregion ist nicht für alle Gletscher gleich, sondern steht im direkten Verhältnis der Ablationsmenge pro Flächeneinheit.

In der Gleichung (2) kann, namentlich bei großer Ausdehnung der Ablationsfläche Qdl_0 keinen merklichen Fehler erzeugen, und dann ist die Bedingung für das Gleichgewicht²⁾

$$Fh = BL\alpha. \quad (3)$$

Die Temperatur, welche Fh zu einem Maximum macht, wird aber nicht auch L zu einem Maximum machen, weil auch gleichzeitig α größer wird; der maximale Vorstoß fällt daher nicht mit der maximalen Niederschlagsmenge zusammen.

Durch logarithmisches Differenzieren erhält man aus (3), da B als konstant angesehen werden kann, so lange die Mächtigkeit des Eises nicht so gewaltig wird, daß hiedurch die Gletscheroberfläche zu einer Höhe reicht, in der die Breite wesentlich größer ist;

$$\frac{1}{L} \frac{dL}{d\vartheta} = \frac{1}{F} \frac{dF}{d\vartheta} - \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\vartheta} + \frac{1}{h} \frac{dh}{d\vartheta}.$$

Da aber

$$dF = B dL' = \frac{O}{L} dL'$$

¹⁾ Für die kalbenden Gletscher der Polarregion gilt dieses nicht. Bei diesen sind die durch das Abbrechen als Eisberge abgestoßenen Eismassen ganz gewaltige. In der Tat reicht auch hier die Schneelinie bis nahe an das Meer, so daß $BL\alpha$ gegenüber Qdl_0 zu vernachlässigen ist. Die hieraus folgende Gleichung lehrt aber nichts Neues.

²⁾ Fast streng gilt dieß für die Gletscher der Eiszeit, für welche die Ablationsfläche das Zehnfache und mehr von der Fläche des Sammelbeckens betrug.

ist, wenn L' die Länge des Sammelbeckens (die Breite derselben gleich derjenigen des Gletschers gedacht) bis zur Schneelinie ist, so folgt

$$\frac{1}{L} \frac{dL}{d\vartheta} = \frac{O}{F'} \frac{1}{L} \frac{dL'}{d\vartheta} - \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\vartheta} + \frac{1}{h} \frac{dh}{d\vartheta}$$

$$\frac{dL}{d\vartheta} = \frac{1}{F'} \frac{dL'}{d\vartheta} - \frac{L}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\vartheta} + \frac{L}{h} \frac{dh}{d\vartheta} \quad (4)$$

Die Größe des Gletschervorstoßes oder Rückzuges hängt also von der Veränderung von h ab; diese ist aber der Niederschlagsmenge, diese nahe der Verdunstung proportional. Ist E die der gegebenen Temperatur entsprechende Maximalspannung (Sättigungszustand), $e = uE$ die wirkliche Spannkraft des Wasserdampfes, u also die relative Feuchtigkeit, so ist die Verdunstung proportional dem Sättigungsdefizit

$$E - e = (1 - u) E,$$

demnach wird

$$h = C(E - e) = CE(1 - u).$$

Differenziert man wieder logarithmisch, so erhält man

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{d\vartheta} = \frac{1}{E} \frac{dE}{d\vartheta} - \frac{1}{1-u} \frac{du}{d\vartheta}$$

Hier schließt nun Marchi, daß der letzte Bruch immer sehr klein bleibt, weil der Nenner (er schreibt $100 - u$, wobei u in $\%$ anzugeben ist) bedeutend größer ist als $du : d\vartheta$; in der Tat kann diese Schreibweise zu dem angegebenen Fehlschlusse führen. Wird dieses zugegeben, dann folgt natürlich die von Marchi gegebene Gleichung

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{d\vartheta} = \frac{1}{E} \frac{dE}{d\vartheta}$$

d. h. die relativen Zunahmen der Niederschlagshöhen sehr nahe der relativen Zunahme des Wasserdampfgehaltes proportional¹⁾. Bei der Temperatur $-10^{\circ} C$ ist nun $E = 2.09 \text{ mm}$ und $dE = 0.17 \text{ mm pro } 1^{\circ} C$, daher $\frac{1}{E} \frac{dE}{d\vartheta} = \frac{1}{12}$, für 30° etwa $\frac{1}{17}$ im Mittel $\frac{1}{15}$. Selbst in den weiten Grenzen zwischen -10° und $+30^{\circ}$ Lokaltemperatur würde daher bei Erniedrigung um 1° die Niederschlagsmenge um $\frac{1}{15}$ steigen, womit eine relativ geringe Herabdrückung der Schneelinie verbunden sein würde, während die Temperaturerniedrigung um 1° an sich die Schneegrenze um 170 m herabdrücken würde. So scheint der Schluß berechtigt, daß der Einfluß der Niederschlagsmenge auf $dL : d\vartheta$ vernachlässigt werden kann, und dessen Wert als negativ anzusehen ist. Daß dieser Schluß nicht berechtigt ist, ist leicht ersichtlich. Der absolute Feuchtigkeitsgehalt in der Gletscherregion ist allerdings sehr klein; der relative Feuchtigkeitsgehalt ist aber meist sehr groß, $1 - u$ ist daher eher als klein zu bezeichnen: denn bei den niedrigen Temperaturen in der Hochgebirgsregion bringt die für die Ebene nicht gesättigte, selbst wasserdampfarne Luft im aufsteigenden Luftstrom stets so große Quantitäten Wasserdampf, daß über den Gletschern beständig Niederschlag stattfinden muß. Wenn trotzdem auch im Hochgebirge

¹⁾ Marchi, l. c. S. 39/40.

relativ häufig schöne Tage, blauer Himmel u. s. w. ist, so rührt dieses daher, daß die Kondensation unausgesetzt, nicht plötzlich stattfindet; aber für die Niederschlagsmenge ist dieses ja gleichgültig.

Es ist jedoch die Annahme, daß die Niederschlagsmenge in der Gletscherregion proportional dem Sättigungsdefizit ist, unrichtig. Wenn auch die Veränderlichkeit der Niederschlagsmenge nicht der Verdunstung des Meeres zugeschrieben werden kann, weil zugegeben werden muß, daß nur ein geringer Teil der Meeresdämpfe auf das Land geführt wird, so ist es der Wasserdampf, der durch Verdunstung in der Ebene gebildet wird, der den wesentlichsten Anteil an der Niederschlagsmenge in der Hochgebirgsregion hat; und man könnte daher die Niederschlagsmenge proportional setzen

$$h = C (u_0 E_0 - u E)$$

wo E_0 die Maximalspannung zur Temperatur ϑ_0 in den dem Gebirge angrenzenden Flachland- oder Talregionen bedeutet, u_0 die relative Feuchtigkeit in diesen und E, u dieselbe Bedeutung für das Gebirge haben. Während nun aber $u E$, der absolute Feuchtigkeitsgehalt über dem Gletscher nahe konstant ist, wird $u_0 E_0$ bei einer Erhöhung der Temperatur steigen (trotzdem u_0 für höhere Temperaturen meist niedriger ist), womit eine Vermehrung der Niederschlagsmenge h verbunden ist: $dh : d\vartheta$ ist daher positiv.

Wäre nun $d\alpha : d\vartheta$ negativ, so würde wachsenden Temperaturen eine Vermehrung der Niederschläge entsprechen, welche nicht durch die Ablation kompensiert werden würde, und es würde der Vorstoß und die maximale Ausdehnung der Gletscher den höheren Temperaturen entsprechen. Allein so einfach liegen die Verhältnisse nicht; der Ausdruck $\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\vartheta}$ wird positiv sein: wachsenden Temperaturen entsprechen wachsende Ablationen. $dL : d\vartheta$ ist jedenfalls negativ, wenn auch dem absoluten Betrage nach nur sehr mäßig, denn wachsenden Temperaturen entspricht eine Verkürzung des Firnfeldes. Sei nun

1. $d\vartheta$ positiv: die Temperatur steigt. In Gleichung (4) sind die beiden ersten Ausdrücke subtraktiv und nur der letzte positiv; die Vermehrung der Niederschläge wird aber mit derjenigen der Ablation nicht gleichzeitig einsetzen; die Vermehrung der Niederschläge wird sofort mit der wärmeren Temperatur auftreten, während die Ablation wegen der schlechten Wärmeleitung des Eises anfänglich nur an der Oberfläche steigt und erst in dem Maße, als sich Spalten und Klüfte gebildet haben, durch welche die Wärme in die Tiefe dringen kann, auch die innere Ablation sich steigert. So kommt es, daß bei Eintritt warmer Temperaturen anfänglich noch ein Gletschervorstoß stattfindet, oder der in niedrigeren Temperaturen erfolgte Vorstoß sich fortsetzt und erst einige Zeit später Stillstand und Rückzug erfolgt.

2. Anders ist es bei negativem $d\vartheta$; es ist dann dh negativ und $d\alpha$ negativ, das heißt Niederschlagsmenge und Ablation werden geringer, aber ohne Verspätung. Es werden bei Erniedrigung der Temperatur ohne wesentliche Verspätung fast momentan die Gletschervorstöße einsetzen, bei darauffolgender Erhöhung der Temperatur noch einige Zeit fortschreiten und erst

einige Zeit später die Stillstände eintreten, so daß mit einer selbst nicht sehr erheblichen Erniedrigung der Temperatur schon ein beträchtlicher Vorstoß verbunden sein kann.¹⁾

Dieses muß sich denn auch zunächst in den kleinen Schwankungen der Gletscher zeigen. Bald nach dem Eintritte der Nacht bereitet sich ein Vorstoß vor, der am Morgen noch lange nicht beendet ist und erst in den späten Vormittagsstunden dem Rückzuge Platz macht. Diese Veränderungen werden nur dann im Gleichgewichte stehen, wenn die Tage bedeutend länger sind, da ein beträchtlicher Zeitraum, vielleicht das erste Viertel bis zu einem Drittel des Tages, noch dem Gletschervorstoße zugute kommen muß. Bezeichnet man mit T die Tageslänge, mit N die Nachtlänge und sei $T = nN$ und, wenn die allerdings ineinander übergehenden Prozesse als gleichmäßig verteilt angesehen werden, $\frac{1}{m}T$ noch dem Gletschervorstoße günstig, so wird Gleichgewicht zwischen täglichem Vorstoß und Rückzug, also stationärer Zustand des Gletschers bestehen, wenn

$$T - \frac{1}{m}T = N + \frac{1}{m}T$$

woraus

$$m = \frac{2n}{n-1}, \quad n = \frac{m}{m-2}$$

folgt. Für $n = 2$, wie dieses in mittleren Breiten zur Zeit des Sommersolstiziums der Fall ist, müßte für den Zustand des Gleichgewichtes $m = 4$ sein.

Diese Veränderungen, für das Auge unmerklich, geben aber sofort eine Erklärung für die gleichartigen, viel bedeutenderen jährlichen Schwankungen. Wären Sommer und Winter gleich lang, so würden die Gletschervorstöße überwiegen; die obigen Verhältnisse sind unmittelbar hierauf anwendbar, wenn man T, N durch S, W ersetzt, wobei S die Länge des Sommers, W diejenige des Winters nennt.

Die quantitativen Verhältnisse können jedoch erst überblickt werden, wenn man auf die von den Temperaturen und Feuchtigkeiten abhängigen wirklichen Werte der Ablationen und Niederschlagsmengen Rücksicht nimmt, deren Zusammenhang aber kein so einfacher ist. Eher ließen sich Beziehungen auf Grund von empirisch zu sammelnden Daten aufstellen.

Sei von einem beliebigen, aber fixen Anfangspunkte gezählt, in der Richtung des Gletscherstromes das Ende der Gletscherzunge in dem Abstände w_1 in seinem stärksten Vorstoß am Tage,²⁾ w_0 bei seinem stärksten Rückzug in der Nacht, so ist $w_1 - w_0$ die Tagesschwankung und $\frac{1}{2}(w_1 + w_0)$ die

¹⁾ Es bezieht sich dies allerdings nur auf mäßige Temperaturschwankungen; größere Schwankungen von mehreren Graden können die Beweglichkeit des Gletschers stark alterieren.

Zuverlässige Temperaturbeobachtungen zur Zeit der Gletscherschwankungen liegen noch nicht sehr viele vor. Einige Bemerkungen hierüber s. Rabot l. c. S. 248.

²⁾ Die Tagesschwankung ist wohl kaum zu konstatieren und ist nur der Konsequenz der Entwicklungen wegen eingeführt

mittlere Stellung für diesen Tag. Bildet man aus den sämtlichen w während eines Jahres das Mittel

$$W = \frac{\sum w}{n}$$

so erhält man den mittleren Jahresstand und sind w_m der Maximalwert, w_m' der Minimalwert so ist $w_m - w_m'$ die Jahresschwankung. Bildet man ebenso während einer großen Anzahl von Jahren das Mittel

$$W_0 = \frac{\sum W}{m}$$

so gibt dieses einen mittleren Stand des Gletschers während der betrachteten Epoche, und aus den Maximal- und Minimalwerten W_m und W_m' erhält man die Epochenschwankung $W_m - W_m'$. Täglicher, jährlicher und Epochenstand des Gletschers stehen daher in Zusammenhang mit dem täglichen, jährlichen und Epochenstand der meteorologischen Elemente; tägliche, jährliche und Epochenschwankung hängen zusammen mit den Schwankungen der meteorologischen Elemente.

Um zunächst nur den Zusammenhang mit der Temperatur zu verfolgen, möge vorausgesetzt werden, daß sich aus langjährigen Beobachtungen ein gewisser mittlerer Stand des Thermometers ergibt, dem ein gewisser mittlerer Stand des Gletschers entspricht. Eine geringfügige Änderung der Temperatur wird einen erheblichen Vorstoß zur Folge haben, der bei nachfolgender Erhöhung der Temperatur nicht sofort wieder zurückgeht. Um die Beziehungen zwischen den Oszillationen des Gletschers und denjenigen der Temperatur genauer zu verfolgen, möge angenommen werden, daß

zu den Temperaturen $\vartheta_1 \quad \vartheta_2 \quad \vartheta_3 \dots \vartheta_n$
 die Gletscherstände $w_1 \quad w_2 \quad w_3 \dots w_n$

gehören. Vollzieht sich der Temperaturwechsel in einer periodischen Reihe, so daß allgemein die Temperaturen ϑ durch eine periodische Funktion ausgedrückt werden, derart, daß zu

den Zeiten $t_0 \quad t_0 + \frac{1}{4} T \quad t_0 + \frac{1}{2} T \quad t_0 + \frac{3}{4} T \quad t_0 + T \quad t_0 + \frac{5}{4} T \dots$
 die Temperaturen . . . $\Theta \quad \Theta - \vartheta_0 \quad \Theta \quad \Theta + \vartheta_0 \quad \Theta \quad \Theta - \vartheta_0$

gehören, so können die Gletscherstände dann aber nicht durch eine harmonische Funktion derselben Art ausgedrückt werden, denn maximaler Rückzug und Vorstoß fallen nicht mit den Temperaturextremen zusammen. Es tritt eine Verspätung für den maximalen Vorstoß und eine viel geringere, aber immerhin doch vielleicht noch zu berücksichtigende Verspätung für den Rückzug, eine Phasenverschiebung auf. Trägt man die Zeiten als Abszissen, Temperatur und Gletscherstände als Ordinaten auf, so wird unter der Voraussetzung, daß die Temperaturen eine einfache harmonische Reihe bilden, C_ϑ (Fig. 6) die Temperaturkurve, C_w die Gletscherstandskurve darstellen, so daß Maximaltemperatur B und Minimalstand des Gletschers B_1 einerseits und Minimaltemperatur D gegen Maximalstand des Gletschers D_1 gegeneinander um verschiedene Beträge verschoben sein werden. Mitteltemperaturen und mittlere Gletscherstände werden dann natürlich auch nicht zusammenfallen.

Solche Funktionen lassen sich bekanntlich durch Fourier'sche Reihen ausdrücken; eine periodische Funktion¹⁾, die den gestellten Bedingungen genügt, ist aber auch z. B.:

$$w = W + w_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left\{ t - \left[t_0 + t_1 \sin \frac{2\pi}{T} (t - t_2) \right] \right\}$$

in welcher t_0, t_1, t_2 noch näher zu bestimmende Konstante bedeuten:

Es werden daher, wenn $2\pi : T = n$ gesetzt wird, in der Nähe von $t = t_2, t_2 + \frac{1}{2} T, t_2 + T : w = W + w_0 \sin n(t - t_0)$, die Mittelwerte der Phasenverschiebung; da diese den Punkten $A_1, C_1, E_1 \dots$ entsprechen, so muß t_2 nahe gleich $\frac{1}{2} T$ sein; dann wird

$$w = W + w_0 \sin n \left\{ t - \left[t_0 + t_1 \sin n \left(t - \frac{1}{2} T - \tau \right) \right] \right\}$$

wo τ nur einen kleinen Betrag erreichen kann; die Gletscherstände für $t = 0, \frac{1}{2} T, T \dots$ werden dann gleich

$$W + w_0 \sin n \left\{ t - \left[t_0 + t_1 \sin n \tau \right] \right\}$$

so daß hier ein kleines Korrektionsglied zu t_0 auftritt in der Art, daß die Zwischenzeiten zwischen den mittleren Gletscherständen, zwischen den Vorstößen und Rückzügen einerseits und zwischen den Rückzügen und Vorstößen andererseits nicht ganz gleich werden. Je größer τ desto größer ist dieser Unterschied, und zwar bedeutet ein positives τ eine Vergrößerung der Phase in A_1 und E_1 und eine Verkleinerung in C_1 , also eine Vergrößerung der Zwischenzeit der mittleren Gletscherstände zu beiden Seiten des Vorstoßes.

Da nun die Erfahrungen ergaben, daß tatsächlich die Epochen der maximalen Vorstöße oft sehr beträchtlich verspätet erscheinen, und die Dauer des Vorstoßes meist länger als diejenige des Rückzuges ist, so wird man τ nicht Null setzen können.

Die Zeitskala ist dabei so gewählt, daß gemäß der Funktion für ϑ die mittleren Temperaturen den Zeiten $t_0, t_0 + \frac{1}{2} T \dots$ entsprechen; es folgt daraus daß man als mittlere Gletscherstände diejenigen zu wählen hat, welche dieser Zeitskala entsprechen. Dieselbe muß nicht notwendig einer gleichmäßigen Zeiteinteilung entsprechen, sondern es kann zwischen dieser Zeitskala und der gleichmäßigen Zeiteinteilung nach Tagen oder Tagesbruchteilen, z eine Beziehung bestehen

$$t = f(z).$$

In Ermanglung anderer Angaben kann t direkt aus der Temperatur ermittelt werden, wenn man diese als in einfacher harmonischer Funktion fortschreitend betrachtet nach der Beziehung

$$t = t_0 + \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{\vartheta_0 - \vartheta}{\vartheta_0}.$$

In dieser Zeitskala ist nun die Zeitdauer des Gletschervorstoßes

$$\begin{aligned} C_1 E_1 &= \Delta T_+ = (T + t_0 + t_1 \sin n\tau) - \left(\frac{1}{2} T + t_0 - t_1 \sin n\tau \right) \\ &= \frac{1}{2} T + 2 t_1 \sin n\tau. \end{aligned}$$

¹⁾ Diese Funktion als Ersatz für periodische Reihen, deren Konvergenz nicht immer nachzuweisen ist, kann, wie ich bei anderer Gelegenheit zeigen werde, auch in anderen Fällen mit Vorteil eingeführt werden.

Die Zeitdauer des Gletscherrückganges ist

$$A_1 C_1 = \Delta T_- = \left(\frac{1}{2} T + t_0 - t_1 \sin n \tau\right) - (t_0 + t_1 \sin n \tau) = \\ = \frac{1}{2} T - 2 t_1 \sin n \tau$$

daher die Dauer des Vorstoßes um

$$\Delta = 4 t_1 \sin n \tau \quad (5)$$

länger als die des Rückganges.

Der Maximalstand des Gletschers ist $W + w_0 \cos(t_0 - t_1 \cos n \tau)$
 der Minimalstand desselben $W - w_0 \cos(t_0 + t_1 \cos n \tau)$;

würde $t_0 \mp t_1 \cos n \tau = 0$ sein, so würden die Extreme des Gletscherstandes mit den Temperaturextremen zusammenfallen; es ist daher

$$\Delta T'_- = t_0 - t_1 \cos n \tau$$

die Zeit der Verspätung des minimalen Gletscherstandes und

$$\Delta T'_+ = t_0 + t_1 \cos n \tau$$

die Zeit der Verspätung des maximalen Gletscherstandes und die Zeitmomente für diese beiden Phasen sind bez.: $\frac{1}{4} T + T'_-$ und $\frac{3}{4} T + T'_+$ worauf die nächste extreme Phase zur Zeit $\frac{5}{4} T + T'_-$ folgt. Damit wird die Zwischenzeit zwischen dem Minimalstand und darauffolgenden Maximalstand

$$\frac{1}{2} T + 2 t_1 \cos n \tau$$

und die Zeit zwischen dem Maximalstand und dem darauffolgenden Minimalstand:

$$\frac{1}{2} T - 2 t_1 \cos n \tau$$

so daß die Zwischenzeit vom maximalen Gletscherstand zum vorangehenden Minimalstand um

$$\Delta_1 = 4 t_1 \cos n \tau \quad (6)$$

länger ist als zum folgenden Minimalstand.

Wenn einmal durch ausgedehnte Beobachtungen an Gletschern die Beträge Δ und Δ_1 mit einer halbwegs ausreichenden Genauigkeit bekannt sein werden, so können die Konstanten t_1 und τ aus den beiden Gleichungen (5) und (6) bestimmt werden; der Wert von t_0 ergibt sich dann aus den beobachteten Zeiten des Maximal- und Minimalstandes selbst.

$2 w_0$ ist die Amplitude der Gletscherschwankung, und es ist nicht zu übersehen, daß auch diese nicht konstant sein muß; doch wird hier keine Abhängigkeit von der Zeit, sondern vielmehr eine direkte Abhängigkeit von der Temperatur vorteilhafter sein.



IV. Kapitel.

Die eiszeitliche Vergletscherung.

So wie in der Gegenwart — geologisch gesprochen — das heißt in den der historischen Forschung zugänglichen Zeiten, Schwankungen in der Ausdehnung der Gletscher konstatiert worden sind, so war auch in prähistorischen Zeiten die Ausdehnung der Gletscher eine sehr verschiedene. In ihrer größten Ausdehnung umfaßten sie Gebiete, welchen gegenüber die Ausdehnung der heutigen Gletscher, wenn von denjenigen der arktischen Regionen abgesehen wird, beinahe als geringfügig zu bezeichnen sind.

Die Tatsachen, aus denen auf das Vorkommen von Gletscherströmen in gegenwärtig eisfreien Gegenden geschlossen werden kann, sind: das Auftreten von ortsfremdem Material (zum Beispiele Granit in einer vollständig von Urgestein freien Gegend), welches vereinzelt, in Form von riesigen Gesteinstrümmern, erratischen Blöcken, auftritt; oder als Anhäufung von erratischem Material, das durch den Gletschertransport verfrachtet wurde, Moränen; weiters die Schotterterrassen (das alpine Diluvium der älteren Geologie), welche die durch das Gletscherwasser nach außen geführten Schotterablagerungen bilden; und endlich das Vorkommen von Seen.

Ortsfremdes Material auf dem Festlande ist oft eine Charakteristik für Gletscherverfrachtung. In früheren Zeiten glaubte man allerdings in demselben die Wirkung des Wassers zu sehen und der Name Diluvium ist auf diese „Überflutung durch Wasser mit Geschiebetransport“ zurückzuführen. Namentlich auch für die norddeutschen Erratika war diese sogenannte Drifttheorie lange Zeit vorherrschend, bis dieselbe durch Otto Torell auch für Deutschland endgiltig durch die Glazialtheorie ersetzt wurde. Man findet oft mächtige Blöcke, die nicht durch das Wasser, sondern nur auf dem Rücken von Gletschern weitertransportiert werden konnten. Sie zeigen hochgeschliffene wie polierte Flächen; manche, auch kleinere, haben mehr oder weniger tiefgehende Risse, „Kritzen“ oder „Schrammen“, sogenannte gekritzte Geschiebe. Ob auch Wasser gekritzte Geschiebe liefern kann, ist eine noch offene Frage. Nach Uhlig¹⁾ kommen mitunter in Murbrüchen solche vor. Collomb und Charles Martins haben 1845 gezeigt, daß gekritzte Geschiebe im fließenden Wasser die Eisspuren verlieren, in sandhaltigem, heftig bewegtem Wasser schon nach wenigen Stunden.²⁾

¹⁾ Erdgeschichte, S. 518.

²⁾ Comptes rendus, Bd. 20, S. 1718.

In vielen Fällen läßt sich aus der Art des Gesteines der Ursprungsort feststellen; so deutet zum Beispiel Phyllit auf das Zillertal, Hornblende auf das Engadin u. s. w.

Die Moränen sind als Endmoränen erhalten, von verschiedenem Verfestigungs- und Verwitterungsgrade, welcher auf ihr Alter schließen läßt, und mit nach außen laufenden Schotterterrassen verbunden, welche auf weiten Flächen die beim Abschmelzen durch das Wasser nach außen geführten Moränentrümmer aufgespeichert enthalten.

Die Höhe der Moränenwälle ist mitunter ganz beträchtlich. In Australien sind solche bis zu 200 *m* Höhe gefunden worden;¹⁾ in Amerika bilden sie nach Chamberlin²⁾ Hügelketten von mehreren hundert *km* Länge, 15 bis 20 *km* Breite und bis zu 150 *m* Höhe. Im Bereiche der padanischen Gletscher erreichen sie die Höhe von Mittelgebirgen.³⁾ Sie bilden dort mitunter weite Bogen, die nach Gastaldi als Moränenamphitheater bezeichnet werden; ähnliche bogenförmig angeordnete Moränenhügellandschaften bezeichnet man auf der Nordseite der Alpen und in Norddeutschland, England, Skandinavien als Drumlins.

Durch die Bewegung der Gletscher findet man ferner vielfach die Unterlage nicht nur abgeschliffen, sondern größere, steilere Erhebungen wurden abgetragen, so daß runde, halbkugelförmige Kuppen blieben, welche als Rundbuckelformen, französisch *roches moutonnées*, bezeichnet werden.

In Deutschland wurden die ersten gekritzten Geschiebe 1836 in Rüdersdorf bei Berlin bemerkt, aber erst 1875 hat der Schwede Otto Torrel ihre Bedeutung erkannt und bald darauf wurden in verschiedenen Gegenden Streifungen in zwei verschiedenen Richtungen, zwei verschiedenen Gletscherströmen zukommend, erkannt. An verschiedenen Stellen wurden Dislokationen bemerkt, die von einigen tektonisch gedeutet wurden (V. Köhnen, H. Credener), von anderen der Eiswirkung zugeschrieben wurden (F. Johnstorp, G. Behrendt, J. Geikie).

Spuren einer ausgedehnten früheren Vergletscherung wurden überall gefunden. Die Engländer bezeichnen den zähen, steinigen Lehm, ein Konglomerat von ortsfremdem, ortsheimischem Material mit einem festen interstitiellen Bindemittel als *till* oder *boulder clay*. Die Deutungen sind jedoch nicht immer zusammenfallend. Anhäufungen von *till* zu großen Hügeln geben die Terminal- oder Endmoränen, während oft große, weite Strecken von *till* als subglazialen Ursprungs, als Grundmoränen gedeutet werden und die zwischen zwei Lagen von *till* liegenden Schichten von nicht oder nur wenig verfestigtem gewöhnlichen Sand (*gravel*) mit den Schottern identifiziert werden. James Geikie⁴⁾ beschreibt diesen *till* folgendermaßen: *The till is quite local in character; for in districts where sandstone occurs most abundantly, the stones in the clay like-*

1) Geikie, *The great Ice Age*, 3. Aufl., 1894, S. 718.

2) *Ibid.* S. 741.

3) Penck-Brückner, *Die Alpen im Eiszeitalter*, S. 746.

4) *l. c.* S. 13.

wise consist almost exclusively of sandstone. And similarly, in regions, where hard volcanic rock prevails, the overlying till is invariably crowded with fragments of the same. Doch werden (S. 192) die erratics, which do not belong to the hills upon they rest, von dem ortszugehörigen Material im till getrennt.

Aber auch im till selbst — ich werde diesen Namen beibehalten — ebenso wie auch in den Zwischenschichten, finden sich fossile Ablagerungen, während sich Moränenmaterial doch gerade durch den Mangel an fossilen Resten hervorhebt.

Eigentliche Moränen erscheinen ebenfalls, oft mit Humus bedeckt und bewachsen, die sog. kames (auch Greenhills genannt).¹⁾

Von den Moränen ausgehend, breiten sich Terrassenfelder (terraces and flats) aus; in der Richtung des Eisstromes finden sich aber Hügelreihen (ridges), welche wie Rippen auseinanderlaufen, und den Lauf von subglazialen und supraglazialen Gletscherbächen und Wildbächen darstellen und welche Chamberlin (s. unten) als Åsars bezeichnet.

Die Schotterterrassen außerhalb der Endmoränen bezeichnet Chamberlin als Pitted Plans or Sand Plains und benützt für dieselben auch den von Shaler vorgeschlagenen Namen frontal aprons. Von diesen strahlen in die distal gelegenen Flußtäler Fortsetzungen aus, welche er mit dem Namen valley trains bezeichnet.

Es wird allgemein zugegeben, daß die Spuren von einstigen Vergletscherungen eine Steigerung des heutigen Gletscherphänomens andeuten und daß diese außerordentlich weitgehende Vereisung ein allgemeines, sich über die ganze Erde ausbreitendes Phänomen darstellt, so daß man von einer Eiszeit sprechen kann. Drygalsky erklärt diese allgemeine Vereisung als ein „Glied in dem Erstarrungsprozeß der Erde“, wie dies auch durch die Strukturverhältnisse: Schichtung, Faltungen, Verwerfungen im Eise, die ganz denjenigen im Gneis ähnlich sind, bestätigt wird.²⁾ Rückzüge und Vorstöße sind nur Stillstände und Fortschritte in dem fortschreitenden Abkühlungsprozeß. Einzelte gegenteilige Ansichten, wie z. B. diejenige, welche S. Günther in seiner Geophysik äußert: „Die Eiszeit stellt sich uns als ein regionales, keineswegs

¹⁾ Geikie, l. c. S. 185. Durch Wasseranschwemmung entstandene, also fluvio-glazialen Ursprung verratende Geschiebehügel bezeichnet er (S. 170) mit dem Namen Åsars; aber S. 210 wird die Ansicht Jamiesons über „kames“ zitiert: The material they consist of and its mode of arrangement point to streams of water flowing over the surface of the glaciers and washing the gravelly débris into heaps along their margin (Quarterly Journal of Geology 1874, S. 329) und dieser Ansicht wird nicht widersprochen. Ob die Asar und kames so scharf zu trennen sind, entzieht sich meiner Beurteilung. S. 468 werden alle boulder-walls = Geschiebewälle als kames bezeichnet; und S. 469 sagt Geikie: The German kames are true gravelly moraines. Chamberlin bemerkt (Geikie, l. c. S. 747) daß die kames Schotterhügelketten sind, die sich parallel zur Eisgrenze erstrecken und die Åsars oder Eskers Hügelketten, die parallel zur Eisbewegung laufen; jedoch stehen die beiden nicht aufeinander senkrecht, sondern gehen ineinander über.

²⁾ Grönlandexpedition, S. 538.

universelles Ereignis dar¹⁾ können übergangen werden. Allerdings haben in früheren Zeiten Peschel²⁾ und Fr. v. Hauer³⁾ aus der ungleichen Verteilung der eiszeitlichen Gletscher geschlossen, daß die Eiszeit kein allgemeines Phänomen wäre; doch haben die seitherigen Ergebnisse der Forschung diese Ansicht widerlegt.

Für die Ausdehnung der eiszeitlichen Vergletscherung in den Alpen bilden die klassischen Arbeiten von Penck und Brückner⁴⁾ die nötigen Materialien. Wenn auch in vielen Punkten, namentlich für die französischen und italienischen Gletschergebiete manche andere Originalarbeiten von großer Wichtigkeit wären, so konnte von denselben hier, wo es sich nur um eine übersichtliche Zusammenstellung handelt, Umgang genommen werden. In jenen Fällen, wo es sich um eine kritische Sichtung von Ansichten handelt, ist übrigens das Nötige erwähnt.

Die Ausdehnung der Vergletscherung gegenüber der jetzigen war sehr verschieden; weit im Vorland erstreckte sie sich in Bayern, Salzburg bis Ober-Österreich, viel weniger weit gegen Süden, in die piemontesische Ebene, in welcher sich jedoch ausgedehnte Schotterterrassen ausbreiteten. Im westlichen Teile, sowie in den Ostalpen überschritten die Gletscher das Alpengebiet nirgends.

„Der 44. Grad bezeichnet die südliche Grenze der eiszeitlichen Alpen-gletscher, die hier durchwegs in ziemlich ansehnlicher Meereshöhe endeten.“⁵⁾ Im Tal der Béone bei Digne, im Durancetal bei Sistéron finden sich die äußersten Moränenspuren. Etwas weiter waren die Gletscher im französischen Alpenland vorgedrungen; bei Vinay an der Isère das heutige Alpenland verlassend, zieht sich die Grenze über Beaurepaire nach Vienne, Lyon; von hier über Villefranche, Châtillon, nach Bourg, wo sich die helvetischen Gletscher, den Jura von Süden umgreifend, nordwärts bis Salins ergossen.⁶⁾

Die helvetischen Gletscher waren durch den Jura nur teilweise am Vordringen gehindert. Über den Paß von Vallorbe und an mehreren Übergängen westlich vom Neuchateler und Bieler See, möglicherweise — „aber es liegen bisher keinerlei Anhaltspunkte dafür vor“⁷⁾ — nördlich und südlich von der Weißensteinkette bis zum Mt. Raimeux und Mt. Moron waren die Alpen-gletscher über den bereits gehobenen Jura hinübergedrungen und führten dabei massenhaft Gesteine aus jurassischem Boden mit. Hiezu gesellte sich dann noch die lokale Vergletscherung des Jura selbst.

Nordwestlich schließen dann an die Moränen des Mölinerfeldes und diejenigen von Liestal bei Basel, wo der Rheingletscher anstieß. Von Basel über Rhein-

¹⁾ II. Bd. S. 342.

²⁾ Völkerkunde 1877, S. 43.

³⁾ Geologie, II. Auflage 1878, S. 698.

⁴⁾ Penck, „Die Vergletscherung der deutschen Alpen 1882“, und Penck und Brückner, „Die Alpen im Eiszeitalter“. 1903 ff.

⁵⁾ Penck, „Die Alpen im Eiszeitalter“. S. 717.

⁶⁾ Für den Rhonegletscher s. auch Falsan und Chantre „Monographie géologique des anciens glaciers et du terrain erratique de la partie moyenne du bassin du Rhone“ 1880 und Falsan, „La Période Glaciaire“ 1889.

⁷⁾ Brückner, „Die Alpen im Eiszeitalter“. S. 487.

felden und Brugg zieht dann die Grenze der Moränenzüge nach Schaffhausen und überschreitet, das Becken des Bodensees einschließend, hier den Rhein.

Während sich die Schotterterrassen hier bis zur Donau erstrecken, zieht der Moränengürtel einen viel engeren Kreis über Kempten, Kaufbeuern (Lechgletscher), Wolfrathshausen, Holzkirchen (Isargletscher), Aßling, Gars (Inngletscher), Nunreuth, Mattighofen (Salzachgletscher) nach Gmunden (Traungletscher), von wo an die Gletscher nicht mehr das jetzige Flachland betreten haben, wengleich sich die Schotterterrassen auch hier noch bis an die Donau erstrecken. Über Kremsmünster und Steyr (Steyr- und Eönnsgletscher), Waidhofen a. d. Ybbs, Wildalpen (steirische Salza), Maria Zell im Erlaufthale gegen die Abhänge des großen Göller und den Lahnsattel zu ziehen die Moränen, während schon im Tale der Traisen bei St. Egid bisher keine Moränen, sondern nur Schotterterrassen nachgewiesen werden konnten.

Von Sistéron und Digne an, ebenfalls im Hochgebirge selbst verlaufend, im oberen Vartale oberhalb Guillaume zieht sich die Grenze gegen das Piemontesische zu über den Col di Tenda und Mt. Clapier, sich oberhalb Cuneo im Sturatale nordwärts wendend, nach St. Damiano im Mairatale, Paesana im Potale, Perosa im Tale des Chisone und betritt mit den Moränenwällen, welche das Hügelland von Rivoli im Tale der Dora Riparia bilden, das Flachland. In den Tälern der nördlichen Stura und des Orco noch nicht in die Ebene herabreichend, tritt die Grenze im Tale der Dora Baltea in den großen Amphitheatern von Jvrea, die Serra genannt, neuerdings in die Ebene; doch war das nächstfolgende Tal der Sesia, vom Mt. Rosa kommend, nur wenig vergletschert; die Moränen reichen nur zwischen Varolla und Borgosesia herab und erst der insubrische Gletscher (Tessin-Adda-Gletscher), welcher auch durch Pässe, namentlich den Gotthardpaß, Eisströme von Norden erhielt, zeigen zum Teile großartige Moränenamphitheater in der Poebene. Von Somma im Tessintale und Varese über Cantu (südlich von Como), Casate nuova finden sich Moränenwälle. Von hier aber bis zum Gardasee sind wieder wenig Gletscherspuren; die Täler zeigen den Charakter unvergletschert gebliebener Alpentäler und nur das Oglialtal war stärker vergletschert und Moränen bei Rovato am Iseosee zeigen die Grenzen der eiszeitlichen Vergletscherung.

Mächtig sind die Schotterterrassen der südlichen Alpengletscher. Während der Deckenschotter der nördlichen Alpen nur selten eine Mächtigkeit von 10 *m* hat, sind schon die zu den ligurischen und cottischen Alpen gehörigen Schottermassen, die bis Bra am Tanaro reichen, großartig entwickelt. Der mit dem Deckenschotter zu identifizierende Ferretto erreicht im Piemontesischen zum Beispiel bei Mongrando östlich von Jvrea eine Mächtigkeit von über 80 *m*; ein bei Strambino (südlich von Jvrea) geführtes Bohrloch erreichte erst in der Tiefe von 55 *m* das marine Pliozän; und noch größer ist die Mächtigkeit weiter östlich. In Mailand zeigte ein Bohrloch bis 29 *m* Tiefe grobes Geröll des Niederterrassenschotters, darunter bis 53 *m* Tiefe Ferretto, weiter bis 96 *m* Tiefe abwechselnd Geröll und Sand und bis 146 *m* Tiefe (also 24 *m* unter dem Meeresspiegel) Sand und blauen Ton.

Einen ähnlichen gewaltigen Umfang nehmen die Gletscher der Eiszeiten in anderen Gegenden ein. Hiefür hat eine sehr gute Zusammenstellung James Geikie in seinem Werke „The great Ice Age“ gegeben. In ganz Norddeutschland, tief herab bis zur mährischen Grenze und darüber hinaus, findet sich erratisches Material, als dessen Ursprungsort Amund Helland Skandinavien nachwies; die skandinavischen Gletscher haben hienach eine noch viel gewaltigere Ausdehnung gehabt. Fast ganz Großbritannien war im Eise begraben; nur wenige Inseln (Nunatakers) ragten hervor. Island, die Orkney-, Shetlands-, Hebriden-Inseln waren eisbedeckt.¹⁾ Südlich reichte die Grenze bis zum Bristol-Channel, Severn und ging dann südlich von den Cottswood-hills bei Northampton zur Themse.²⁾ Nur die Umgebungen von Leeds und Sheffield scheinen eisfrei gewesen zu sein.

Von der Mündung der Themse zog die Eisgrenze über die Rheinmündung am Rhein entlang bis Köln nach Kassel; von hier zum Erzgebirge und Riesengebirge, zu den Sudeten, nördlich von den Karpathen³⁾; von Lemberg an ist die Grenze durch eine Linie gegeben, die ungefähr gegen Berditschef (westlich von Kief) läuft, von hier nach Krementschig am Dnjeper, Pultawa, Bjelopolja, Smolensk (Orel, Kursk und Charkow freilassend), dann nach Tula, weiter in das Dnjeper- und Dontal bis etwa in die geographische Breite von Charkow große Zungen vorsendend; dann nach Nischni-Nowgorod; von hier zwischen Wiatka und Perm durch, bei Tscherdju die Kama übersetzend, zum Ob bei Tschematschewsk zum Tollpaß des Ural und, diesen südlich bis zum Berge Jelpingnor einschließend, dann längs des Ob nach Nowaja Zemlja.

Zahlreiche, gut erhaltene Gletscherschliffe zeigen, daß auch die Gletscher in Westgrönland früher eine größere Ausdehnung als jetzt hatten.⁴⁾

Der Ural, der gegenwärtig eisfrei ist, war ehemals im nördlichen Teile vollständig vergletschert; ebenso hatte die Hohe Tatra beträchtliche Gletscher⁵⁾; Riesengebirge und Sudeten waren vergletschert.⁶⁾

Im Schwarzwald waren schon 1862 um den Feldberg herum von Ramsay Moränen gefunden worden und neuerdings haben die Untersuchungen von Partsch eine beträchtliche Vergletscherung gezeigt.

Noch früher waren die Spuren für die Vogesen nachgewiesen. 1839 hatten Le Blanc und Renoir⁷⁾ Konglomerate gefunden, die später als Moränen

1) Geikie, l. c. S. 323.

2) Ibid. 378/81. Auch Croll hatte schon angenommen, daß zur Eiszeit die Eisströme von Skandinavien und den britischen Inseln zusammenhängend waren.

3) Vgl. hiefür auch: H. Credener, Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft, 1879, S. 75; 1880, S. 578; A. Jentzsch und F. E. Geinitz (ibid. 1881, S. 565); R. Schottky, „Beiträge zur Kenntnis der diluvialen Ablagerungen des Hirschberger Tales“, 1885; C. v. Camerländer, Verhandlungen der k. k. geolog. Reichsanstalt, 1891, S. 226.

4) Heim, l. c. S. 477, Drygalsky, „Grönlandexpedition“, S. 535.

5) Tietze, Jahrbuch der k. k. geolog. Reichsanstalt, 1877, S. 86, 1886, S. 690.

6) Partsch, „Die Gletscher der Vorzeit“, 1882 und „Die Vergletscherung des Riesengebirges zur Eiszeit“, 1894.

7) Bulletin de la société géologique de France, Bd. 10, S. 377, Bd. 12, S. 132.

gedeutet wurden. Weitere Untersuchungen rühren von Hogard,¹⁾ Collomb,²⁾ Grad,³⁾ Gerland,⁴⁾ Schumacher⁵⁾ her, so daß die Vogesen ebenso gut bekannt sind, wie die Alpen.

In den Vogesen stießen die Gletscher nach Süden bis Belfort vor; die Gletscher der Mosel und Moselette strömten 40 *km* weit und vereinigten sich bei Rémiremont; auch die Gletscher im Tal der Vologne waren stark entwickelt. Weniger weit erstreckten sich die Gletscher nach Osten; im Thurtale 15 *km* weit bis St. Amarin, im Münstertale nur auf 5 *km* Entfernung. Nach Norden sind keine sichtbaren Endmoränen.

Für die übrigen Länder folge ich der ziemlich vollständigen Zusammenstellung von Geikie, wenn sich auch seither manche Erweiterungen durch neuere Forschungen ergeben haben möchten.

Im französischen Mittelgebirge waren das Lyonnaisgebirge, Mt. Morvan, Mt. Dore, Puy de Dôme, Cantal vergletschert.⁶⁾

In den Pyrenäen finden sich westlich vom Pic des Escaliers weder auf französischer, noch auf spanischer Seite Gletscherspuren; östlich davon sind die größten Gletscher diejenigen der Garonne mit den Endmoränen in Rieux de Pelleport und die Gletscher der Ariège mit den Endmoränen bei Pamiers: Weniger stark war die Vergletscherung auf der Südseite entwickelt.

Schimper und Collomb haben das Glazialphenomen in der Sierra Nevada in Spanien studiert⁷⁾ und Pereira Cabral hat Beschreibungen von Glazialablagerungen im Tal des Duero⁸⁾ und ebenso von der Sierra Estrella in Portugal gegeben.

In Corsica wurden von Collomb, in den Appenninen von Cecchi Glazialablagerungen gefunden. In Südosteuropa, im Schardagh und Rilodagh wurden lange Zeit außer Felsenkesseln, welche auf Gletschererosion schließen ließen, keine Glazialablagerungen gefunden; neuere Untersuchungen rühren von Cvijič her.

Auf Asien übergehend, ist zunächst zu erwähnen, daß der Kaukasus stark vergletschert war; weiter der Ararat, das Karakorumgebirge, der Himalaya. Im Himalaya reichen z. B. im Kangratale am Biasflusse die erratischen Spuren bis 600 *m* über dem Meere und bis 190 *km* vom Ursprung der Blöcke⁹⁾; die Karakorumgletscher reichten einst weit in das Kashmirbecken, bis 2000 *m* unter ihrem jetzigen Niveau und 1500 *m* Seehöhe. Die Brüder Schlagintweit

1) Bulletin de la société géologique de France. 2. Serie, Bd. 2 (1845), S. 249.

2) Ibid. Bd. 2 S. 506, Bd. 3 SS. 216, 580, 1156, Bd. 6, S. 479, Bd. 9, S. 89.

3) Ibid. 3. Serie Bd. 1 (1873) S. 88.

4) Verhandlungen des 4. deutschen Geographentages zu München, 1884, S. 9.

5) Mitteilungen der Kommission für die geologische Landesaufnahme von Elsaß-Lothringen, Bd. 2, S. 18.

6) Die glaziale Natur dieser Ablagerungen hat M. Julien schon 1869 erkannt: „Des phénomènes glaciaires dans le Plateau central de la France.“

7) Biblioth. universelle de Genève, Bd. 21, S. 295.

8) „Estudos de depositos superficiaes da baccia do Douro“, Lisbon 1881.

9) Heim, l. c. S. 423.

und ebenso Drew, welche Tibet bereisten, machen jedoch keine Meldung von Vergletscherungen auf der Nordseite des Himalaya.

Stark entwickelt war die Vergletscherung des Altai, Thianschan und auch die östlich gelegenen Ketten des Stanowoy und Sajangebirges hatten ihre Gletscher; nur der an das Eismeer stoßende Teil Asiens war gletscherfrei; hingegen sind die „toten Gletscher“ (das sind nicht fließende Eismassen) der neusibirischen Inseln, sowie diejenigen Aljaskas als Reste einer ausgedehnten Vergletscherung anzusehen.¹⁾

In Afrika haben Hooker, Ball, Maw und Thomson²⁾ Endmoränen und Erratika, sowie Gletscherschliffe und gekritzte Geschiebe gefunden. Gregory hat Vereisung des Kenia mindestens 2700 *m* tiefer als jetzt, und ebenso Hans Meyer am Kilima-Ndjaru konstatiert.

In Australien wurden Gletscherspuren von Stirling im Tal des Mitta-Mitta, einem Nebenfluß des Murray, von Lendenfeld³⁾ in den australischen Alpen, von Tate nördlich der Vincentbai (bei Adelaide) gefunden; die Gletscherspuren reichen bis 1000 *m* über dem Meere herab. Ebenso zeigt Tasmania Gletscherspuren bis 700 *m* über dem Meere. Eine reichere Literatur über Gletscher findet sich über Neu-Seeland⁴⁾, wo die Gletscherspuren bis zum Meere herabreichen.

Die Kergueleninseln (in 49° südl. Breite) Südgeorgien (in 55° südl. Breite) waren früher ganz in Eis begraben.

In Südamerika hat sich für die ganze Kette der Anden, die Sierra Nevada di Santa Marta weit ausgedehnte Vergletscherung ergeben; Patagonien war südlich von — 37° Breite ebenfalls ganz in Eis gehüllt.

Reicher an Details, weil besser studiert, ist die Vereisung Nordamerikas. Nach der Darstellung Chamberlins in dem erwähnten Werk von Geikie waren damals zwei Eisströme angenommen: der Laurentiusgletscher (Lorenzogl.) und der Cordillerengletscher. Beide waren getrennt „It is not even known, that their extreme margins ever touched, although this was probably the case in the far north.“⁵⁾

Der Laurentiusgletscher zeigte den größten Vorstoß im Staate Illinois, wo er bis zur Mündung des Ohio in den Mississippi in 37° 35' Breite gieng. Von hier wendet sich die Grenze nach Osten längs des rechten Ufers des Ohio über St. Louis, Cincinnati, Pittsburg, Elmira, New-York, Long Island, Insel Nantucket (gegenüber Boston); dann von hier nördlich und nordwestlich bieugend über die Prinz Edwards-Inseln zur Mündung des Lorenzostromes. Die Magdalenen-Inseln waren nicht vergletschert; New-Schottland und New-Fundland hatten lokale Gletscher.

1) Uhlig, l. c. S. 457.

2) „Travels in the Atlas and Southern Morocco“, 1889.

3) „Australische Reise“, Innsbruck 1892.

4) Vorzugsweise Hochstetter, „Neu-Seeland“, 1867 und Lendenfeld, „Australische Reise“, 1892.

5) Geikie l. c. S. 725.

Vom südlichsten Punkte in Illinois ging die Grenze anderseits westwärts längs des Missouri bis Kansas City, von hier am Kansas River etwa 170 *km* westwärts, dann plötzlich nach Norden biegend bis zur Mündung des Niobrara-River in den Missouri, längs dieses Flusses bis Bismark (Dakota), von hier westwärts, südlich vom Missouri durch das Gebiet von Montana, dann nordwärts etwa 70 *km* östlich von den Rocky Mountains, soweit bekannt, zum Makenzie River. Als Zentrum der Vergletscherung wird die Hudsonsbai angegeben.

Der Cordillerengletscher erstreckte sich südlich bis zur Grenze zwischen Canada und den U. S., große Zungen nach Montana, Idaho und Washington bis etwa 800 *m* über dem jetzigen Meeresniveau vorsendend. Der Ausgangspunkt der Vergletscherung war nach Dawson zwischen 55° und 59° Breite in dem Plateau zwischen der Küste und den Rocky Mountains.

Entsprechend dem großen Umfange ist auch die Mächtigkeit der Ablagerungen eine ganz gewaltige. Soweit Messungen bekannt wurden, sind Schotterlagen von 20 bis 30 *m* Dicke die gewöhnlichen; es kommen aber häufig Mächtigkeiten von 150 bis 300 *m* vor; im nördlichen Teile, in Aljaska sogar bis 1000 *m* und darüber¹⁾.

Die Rocky Mountains hatten bis etwa 37° Breite eigene Gletscher. Von einer Vergletscherung der Appalachen (des Aleghanygebirges) wird nicht gesprochen.

Seither hat man zwischen den beiden noch einen dritten Gletscher, den Keewatingletscher eingeschoben, so daß im ganzen drei Eisströme unterschieden werden. Chamberlin bemerkt,²⁾ daß dieselben nicht von hohen Bergen ausgegangen sein müssen. Gerade der westliche Cordillerenstrom, obzwar von hohen Bergen ausgehend, war nicht ergiebig. Der östliche, bedeutendste, sowie der mittlere scheinen von einem Punkte auszugehen, der nördlich der Hudsonsbai — nahe dem magnetischen Nordpol, wie Chamberlin meint, gelegen war.

Schon in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts hatten Heer, Venetz, Höfer u. a. von zwei Eiszeiten gesprochen, wofür das Auftreten von Kohle in der Schweiz zwischen zwei Moränen als untrüglicher Beweis galt. Nach Geikie hatte in England schon 1875 Philipps in Yorkshire zwei Lagen till, getrennt durch Sand und Kies gefunden, und S. V. Wood unterschied bereits drei Lagen, deren unterste er basementclay nannte.

Obzwar dies nun allerdings vorerst nur als eine Lokalerscheinung aufzufassen wäre, hatte Heer schon den Schluß gezogen, daß, welches auch immer der Grund hiefür wäre, „die Erscheinung stets das ganze Alpengebiet betrifft; denn Bodenschwankungen einzelner Teile derselben haben seit der Diluvialzeit nicht stattgefunden“³⁾. Daß die Argumentation keineswegs die Schärfe eines mathematischen Beweises hat, wird zugegeben, aber „in der Geologie verfügt man jedoch selten über wahrhaft unumstößliche Beweise“⁴⁾.

¹⁾ Geikie, l. c. S. 739.

²⁾ „Localisation of Glaciation“; The Journal of Geology, Chicago Bd. 6, S. 751.

³⁾ Penck, „Die Vergletscherung der deutschen Alpen“, S. 225, vgl. hierüber das 11. Kapitel.

⁴⁾ Penck, ibid. S. 227.

Allein inzwischen haben sich die Tatsachen, welche diese Auffassung stützen, so vermehrt, daß der Schluß wohl als sicher gelten kann.

Zunächst war es die im Höttinger Graben nördlich von Innsbruck von Penck gefundene Breccie zwischen zwei Moränen, welche als entscheidender Beweis für die Ansicht Heer's anzusehen ist. Ja, noch mehr. Nachdem die Breccie von einer großen Zahl von Prozessen zeigt, die sich hinter einander abgespielt haben müssen, u. zw. *a*) Bildung eines Schuttkegels durch Absturz des umgebenden Materiales. *b*) Verfestigung desselben *c*) Erosion und Ansammlung von Schutt eines Wildbaches wozu noch von Penck *d*) die Änderung der Konfiguration des Tales, Vertiefung desselben unter das Niveau der Breccie gerechnet wird, so kann geschlossen werden, daß die Zeit zwischen den beiden Vergletscherungen jedenfalls von der Länge geologischer Epochen gewesen sein muß. Als nun Penck hierauf zwischen den Schotterterrassen noch eine weitere Trennung durch Nagelfluh konstatieren konnte, wurde er zur Annahme von drei Eiszeiten geführt, von denen er zwei für sicher gestellt, die dritte für wahrscheinlich hielt, und er faßt die Chronologie der Ereignisse um Innsbruck in folgender Weise zusammen ¹⁾.

1. Erste Vergletscherung und Rückzug derselben.

2. Bildung eines großen Schuttkegels; die Gehänge des Inntales bewachsen; Verfestigung des Schotters zur Höttinger Breccie; Erosion derselben und Vertiefung des Inntales.

3. Vermutlich neue Verbreitung von Gesteinen der Zentralalpen über die nördlichen Kalkalpen, vielleicht durch eine zweite Vergletscherung.

4. Anhäufung des Schuttes eines Wildbaches im Höttinger Graben bis unter das Niveau der Breccie; weitere Vertiefung des Inntales bis zu seiner heutigen Tiefe.

5. Herannahen der letzten Vergletscherung. Ablagerung von Bänderton bei Arzl, von Kohle bei Mühlau; Anhäufung der unteren Glazialschotter; Ablagerung von Moränen auf der Höhe und an den Hängen der Terrasse; Rückzug der Vergletscherung.

6. Erosion des Inntales, Bildung der Schluchten in den Terrassen; Ablagerung von Schuttkegeln auf denselben.*

Etwas später ²⁾ spricht sich aber Penck schon ganz bestimmt für eine dritte Vergletscherung aus und schließt: „Die Annahme dreier Vergletscherungen gibt uns Rechenschaft über alle Ablagerungen unseres Gebietes; ungezwungen erklärt sie alle bisher bekannt gewordenen Tatsachen aus anderen Teilen der Alpen und steht im Einklang mit anderweitig gewonnenen Tatsachen.“ ³⁾

Indem nun die hier wiedergegebenen Grundgedanken weiterverfolgt wurden, konnten Penck und Brückner durch Vergleichung der Konfigurationen auf „geomorphologischem Wege“, wie sich Penck in dem zweiten

¹⁾ „Die Vergletscherung der deutschen Alpen“, S. 243.

²⁾ Ibid. S. 312.

³⁾ Ibid. S. 324.

Werke¹⁾ ausdrückt, die Frage für das Gesamtgebiet der Alpen lösen. Es handelte sich darum, die Schotter verschiedenen Alters zu trennen, mit den zugehörigen Moränen zusammenzustellen. „Wir folgten ihrem Niveau und faßten die einzelnen Vorkommnisse zusammen Ein solches Verfahren ist natürlich auch nur in beschränktem Umfange, nämlich in Gebieten anwendbar, wo sich die ursprüngliche Schotteroberfläche auf weitere Strecken erhalten hat, so daß man sie sowohl quer über die Taleinschnitte hinweg, als auch talabwärts verfolgen kann. In solchen Gebieten ist es selbst möglich, ihr Niveau zu erkennen, wenn dasselbe durch Krustenbewegungen aus seiner ursprünglichen Lage herausgebracht worden ist und es läßt sich das Ausmaß solcher Krustenbewegungen feststellen. Wenn wir nun bei solchen beschränkten Hilfsmitteln die Schotterfolgen der einzelnen, zum Teile durch erhebliche Entfernungen von einander getrennten Felder zu parallelisieren in der Lage waren, so geschah dieses auf Grund der Tatsachen, daß wir auf den einzelnen Schottergebieten, mit Ausnahme des Münchners, Übereinstimmung in der Zahl der Schotter fanden, daß ferner der jüngste von ihnen allenthalben sich von dem älteren durch den Mangel einer bedeutenden Lehmbedeckung auszeichnet und angehäuft erscheint an den Zug der Jung-Endmoränen, den wir mit charakteristischen Oberflächenformen von der Riß in Württemberg bis zur Traun in Oberösterreich fast ununterbrochen verfolgen können. So haben wir Mittel, den jüngsten Schotter allenthalben wieder zu erkennen und damit den Ausgangspunkt für den Vergleich der älteren untereinander.“

Weiters erscheinen die jüngeren Terrassen mehr verwittert, weniger zusammengepreßt; die älteren geben die Form der Nagelfluh, „aber es hängt dieses auch von dem Gestein selbst ab; manches verwittert eben leichter, anderes schwerer.“ Die älteren Moränen tragen überdies meist eine mächtige Decke von Lehm oder Löß; „diese reicht bis an die Jungmoränen heran, erstreckt sich aber nirgends über sie hinweg, sondern setzt sich, wenn auch nur in einzelnen wenigen Fällen, unter sie fort.“ Der Löß ist also hier interglazial und, aus seiner Mächtigkeit zu schließen, die Zwischenzeit ziemlich lang.

„Von den Moränen ausgehend, die Bildungen verschiedener Eiszeiten zu sondern, ist weder durch den Löß noch durch bloße Würdigung der Oberflächenformen möglich. Wollen wir die Beziehungen der Altmoränen zu den einzelnen Vergletscherungen feststellen, so müssen wir ausgehen von den Schotterstufen.“²⁾

Penck hat nun, gestützt auf das gesamte Beobachtungsmaterial, vier Eiszeiten für sichergestellt angenommen und für dieselben die Namen Günz-, Mindel-, Riß- und Würm-Eiszeit vorgeschlagen,³⁾ welche Namen, da sie in alphabetischer Reihenfolge, von der ältesten (Günz) bis zur jüngsten (Würm) geordnet, zur Übersichtlichkeit wesentlich beitragen, wohl allgemein eingeführt werden können. Die zu diesen Vergletscherungen gehörigen Schotter-

1) „Die Alpen im Eiszeitalter“, S. 107.

2) Ibid., S. 126.

3) l. c. S. 110.

terrassen werden unterschieden als: a) Niederterrassenschotter, der jüngsten, Würm-Vergletscherung angehörig, unmittelbar den Flußbetten angelegt. b) Hochterrassenschotter, der älteren, höher hinaufreichenden Rißvergletscherung zugeordnet, und c) den Deckenschotter, welcher den beiden ältesten, Mindel- und Günzvergletscherungen angehört und demgemäß als jüngerer und älterer Deckenschotter bezeichnet wird. Die Moränen der Würmvergletscherung werden mitunter als Jung-Endmoränen bezeichnet, doch findet sich auch für die Würm- und Rißmoränen die gemeinschaftliche Bezeichnung Jung-Moränen, zum Unterschiede von den Mindel- und Günzmoränen, welche als Altmoränen bezeichnet werden.

Über die Trennung derselben kann im allgemeinen wenigstens die Konfiguration entscheiden. „Deutlich sind die Jung-Endmoränen der W-Eiszeit; verhältnismäßig deutlich treten auch der Form nach die R-Moränen entgegen; ganz verwaschen sind die Moränen der M-Eiszeit. Endlich ist es auch durch Verfolgung des älteren Deckenschotters in das ebene Gebiet hinein gelungen, die Spuren einer ältesten G-Vergletscherung in Bayerisch-Schwaben festzustellen.“¹⁾ Daß hierbei mancherlei Unsicherheiten auftreten müssen, ist ja nicht zu verwundern; über dieselben wird später noch einiges erwähnt.

Einige englische Autoren nehmen für England eine 5- bis 6fache Eiszeit an;²⁾ Brückner kam in dem Bereiche seiner Untersuchungen in der Schweiz zu dem Resultat: „Einen fünften Schotter, der einer fünften Vergletscherung entsprechen würde, kennen wir nicht.“³⁾

Mühlberg hat 1896 auf eine fünfte Vergletscherung geschlossen. Der Schluß wird von Penck und Brückner als nicht zutreffend erklärt. Und der Sundgauer Schotter (westlich von Basel) der noch älter, zum Teil ganz verwittert ist, ist „mit keiner unserer fluvioglazialen Ablagerungen zu parallelisieren“;⁴⁾ er wird zum Pliozän gerechnet. Daß aber der ältere Deckenschotter nicht zum Pliozän gerechnet werden kann, sondern dem Quartär angehört, wird aus den in denselben gefundenen Conchylien geschlossen.⁵⁾

Für den Mathematiker, der an strenge Beweisführung gewöhnt ist, erscheint manche dieser Schlußfolgerungen anfänglich hypothetisch. Liest man aber die betreffenden Schriften aufmerksam durch, so wird man kaum zweifeln können, daß im Großen und Ganzen die Schlußfolgerungen nicht angezweifelt werden können. Jedenfalls sind drei Eiszeiten als unbedingt sichergestellt anzusehen; für die vierte, der Zeitfolge nach die erste, die G-Eiszeit scheinen jedoch die Tatsachen nicht vollkommen beweiskräftig, und wäre dieselbe nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung noch nicht als sichergestellt anzunehmen.

1) „Die Alpen im Eiszeitalter.“ S. 247.

2) Doch zählt man auch anderweitige Vereisungen, die nicht der Quartärperiode angehören und von dieser durch außerordentlich große Zeiträume getrennt sind (s. hierüber weiter unten).

3) l. c. S. 464.

4) l. c. S. 458.

5) l. c. S. 466; nähere Angaben hierüber werden aber nicht mitgeteilt.

Nebstdem finden sich aber noch innerhalb der Ausdehnung der letzten Vergletscherung, also weniger weit vorgerückt als die großen Moränenablagerungen der W-Vergletscherung, Zeugen nicht nur von einer, sondern von mehreren Gletschergrenzen. Es sind Moränen, die noch hoch oben in den Bergtälern gelegen sind, die darauf deuten, daß beim Rückzuge der Vergletscherung Stillstände oder auch kleinere oder größere Vorstöße erfolgten, bei denen Stirn- moränen zur Ausbildung gelangten. Penck und Brückner nehmen drei derselben an und bezeichnen dieselben als verschiedene Stadien des letzten Rückzuges; sie werden, ebenfalls in alphabetischer Reihenfolge als das Bühl- (β) Gschnitz- (γ) und Daun- (δ) Stadium bezeichnet; die Zwischenzeiten werden Interstadialzeiten genannt, zum Unterschiede von den viel größeren Zwischenzeiten der Hauptvergletscherungen, welche als Interglazialzeiten bezeichnet werden. Croll unterscheidet Ice-age = Glacial-Epoch, welche in Glacial-periods mit dazwischenfallenden Warm-Periods zerfallen.¹⁾

Im Gebiete des Inn- und Salzachgletschers ist eine dieser Oszillationen charakterisiert durch Niederterrassenschotter zwischen zwei Moränen; diese Oszillation, welche die W-Vergletscherung während ihres größten Standes erfuhr, nennt Penck (nach dem Orte Laufen bei Salzburg) die Laufenschwankung.²⁾ Eine ähnliche Schwankung zeigt sich im Gebiete des Inn- gletschers am Achensee, welche hienach die Achenschwankung genannt wird.

Diese Schwankungen zeigten sich auch anderwärts. Im Gebiete des helvetischen Gletschers fand Brückner talwärts von den Jung-Endmoränen, teilweise unter der Niederterrasse vergraben, Moränen. „Der R-Vergletscherung lassen sich diese Gebilde nicht wohl zuweisen; Hochterrassenschotter und R-Moränen in der Nachbarschaft zeigen ganz andere Verfestigungen und einen weit höheren Grad der Verwitterung;“ es deutet auf einen Vorstoß nach Ablagerung der Endmoränen; hierauf erfolgte ein Rückzug mit Stillstand und Ablagerung der Hauptmoränen.³⁾ Ebenso findet sich an der Sihl und Lorze Nagelfluh, die der Laufenschwankung angehört.⁴⁾

Brückner bemerkt übrigens für die schweizerischen Gletscher: „Wir zählen vom größten Vorstoß, der die verwaschenen Jung-Endmoränen schuf bis zum Bühl-Stadium, ohne das letztere mitzurechnen. 4 Schwankungen . . . es ist bisher nicht gelungen, sie außerhalb der Schweiz nachzuweisen. Im nördlichen Vorlande der Ostalpen haben wir an Stelle der sich deutlich scheidenden Endmoränen des Rückzuges der W-Vergletscherung die dichte Scharung von Moränenwällen in den Jung-Endmoränengürteln. Erst im Gebiete des Rheingletschers konnte ein äußerer und ein innerer Kranz von Jungmoränen

¹⁾ „Climate and time“ S. 240. Die Benennungen von Geikie und Chamberlin s. S. 115/7.

²⁾ l. c. S. 157. S. 166 bemerkt Penck, daß er die Schotterbildung bei Laufen für interstadial hält, Brückner aber für interglazial. Doch spricht Brückner später auch immer von der Laufenschwankung. z. B. SS. 499, 588.

³⁾ l. c. S. 499.

⁴⁾ l. c. S. 511.

unterschieden werden . . . welches dieser Rückzugsstadien der Laufenschwankung entspricht, können wir einstweilen nicht entscheiden.“¹⁾

Die räumliche Ausdehnung dieser Schwankungen als Vorstöße und Rückzüge wird beträchtlich geringer angenommen, als die der Haupteiszeiten. „Während der Achenschwankung hatte sich die Schneegrenze im Vergleich zur heutigen auf —700 *m* gehoben und ist dann wieder auf —900 bis —1000 *m* gegenüber der heutigen gefallen; sie hatte also eine Aufwärtsbewegung von 200 bis 300 *m* gemacht. Bei Ablagerung der Höttinger Breccie lag sie aber mindestens 1600 *m* höher als zuvor und hernach.“ In diesem Verhältnis sind auch die zeitlichen Perioden von ganz anderer Ordnung. Die Dauer der Achenschwankung wird auf „mehrere Denudationsmeter“ angegeben, die Dauer der Ablagerung der Höttinger Breccie aber „mindestens 30 Denudationsmeter“.²⁾

Die wichtigsten Angaben über die durch Zwischenlager getrennten Moränen im Alpengebiete sind:

Unfern Rohrschach am Bodensee, 75 *m* über dessen Spiegel befindet sich unter den W-Moränen ein Flöz von Schieferkohle, welcher bis Ende 1890 von der Gemeinde Mörswyl abgebaut wurde. Unter diesem wurde von Deike 1858 eine Geröllanhäufung gefunden, die er 1861 als Moränen erkannte. Heer fand in dieser Zwischenschicht 1865 die Eiche, und da diese nur mehr 1500 *m* unter der heutigen Schneegrenze vorkommt, so wurde die Schicht als interglazial erkannt, weil die Schneegrenze zur Zeit der Ablagerung dieser Zwischenschicht sich mindestens 1000 *m* höher zurückgezogen haben mußte. „Anderseits fehlen in der Mörswyler Flora Hinweise auf ein wärmeres Klima, wie etwa in der Höttinger Flora“ fügt Penck hinzu.³⁾

Bei Sulpach, nördlich von Ravensburg sind ebenfalls Ablagerungen mit Fossilien glazialen Charakters zwischen zwei Moränen, also interstadial; ebenso bei Schüssenried Ablagerungen, die Penck als γ - δ interstadial erklärt.

Inmitten der Quartärbildungen von Wangen (am östlichen Ende des Züricher Sees) findet sich in 480 *m* Höhe ein 3 Fuß mächtiges Braunkohlenlager zwischen zwei Moränenschottern⁴⁾; zwei weitere ähnliche Vorkommnisse finden sich in der Nähe, bei Utnach und Dürnten; beide wurden von Heer für interglazial gehalten. Brückner bezeichnet die Kohlen von Wangen und Utnach, ebenso wie ein ähnliches Kohlenlager bei Grandson am Neuenburgersee als interstadial, der Achenschwankung angehörig, während er die Dürntner Kohle für älter hält. „Alle altertümlichen Formen finden sich nur in der Schieferkohle von Dürnten (außerdem Pflanzen, die auf ein warmes Klima, etwa wie das heutige hindeuten, vor allem die Eibe), während die Schieferkohle von Utnach nur junge, heute noch existierende oder doch nur gewissermaßen erst in der postglazialen Zeit ausgestorbene Formen aufweisen.“

¹⁾ l. c. S. 584. In der Tabelle S. 588 wird die Laufenschwankung ebenfalls nur zwischen das erste und vierte Rückzugsstadium versetzt und auch die Achenschwankung wird S. 577 nur als interstadial zwischen W- und β -Vergletscherung ohne nähere Fixierung, angenommen.

²⁾ l. c. S. 390.

³⁾ l. c. S. 421.

⁴⁾ l. c. S. 529.

Im Gebiete der Kander am Thunersee ist zwischen den Moränen Kies eingelagert, welcher von Brückner wohl für interglazial gehalten wird,¹⁾ möglicherweise aber auch der Achenschwankung angehört.

Moränen finden sich wiederholt durch Schichten getrennt in den insubrischen Gletschern, nach Penck möglicherweise der Laufschwankung entsprechend.²⁾ Außer den interstadialen Ablagerungen sind hier aber auch ihrer Flora nach interglaziale. Auch eine Breccie, ähnlich der Höttinger Breccie, bei Lecco, interglaziale Tone im Vigezzotale am Lago Maggiore. Die Flora dieser Zwischenlagen deutet auf ein gleiches Alter, wie dasjenige der Höttinger Breccie, woraus sich für die Altersbestimmung der Zwischenlagen die R-W-Interglazialzeit ergibt.

Unter der Salzburger Nagelfluh, auf welcher die ältere Stadt erbaut ist, taucht am Reinberge eine von Gletschern bearbeitete Oberfläche unter; es ist also auch dieses eine Interglazialbildung, die zwischen R-W-Eiszeit versetzt wird³⁾.

Man wird schon aus einigen hier vorgekommenen Angaben auf den Grad der Sicherheit in diesen Folgerungen schließen können. Solche Unsicherheiten treten naturgemäß auch an anderen Stellen hin und wieder auf. Obzwar im Anfang des Werkes gesagt wird, daß die Zugehörigkeit der Moränen aus den Schottern geschlossen wird, wird schon beim Rheingletscher im Jura gesagt: die Deckenschotter verschwinden unter den Moränen; es grenzen, wie auch die Karte 396 zeigt, Moränen an Moränen; mächtige Schotterterrassen fehlen ganz⁴⁾; „lediglich an der Südgrenze der Riß-Illerplatte fanden wir Anzeichen von einer Verknüpfung der jüngeren Deckenschotter mit den angrenzenden Moränen. Dennoch sagt Penck:⁵⁾ „Klarer als in irgend einem zweiten Moränengebiete des nördlichen Alpenlandes sind im Bereiche des alten Rheingletschers die einzelnen Vergletscherungen zu erkennen.“ Auch vom Linth-, Reuß-, Aare- und Rhonegletscher sagt Brückner dasselbe: „Besonders von den alten Schottern liegen keine großen Felder vor, die sich ohne Unterbrechung weit hinziehen würden“⁶⁾; doch scheint sich dieses nur auf die Deckenschotter, also auf die Trennung der G- und M-Vergletscherung zu beziehen, während von den Hoch- und Niederterrassenschottern gesagt wird, daß sie gut zu erkennen sind⁷⁾ und ausdrücklich erwähnt wird, daß von Brugg (an der Mündung von Reuß und Limmat in die Aare) auf der ganzen Strecke bis Basel die Schotter gut zu trennen sind.

1) „Die Alpen im Eiszeitalter.“ S. 577.

2) I. c. S. 813.

3) E. Fugger hält dieselbe für Miozän; Kilian erklärt ebenfalls viele der Deckenschotter für pliozän, also präglazial.

4) Ibid. S. 435.

5) I. c. S. 415.

6) I. c. S. 442.

7) I. c. S. 458.

Moränen ohne Schotterterrassen finden sich auch im Tal der steierischen Salza¹⁾ und für die Südalpen spricht Penck ebenfalls von weit gedehnten Schottergebieten, die aber nicht gut zu trennen sind, weil sie direkt übereinander zur Ablagerung gekommen sind,²⁾ während die Moränen gut zu unterscheiden sind; und noch vorsichtiger spricht sich Brückner an einzelnen Stellen aus: „Eine Parallelisierung der Rückzugsmoränen des Rhonegletschers mit den zwei Rückzugsstadien des Linth- und Reußgletschers ist mit Sicherheit nicht durchzuführen.“³⁾

Von der dritten Terrasse im Gebiet der Steyr wird auch gesagt: „ob sie aber dem älteren oder jüngeren Deckenschotter entsprechen, läßt sich solange nicht entscheiden, als wir nicht zwischen ihnen und dem normalen Profil oberhalb Steyr Ablagerungen finden, die uns ermöglichen, das Niveau der beiden Deckenschotter auf der 30 km langen Zwischenstrecke zu verfolgen.“⁴⁾

Ob daher die Deckenschotter, die zwei verschiedenen Eiszeiten — G und M — zugeschrieben werden, zu trennen sind, oder besser gesagt zu trennen sein werden, muß erst der Zukunft überlassen bleiben.

Daß häufig die Unterscheidung, ob eine Ablagerung interglazial oder interstadial ist (z. B. bei Mattighofen⁵⁾) auf Schwierigkeiten stößt, kann auch nicht wundernehmen.

Im großen und ganzen kann aber das Gesamtbild dadurch nicht getrübt werden, und es lassen sich schon jetzt die Grenzen der einzelnen Vergletscherungen wenigstens sehr nahe angeben.

Die früher angegebenen Grenzen beziehen sich im allgemeinen auf die Altmoränen. Jede folgende Vergletscherung umfaßt im allgemeinen einen kleineren Flächenraum. Die W-Vergletscherung erstreckt sich weniger weit, wie die R-, diese weniger weit, als die M-Vergletscherung, so daß die letzte als die innerste das kleinste Areal umfaßt, doch finden auch Überschreitungen statt; im folgenden ist dieses besonders angeben.

Französische Alpen: Die Grenzen S. 99 den Altmoränen angehörig.

Jungmoränen: Voiron, südlich vom Lac de Paladru nach St. Quentin bei Bourgoin und Ambérieu. Die Moränenentwicklung außerordentlich stark; Moränen des Rückzugsstadiums bei Culoz am Abfluß des Lac du Bourget in die Rhone; dann westlich von Genf. Auch das untere Isèretal fällt in die Schwankung der W-Vergletscherung.

β-Moränen innerhalb der Alpentäler.

Rhone- und Aaregletscher: W. in zwei Zonen; ein äußerer, weiter

Moränengürtel bis gegen Solothurn-Wangen und ein innerer, einem Rückzugsstadium angehöriger, mitten durch die Stadt Bern und als Ufermoränen am Genfersee.

1) „Die Alpen im Eiszeitalter“, S. 242.

2) l. c. SS. 718 und 736.

3) l. c. S. 500.

4) l. c. S. 224.

5) l. c. S. 157.

β: Bei St. Maurice und Bex im Rhonetal und an den Seitentälern hinauf; am Arvetal: talwärts von Bonneville, La Roche und Cornier, dann längs des linken Ufers weiter und bei Nangy auf das rechte Ufer übersetzend; am Thunersee bei Steffisburg, im Gebiet der Kander.

γ: Im Dransetal: Zwischen Orsière und Sembranchier; im Bagnetale bei Chable (außerdem oberhalb Orsière und Chable: δ-Moränen); im Val d'Herens: bei Vex; im Visptal keine Endmoränen, wohl aber mächtige Grundmoränen bei Stalden, woraus folgt, daß der Gletscher nicht selbständig endigte, sondern sich mit dem Rhonegletscher vereinigte (außerdem oberhalb Stalden: δ-Moränen). — Rhoneaufwärts bei Sieders (an der Mündung des Val d'Anniviers; δ-Moränen: bei Viesch und Lax am Fuß des Aletschgletschers und noch höher, nahe dem Ursprunge der Rhone bei Ober-Gerstelen). — Im Kandertal: durch einen Bergsturz gedeckt; im linken Seitentale bei Adelboden. — Im Reußtal: bei Amsteg oberhalb des Vierwaldstättersees (und weiter talaufwärts δ-Moränen). — Im Linthtal: Zwischen Nettstall und Schwenden südlich von Walensee; die Moränen ruhen auf einem Bergsturz, der also interstadial zwischen β-γ fällt.

Es waren daher im β-Stadium alle großen Täler der Schweizer Alpen bis zu ihrem Austritt ins Alpenvorland von Eis erfüllt; im γ-Stadium bildeten sich große Talgletscher in den oberen Haupt- und Seitentälern; „das δ-Stadium stellt einen Gletscherstand dar, der sich dem heutigen nähert.“

Helvetische Gletscher. Das Areal der bei den allgemeinen Grenzen angegebenen R-Vergletscherung umfaßte nach Brückner hier einen Flächenraum von 32.000 km^2 , wovon 17.000 auf das Alpenvorland, 11.000 auf das Mittelland und 4000 auf den Jura entfielen; der außer den Alpen gelegene Teil von 15.000 km^2 ist erheblich größer, als der irgend eines anderen eiszeitlichen Gletschers und entspricht der „großen Eiszeit“ der Schweizer Geologen.

W. erheblich kleiner; nur 20.000 km^2 . „Nirgends im Bereich der Alpen entfernt sich die äußere Grenze der Altmoränen¹⁾ so weit von den Jungmoränen; nirgends besteht eine so gewaltige Differenz zwischen dem Flächenraum, den die Eismassen der größten Vergletscherung einnehmen, und dem Flächenraum der W-Vergletscherung, wie in der Schweiz.“

Die Grenze der W-Vergletscherung bleibt östlich vom Jura, erstreckt sich von der Wigger an in die Täler der Suhr, Aa, Reuß und Limmat (in einer fast parallel zur unteren Aare von Bern bis zu ihrer Mündung laufenden Linie); dabei sind sie nebeneinander laufend, „eng verschweißt“, ohne sich zu mischen.

Nach innen zu sind noch zwei Moränenwälle zu konstatieren; der eine β-Moränen, 5·7 km im Mittel von den W-Moränen entfernt, bei Hurden, Wangen und Utznach (am Züricher See) und ein zweiter, im Mittel 11·1 km mehr einwärts gelegener, γ-Moränen: am Rigi, bei Kriens, am Pilatus; dann bei Stans, Buochs, Vitznau und Brunnen (am Vierwaldstättersee).

¹⁾ Hier werden die R-Moränen als Altmoränen bezeichnet; M-Moränen werden keine angegeben.

Rheingletscher: Die äußere Grenze entspricht den Altmoränen, teilweise den R-Moränen.

W. bei Rohrschach am Bodensee.

β: bei Bregenz; γ bei Flims (Moränen auf einem Bergsturz, daher der Flimser Bergsturz β-γ interstadial) und am Säntis.

δ: Oberhalb Flims am Segnespaß.

Isargletscher: Die ältesten M-Moränen erstrecken sich nur bis 15 *km* vom Gebirge; die nächste R-Vergletscherung bei Wolfrathshausen und Holzkirchen war die am weitesten vorgeschrittene (35 *km* vom Gebirge); die W-Vergletscherung blieb nur 5 *km* hinter derselben zurück.

Inngletscher: Auch bei Rosenheim erstreckten sich nach Westen zu die M-Moränen am wenigsten weit; sie sind im innersten gelegen; die R-Vergletscherung hatte dieselben überschritten; am weitesten vorgeschritten war hier die W-Vergletscherung (42 *km* vom Gebirge). Nordwärts bei Gars blieb die W-Vergletscherung die schwächste; die R-Moränen finden sich außerhalb derselben; am weitesten war die älteste M-Eiszeit vorgeschritten.

β: Bei Imst, Ötz; Durchholzen nördlich vom Kaisergebirge.

γ: Zwischen Lengenfeld und Zwieselstein im Ötztal; bei Neustift und Telfs im Stubaital, bei Trins im Gschnitztal, bei Matrei im Wipptal, am Ausgange der Dornaubergerklamm im Zillertal.

δ: Am Zusammenfluß des Mutterberger und Langentales im Stubaital; an der Mündung des Sandestales ins Gschnitztal.

Salzachgletscher: Die W-Moränen liegen bei Nunreuth innerhalb der angeführten Zone der Altmoränen (28 *km* vom Gebirge entfernt). Bei Mattighofen findet man an drei Stellen, bei Aschau, Gampern und Feldkirchen, die W-Moränen über den R-Moränen, von diesen durch Löß getrennt.

β: Berchtesgaden, Paß Lueg, bei Hütttau im Fritztal, im Lammertal.

γ: Wald vor Kriml, am Südhang des Hochkönig bis Elmau.

δ: am Funtensee.

Traungletscher. Die drei Moränengürtel sind deutlich getrennt; die M-Moränen sind die äußersten (Gürtel von Hechenberg und Hassenberg); nach innen zu folgen die R-Moränen (Gürtel von Gschwandt und Ohlsdorf); die W-Moränen sind die innersten (Gürtel von Gmunden und Altmünster).

β: Bei Goisern, am Hallstättersee und Aussee.

γ: Am Grundlsee.

δ: Zwischen Grundl- und Toplitzsee.

Steyr- und Ennsgletscher: Innerhalb der bis Steyr reichenden Altmoränen nach innen zu die R-Moränen bei Groß-Raming als innerster Gürtel die W-Moränen zwischen St. Gallen und Hieflau.

Ybbstal: Moränen von Nebengletschern im Langbathtal, um den Laudachsee, am Alm- und Offensee.

Südalpen: Die S. 100 angegebenen Grenzen gehören den Altmoränen an.

W. Oberhalb le Poët im Durancetal; im Buechtal Moränen in zwei Reihen, u. z. R und W; woraus auf einen Übergang des Gletschers über den Sattel von la Freyssinousse geschlossen wird. Bei Gap und Tallard ebenfalls ein Zug von älteren und jüngeren Moränen; am Oberlauf des Verdon: bei Allos und Colmars.

β: von Embrun talaufwärts gegen Chateauroux und Mont Dauphin.

γ: oberhalb Briançon bei St. Chaffrey im Guisanetal; oberhalb dieser: δ-Moränen am Col de Lautaret.

Padanische Gletscher. Im Hügelland von Rivoli an der Dora Riparia und an der Serra der Dora Baltea zwei Moränengürtel: u. z. die Altmoränen außen, die Jungmoränen innen.

Insubrische Gletscher; ebenso: die Altmoränen sind außen, also südlich den Jungmoränen vorgelagert; ebenso am

Ogliogletscher. Bei Lovere (am Nordende des Sees); übrigens eine Spaltung in drei Äste: der Borlezaast nach W N W mit mächtigen W-Moränen bei Clusone, der südwestliche Cavallinaast und der südöstliche Iseoast ebenfalls mit W-Moränen.

In Deutschland wurden nebst den Endmoränen in den bereits angegebenen Grenzen noch Moränen und Schotterterrassen in zwei Gürteln gefunden, von denen der eine durch Mitteldeutschland, der andere die Küsten von Norddeutschland entlang zieht.¹⁾ Auch in Polen, Lithauen wurden noch zwei von einander entfernte Gürtel gefunden; in Zentral-Rußland hingegen ist bisher nur eine Reihe von Moränen und Schotterterrassen bekannt. Doch hat Krischtafowitsch²⁾ zwei Eiszeiten durch zwei Ablagerungen mit Interglazialablagerungen festgestellt.

Auch in England, sowie in Skandinavien sind eine Reihe von Vergletscherungen konstatiert worden, doch ist von der ältesten Vergletscherung in England wenig bekannt; sie überzog eben ganz Skandinavien, England, Irland, auch die Nordsee und die Irische See mit gewaltigen Eismassen ausfüllend, und erstreckte sich nach Süden bis zu der S. 101 angegebenen Grenze. Die in England gefundenen Glazialspuren gehören daher schon der zweiten und dritten Vergletscherung an.

Die Engländer unterscheiden daher einen upper und lower till³⁾; zwischen denselben sind mehr oder weniger mächtige Zwischenlagen, die marine oder lacustre (fresh-water) Ablagerungen führen. In Schottland werden meist zwei Lagen von till erwähnt. Die größte Mächtigkeit zeigen sie am Clyde River; an einzelnen Stellen sind sie daselbst bis 120 m hoch; aber Geikie sagt, daß

¹⁾ Stapff erhält aus seinen Rechnungen, daß das Eis vom Zentrum zur Peripherie (Deutschland) mindestens ein Gefälle von 0° 33' bis 0° 35' hätte haben müssen (l. c. S. 34), schließt daraus: „die Inlandeistheorie in ihrem jetzigen und selbst in beschränkterem Umfange ist unhaltbar“, und kommt wieder auf die ältere Drifttheorie zurück (l. c. S. 41). Seine Einwände sind jedoch von Wahnschaffe und Drygalsky widerlegt worden (s. S. 68 ff.) und gegenwärtig nicht mehr zu berücksichtigen.

²⁾ Bulletin de la société impériale des Naturalistes de Moscou 1890. -

³⁾ Geikie, l. c. S. 90.

nirgends mehr als zwei von einander verschiedene Lagen gefunden wurden¹⁾; so daß zwei große Vergletscherungen und eine Interglazialzeit erschlossen werden konnten. Vor der ersten nimmt er noch jene große Vereisung an, die wenig Spuren zurückließ, weil sie ganz Großbritannien in Eis tauchte. Nach diesen drei Vergletscherungen nimmt er weiters noch drei weitere, schwächere Vergletscherungen mit oberflächlichen Moränen und zugehörigen Schotterterrassen an, welche durch Interglazialzeiten getrennt waren. Die unmittelbar folgende, vierte Vergletscherung war die stärkste, und wird als die Zeit der district ice sheets und valley glaciers bezeichnet²⁾. Zur Vergleichung mit der Alpenvergletscherung bezeichnet Geikie die hier auftretenden Deckenschotter als sheet-gravels oder plateau-gravels³⁾ welche er als einheitlich ansieht (die Pencksche Zweiteilung rührt von einem späteren Zeitpunkte her) und die Hoch- und Niederterrassenschotter high-level- und low level-terrace oder auch high-terrace-gravel und low terrace gravel.

Hienach ergibt sich dann nach Geikie⁴⁾ für die europäische Vereisung das folgende Bild, wenn der Kürze halber für die gemeinschaftliche Vereisung von Skandinavien und Deutschland der von Geikie gewählte Name Baltischer Gletscher beibehalten wird, und durch Parallelisierung mit den Alpenvergletscherungen die erste Eiszeit, welche für England als Inlandeis auftrat, mit der Mindel-Eiszeit identifiziert wird:

1. Eiszeit: in Großbritannien vereinzelt aufgefundene Reste: Weyburn-Crag, Chillesfordclay, — in Frankreich: älteste Moränen von Zentralfrankreich, — Zentral- und Südeuropa: tiefste Grundmoränen, Deckenschotter. (Mindel).

2. Eiszeit: Große Englische Vereisung; tiefer till = Grundmoränen, — Baltische Vereisung; Große Eiszeit, unteres Diluvium von Süddeutschland, Holland, Zentralrußland (Grenzen S. 101) — Übriges Europa: Ältere Moränen des Ural, der Karpathen, des Kaukasus und der Appenninen: — Äußerer Moränengürtel in den Sudeten und im Riesengebirge, in den Vogesen; Äußere Moränen in den Pyrenäen, — Hochterrassenschotter (Riß).

3. Eiszeit. England: Oberer till; Inlandeis des Mittellandes; Island hatte eine Vereisung für sich: Der größte Teil von Irland nördlich vereist, der südliche Teil, etwa zu einem Viertel frei; der nördliche Teil von Wales vereist. Die Grenze geht von Nord-Wales über Liverpool, Staffordshire, Derbyshire (der Trentfluß blieb frei) zur Mündung des Humber (die Ostküste bis Lincolnwood war noch von skandinavischen Eismassen überflutet) nach Helgoland — Baltischer Gletscher: Die Grenze geht westlich von der Elbe bis Magdeburg, von hier etwa 70 km südlich von Berlin, Frankfurt an der Oder, Posen, Kalisch, Lodz, Lublin, Pinsk, Minsk zum Wolgaursprung an der Waldaihöhe, wo die zahlreichen Seen und Rundhöckerlandschaften typischer Moränennatur sind, nach Norden, den Onegasee einschließend, nach

1) „The great Ice Age“ S. 256.

2) I. c. S. 260.

3) I. c. SS. 509 und 560.

4) Zusammenstellung S. 607.

Archangelsk.¹⁾ — Übriges Europa: Restliche Vergletscherung der höchsten Punkte des Ural, der Tatra; im Kaukasus, Gletscherzentren im Elbrus, Kasbek und östlich davon in den höchsten Gipfeln nördlich von Nucha. Vergletscherung des zentralen Teiles der Pyrenäen und Endmoränen der Garonne- und Ariège-gletscher bei Montréjeau und Foix. — Mittlerer Moränengürtel in den Sudeten, dem Riesengebirge und in den Vogesen. — Niederterrassenschotter (Würm).

4. Eiszeit. England: till und Endmoränen der Gebirgsregion; große Talgletscher in Nordschottland und in den nördlichen Teilen von Wales (Zentrum der Snowden) — Baltischer Gletscher: Im Westen Kalbung der Eisberge an den Fjorden von Norwegen, Endmoränen an der Südküste von Norwegen, quer durch Gotland in Schweden, durch die Südspitzen des Wenern- und Wetternses; Teile der Flachküste von Norddeutschland: Meklenburg, Uckermark, Pommern, West- und Ostpreußen²⁾ die Ostsee und Finnland umfassend, östlich über Helsingfors, nördlich am Ladogasee vorüber, zum Varangerfjord. — Übriges Europa: Kaukasus und Pyrenäen nur in den höchsten Punkten vergletschert; Moränen des inneren Gürtels in den Sudeten, im Riesengebirge und in den Vogesen, — in den Alpen: Endmoränen der großen Längentäler, kleine Talmoränen in den höheren Tälern (also wohl mit den β Stadium zu parallelisieren).

Geikie erwähnt dann noch zwei Eiszeiten, von denen die erste durch sogenannte district-moraines in Schottland charakterisiert ist, denen die großen Talgletscher mit den höher gelegenen Endmoränen in Norwegen entsprechen und die er mit den höheren Moränen der Zentralalpen (die also jetzt wohl als γ -Moränen zu bezeichnen wären) parallelisiert; und eine sechste Eiszeit, welcher die höchstgelegenen Talmoränen in Schottland, Norwegen und den Alpen (also wohl die δ -Moränen) entsprechen.³⁾

In Amerika finden sich nach Chamberlin⁴⁾ Ablagerungen von zwei Vereisungen, die dachziegelförmig übereinandergreifend (imbricated) sind. Es gibt zwei Überdeckungen, die in umgekehrter Ordnung folgen: beim Vorschreiten finden Überdeckungen der späteren über die ersten, beim Rückzuge umgekehrt statt. Im allgemeinen ist der zweite Vorstoß weiter als der erste, während beim Rückzuge die späteren Moränen nicht so weit reichen, wie die ersten. Doch waren die Beobachtungen wohl noch zu wenig zahlreich, denn Chamberlin bemerkt von der älteren, tieferen Serie, daß sie „as yet scarcely

¹⁾ Diese Grenzen werden nicht überall in derselben Weise gezogen. Geikie erwähnt, daß er hier den unteren till der baltischen Küste und den oberen till von Holstein West- und Mitteldeutschland parallelisiert. (S. 440).

²⁾ Nach anderen Geologen sind aber diese nur Stadien des Vorstoßes und Rückzuges der früheren norddeutschen Vergletscherung.

³⁾ In einer Fußnote S. 571 bemerkt Geikie, daß Penck das erste Rückzugsstadium mit den district-moraines und das letzte Rückzugsstadium mit den local glaciers zusammenstellt; dann würde allerdings die erste Eiszeit Geikies mit der problematischen Günz-Eiszeit zusammenfallen; es fehlt aber die Parallelisierung der γ -Moränen.

⁴⁾ Geikie, l. c. S. 786.

known to me* waren. Die Moränengürtel der späteren Vergletscherung reihen sich lappenförmig aneinander und zwischen den einzelnen Lappen befinden sich Zwischenmoränen.

Chamberlin unterscheidet drei Eiszeiten :

Die erste Eiszeit wird Kansan-Formation genannt; im Westen die folgende weit überschreitend, bleibt sie im Osten hinter derselben zurück; ihre Grenze wurde bereits angegeben; doch ist der östliche Teil dieser Grenze vielleicht dieser Eiszeit nicht mehr zugehörig, da die Grenzen derselben unter derjenigen der folgenden verschwinden.

Die erste Interglazialzeit wird als Post-Kansan-Formation bezeichnet.

Die zweite Eiszeit: East Jowan-Formation; auch von dieser sind keine Moränen angegeben; sie reicht nur in Jowa über die Endmoränen der folgenden weit hinaus, etwa bis zur Grenze von Jowa und Missouri; sonst bildet sie nur einen schmalen Saum über die Endmoränen der folgenden Eiszeit. Von Long Island nach Norden zu ist die angegebene Grenze (S. 103) dieser Eiszeit angehörig.

Die dritte Eiszeit: East Wisconsin-Formation, charakterisiert durch eine mehrfache Reihe von Endmoränen; die Grenzen derselben sind: nördlich von St. Louis über Cincinnati, Peoria; von hier nordwärts nach Madison bis in die Nähe des Lake Superior und von hier längs der früher angegebenen Grenzen, so daß die Ablagerungen der ersten Eiszeit nur an zwei Stellen in Pennsylvanien als mäßig breite Säume über diese hervorragen. Nördlich von Long Island an sind keine Moränen zu finden.

Westlich von St. Louis über St. Paul-Minnesota nach Des-Moines, von hier nordwärts zum Minnesota-River, dann südlich nach Yankton (Dakota), östlich am Missouri weiter (eine Stelle in Wisconsin am Mississippi blieb vollständig eisfrei).

An die Moränengürtel, die oft in 5 bis 7 Reihen auftreten, reihen sich nach außen weite aprons und trains; eine Trennung der Reihen, welche Rückzugsmoränen im früheren Sinne darstellen, gibt er nicht, weil ihm die Gründe für eine Einteilung noch nicht genügend sichergestellt erscheinen.

Nebst dieser Einteilung auf dreifacher Basis, bei welcher die ganze Eiszeit: Glacial-Period in drei Glacial-Epochs zerfällt, wobei die dritte möglicherweise noch eine vierte, als Episode umfaßt, gibt Chamberlin¹⁾ noch zwei Einteilungsgruppen auf zweifacher Basis:

Nach der ersten wird die erste Glacial-Epoch gebildet von dem Kansan stage (Stadium), erstes Intervall und dem East Jowan stage; nach dem zweiten Intervall, welches die chief interglacial epoch bildet, folgt die zweite Glacial-Epoch, gebildet durch East Wisconsin stage, worauf sich noch Rückzugsschwankungen anreihen.

Nach der zweiten Gruppierung bildet das Kansan stage die erste Glacial-Epoch; auf diese folgte das erste Intervall als chief interglacial epoch, worauf

¹⁾ Vielleicht um den beiden Perioden der größten Anschwellung der beiden großen nordamerikanischen Seen (s. das 7. Kapitel) gerecht zu werden.

als zweite Glacial-Epoch das East Jowan stage und, durch ein zweites kürzeres Intervall getrennt, das East Wisconsin stage folgte.

Unter diesen Umständen, meint Geikie, wäre es verfrüht, eine Parallelisierung zwischen den amerikanischen Ablagerungen und den europäischen zu versuchen. Aber er weist auf die Ähnlichkeit der Dreiteilung mit der europäischen hin und glaubt, daß die Kansan-Formation sich mit der zweiten größten Vergletscherung¹⁾ werde identifizieren lassen; die East Jowan-Formation entspreche der dritten²⁾ und die East Wisconsin-Formation würde der vierten Eiszeit entsprechen.³⁾

Etwas anders stellt sich die Aufeinanderfolge der Vergletscherungen nach J. Burr Tyrell⁴⁾ dar. Nach dem Rückzuge oder selbst Verschwinden des Cordillerengletschers überzog der Keewatingletscher die Gegend; dann kam eine Zeit des Rückzuges für diesen; über die Grenze des Rückzugsstadiums, welche er „the Aftonian Period of Deglaciation“ nennt, kann aber nichts ausgesagt werden. In der Zeit des nächsten Wachstums erreichte dann der Labradorgletscher seine größte Ausdehnung.

Ob alle drei Gletscher gleichzeitig oder nacheinander entstanden sind, oder ob einer auf das Verschwinden des anderen folgte, „weiß ich nicht“, sagt Tyrell;⁵⁾ aber daß sie nicht gleichzeitig ihre größte Ausdehnung erreicht hatten, ist sicher.

Burr Tyrell teilt nur wenige Daten mit, aus denen der Schluß erwiesen werden könnte. Aus der beigegebenen Karte ist auch nicht zu entnehmen, ob die größte Ausdehnung des Keewatingletschers und diejenige des Cordillerengletschers sich überdeckten. Die beiden Grenzen stoßen ziemlich nahe aneinander, aber eine Deckung findet nicht statt; doch ist die Karte in einem Maßstabe, in welchem diese Grenzverhältnisse wohl verschwinden können, und besonders erwähnt werden dieselben im Texte nicht. Für die beiden östlichen Gletscher scheint Überdeckung nachgewiesen. Nach S. 156 sind auf der Ostseite des Keewatingletschers Riesenkessel, die sich nach Osten abflachen, und nach Osten fließende Ströme anzeigen. S. 157 aber wird wieder gesagt, der nunmehr vorschreitende östliche Labradorgletscher „obliterated most of the marks left by its predecessor“. Nur hier und da werden Kreuzschliffe bemerkt „where the later glacier had not rubbed out all the earlier grooves and striae“. Doch wird hier noch erwähnt, daß zwischen den beiden Lagen von till eine Lage von 12 Fuß Dicke von geschichtetem Lehm und Sand liegt, und endlich wird S. 159 bemerkt, daß sich die Schrammen an einzelnen Stellen senkrecht durchschneiden, und die eine Lage auffallend späteren Ursprunges ist.

¹⁾ Also mit der Rib-Eiszeit.

²⁾ Der Würm-Eiszeit.

³⁾ Dem Bühlstadium; wenn dieses stimmen würde, so würde die zweite Zweigruppenteilung den Alpenvergletscherungen besser entsprechen.

⁴⁾ „The Glaciation of North Central Canada.“ The Journal of Geology. Chicago, Bd. VI. (1898), S. 147.

⁵⁾ l. c. S. 160.

Die Karte gibt die östliche Grenze des Keewatingletschers ziemlich weit östlich von der westlichen Küste der Hudsonsbai, nahe der Mündung des Nelson River, Winipeg Lake und Red River weit westlich lassend; die westliche Grenze des Labradorgletschers übergreift nun den früheren ziemlich weit, geht durch die westliche Spitze der Hudsonsbai, von hier fast parallel dem Lauf des Nelson River folgend, diesen weit östlich lassend, zieht dann etwas westlich vom Winipeg Lake, tritt am Süden desselben auf das Ostufer des Red River und schneidet die Ostgrenze des Keewatingletschers etwas südlich von dieser Stelle. Hier ist also eine ziemlich breite Zone, in welcher sich wohl Moränen verschiedenen Alters als Zeugen aufeinanderfolgender Vergletscherungen finden.

Daß auch an der Westseite des Keewatingletschers eine Deckung von Moränen und Schotterterrassen teilweise stattfindet, wird z. B. in dem Berichte von Rollin D. Salisbury über die Erforschung der Glazialstruktur in den Roky-Mountains¹⁾ erwähnt; und zwar ist der till von Nordosten demjenigen von Westen überlagert. Es wird aber hiebei erwähnt, daß die Zwischenzeit zwischen den beiden Ablagerungen und ebenso die Zeit nach der letzten glazialen Ablagerung bis zur Gegenwart, geologisch gemessen, nicht groß war; endlich wird bemerkt, daß nach den Forschungen in diesem Gebiete mindestens drei Invasionsepochen gewesen sein mußten.

Während die sämtlichen hier angegebenen Vereisungen der Quartärperiode angehören und als mehr oder weniger lange und intensive Rückzugsstadien derselben, quartären Eiszeit anzusehen sind, sind Spuren einer palaeozoischen Vereisung in den Tropenregionen konstatiert worden. Die hauptsächlichsten Erscheinungen derselben erwähnt T. C. Chamberlin in seiner Arbeit „Localisation of Glaciation“²⁾: Die palaeozoische Vereisung ist nicht eine Erscheinung der höheren Breiten; die hauptsächlichsten Vereisungsfelder sind in der heißen Zone, das indische unter dem Wendekreis des Krebses, das südafrikanische und australische unter dem Wendekreis des Steinbocks; ähnlich in Brasilien; in höheren Breiten wurden keine Spuren gefunden.³⁾ Sie fanden in der frühesten Zeit der Erdgeschichte statt, wo von einem vorgeschrittenen Stadium der Abkühlung nicht gesprochen werden kann; die palaeozoische Vereisung reichte fast bis an das Meer; so wird sogar durch Ablagerungen (marine deposits) nicht unwahrscheinlich gemacht, daß Eisberge gebildet wurden; die Vereisung war wahrscheinlich nicht vom Alpentypus, und die Fauna zeigt, daß sie nicht später als im Perm gewesen sein kann.

Eine ausführlichere Zusammenstellung dieser Tatsachen gibt Geikie⁴⁾, welche ich wegen ihrer großen Wichtigkeit für das folgende auszugsweise anführe.

1. Hans Reusch hat das Vorkommen von ungeschichteten Konglomeraten am Varangerfjord nicht weit von der russisch-norwegischen Grenze beschrieben; es ist lehmhaltiger Sandstein mit erraticem Material aus Gneiß, Granit, Diorit,

1) The Journal of Geology, Chicago 1901, Bd. 9, S. 718.

2) Ibid. Bd. 6, S. 771.

3) S. hiezu das folgende.

4) „The great Ice Age“ Appendix A. SS. 817 bis 826.

Dolomit und Quarz; das feinkörnige Gestein mit deutlichen Gletscherspuren; keines zeigt Spuren von Wasserwirkung; das Alter ist unbestimmt. Reusch hält es für kambrisch oder silurisch, Dahl für dem Perm angehörig.

Große Geschiebe in einer feinen Matrix finden sich in den alten Übergangsstufen (transition series) von Indien; das Lager ruht auf gekritzter Felsunterlage; das Alter ebenfalls nicht bekannt; apparently ist es silurisch; kann aber auch kambrisch oder präkambrisch sein.

2. In den Himalayas von Pangi, südöstlich von Kaschmir kommen Geschiebe in großer Zahl in gewissen Schichten vor, which are supposed to be silurian.

Ähnliche Geschiebe (von 1 bis 5 Fuß Durchmesser) finden sich in der Grauwacke des unteren Silur im Süden von Schottland; sie bestehen aus Granit, Gneiß, Diorit und Schiefer, sämtlich ortsfremdes Gestein; nirgends auf denselben sind Gletschermarken konstatiert.

Ähnliche Geschiebelager wurden in Irland gefunden; ebenso hat Dawson solche Vorkommnisse im unteren Silur vom Lake Superior beschrieben; ebenso aus dem oberen Silur von Neu-Schottland; und James Stirling hat auf das Vorkommen von gekritzten Geschieben im oberen Silur vom Gibbo River in Australien hingewiesen.

3. Im alten roten Sandstein (Devon) von Nordengland und Schottland sind Konglomerate gefunden worden, „which have appeared to several competent observers closely to resemble“ verfestigtem Geschiebe; die schottischen Konglomerate bieten das Aussehen von Moränentrümmern, oft ungekritzelt; doch kommen auch gekritzte Geschiebe vor; mitunter zeigen sich Anzeichen von Wasserwirkung und regelmäßiger Anordnung (besonders in den Lamermuir Hills und in Ayreshire).

4. Erratika wurden gefunden in den Karbonschichten in Frankreich, welche nach Godwin-Austen may have been transported by floating ice. Ebenso in den Kohlenlagern von England solche bis zu 11 Pfund Gewicht. Alle möglicherweise in Baumwurzeln eingefaßt, fortgeführt. Auch gerundete Steine wurden gefunden, aber keiner von diesen kann als sicher durch den Eistransport gefördert, angesehen werden.

Von ähnlichen Vorkommnissen wird aus den Karbonschichten von Nordamerika berichtet. So wurde in Ohio ein Quarzitgeschiebe von 17×12 inches gefunden; Prof. Newberry hält es für möglich, daß dieses Geschiebe might have been carried by ice down some ancient carboniferous river.

5. A. C. Ramsay hat aus dem englischen Perm Erratika in der Größe zwischen wenigen Zollen bis zu 3 und 4 Fuß Durchmesser beschrieben. Mitunter sind sie geglättet und gekritzelt. Auch in Deutschland wurden ähnliche gefunden, und Hull hat solche in Irland gefunden.

In Natal wurden von Sutherland größere Geschiebelager als glazialen Ursprunges erkannt. Manche enthalten Erratika von 6 Fuß Durchmesser und 5 bis 10 Tonnen Gewicht, und wurden 60 bis 80 Meilen (100 bis 130 km) von den nächsten Felsen in situ geführt. Diese Ablagerungen ruhen auf Karbon

führendem Sandstein mit geglätteter Oberfläche. Sie sind bekannt als Dwyka-Konglomerat und gehören der Karooformation an, welche nach den organischen Überresten zwischen Karbon und Trias einzureihen ist. Auch im Kapland ist dieses Konglomerat auf Felsen aufliegend, welche Gletscherwirkung zeigen. Most Geologist, who have seen it, are convinced of its glacial origin. Professor Green meint wohl, es könnten grobe Schichten einer zurückweichenden Strandlinie sein; Schenk's sorgfältige Prüfung zeigt aber, daß wenig Raum für Zweifel am glazialen Ursprung bleibt.

In Bengalen und Zentralasien kommen die Geschiebelager von Talchir vor, zuerst von H. C. und W. T. Blanford beschrieben. Sie schildern dieselben als gerundet, wie durch Wasserstrom, und führen sie, weil die Lager ohne Moränenüberreste sind, auf Flußeis zurück. In der Nähe von Chánda, an der Basis des Gondwánasystems, wurden auf geglätteter und gekritzter Unterlage ebenfalls gekritzte Geschiebe gefunden.

In den Salzlagern von Pendjab entdeckte Wyme gekritzte Geschiebe, die er mit dem Talchirlager zusammenstellt; diese Geschiebe sind in Indien weit verbreitet, in Bengalen, den Zentralprovinzen, im Nerbuddatal, der Wüste von Ragputána und im Pendjab. Blanford und Oldham halten sie gleichartig mit dem Dwykakonglomerat in Südafrika und den ähnlichen Geschiebelagern in Australien.

In Australien wurden gekritzte Geschiebe am Lerderberg River, in den Kohlenfeldern des Bower River gefunden; R. Daintree hat zuerst ihren glazialen Charakter vermutet; R. L. Jack, Oldham schlossen sich dieser Meinung an. Sodann wurden weitere Funde in den Karbonschichten von Neu-Süd-Wales, bei Bachus Marsh im Wild Duck Creek, ebenfalls als glazialen Ursprunges erkannt. Es sind Granit, Gneis, Schiefer, manchmal von 20 bis 30 Tonnen im Gewicht; viele sind gekritz. Auch auf den harten Geschieben sind mitunter feine Linien mit der Lupe bemerkbar. Dunn ist der Meinung, daß die Streifung durch Gletschereis hervorgerufen wurde, daß die Stücke aber von schwimmendem Eis abgelagert wurden. Officer und Balfour halten das ziemlich ausgedehnte Lager für eine Grundmoräne; auch der unterliegende silurische Felsen in dem 10 *km* entfernten Coimadai Creek zeigt Streifung und Kritzung; endlich finden sich hier auch typische Rundhöcker-Landschaften. In Werribee-Gorge, Pykes Creek, Lerderberg Ranges, ein Gebiet von etwa 40 *km* Ausdehnung. zeigt die silurische Oberfläche charakteristische Gletscherwirkung. Nach den wenigen Pflanzenresten können diese Gebiete zwischen Karbon und Trias verlegt werden.

Nebst Neu-Süd-Wales und Queensland zeigt auch Tasmania ähnliche Erratika, die den Eindruck machen, als ob sie von schwimmendem Eis abgelagert worden wären, so daß an eine Invasion von Südpolareis gedacht wurde, umsomehr, als die Streifung auf einen Eisstrom von Süd oder Südwest deutet. Wenn sich das Südpolarland früher weiter nach Norden gedehnt haben sollte, so wäre eine solche Invasion nicht so unglauwürdig. Das Vorkommen in Indien aber is a much harder nut to crack.

6. Triasfelsen in Devonshire bieten Erratika. Godwin Austen schrieb sie der Zufuhr durch schwimmendes Eis zu. Pengelly meint, sie können längs der alten Küstenlinie nicht gar weit gewandert sein.

7. Jurafelsen in Sutherland, Nordschottland bieten Glazialsuren. Judd meint, die Geschiebe wären vom Hochland in das Jurameer gekommen.

8. In der Kreide von England und in den Alpen finden sich Erratika. Manche mögen allerdings zwischen Baumstämmen weiterbefördert worden sein, andere in England längs der Küstenlinie; einzelne können nach Godwin Austen nur durch Eistransport erklärt werden.

Endlich werden noch vom Flysch des nördlichen Alpenlandes und dem Myozän von Ober-Italien einige Vorkommnisse angeführt, die durch Eistransport erklärt werden können.

Es sei mir gestattet, hieran einige Bemerkungen zu knüpfen. Als Nicht-geologen liegt es mir natürlich fern, ein Urteil über die Tatsachen zu fällen, oder für die eine oder andere Auffassung zu sprechen. Allein es macht auf mich den Eindruck, als ob manche Tatsachen mit etwas zu großer Sicherheit gedeutet werden, während immerhin eine doppelte oder sogar mehrfache Auslegung möglich ist. Geikie verfährt bei dieser ganzen Darstellung ganz objektiv, sehr kritisch, und man kann sich des Eindruckes nicht erwehren, daß er, wie so viele andere, nicht so leicht einen glazialen Ursprung hohen Alters zu bestätigen geneigt ist, wo entweder der glaziale Ursprung oder das hohe Alter nicht genügend sicher feststellbar sind. Für die australischen Erratika einen Ursprung in der Antarktis zu suchen, ist eine Meinung, which takes ones breadth away; anderseits kann kaum Wasserwirkung für den Transport von Massen der hier vorkommenden Größen angenommen werden. Gegen die Ansicht, daß die australischen Ablagerungen viel älter sein müssen, als die europäischen, weil ihr Aussehen nicht so frisch ist, wendet Geikie ein, daß auch die schottischen jüngeren Ablagerungen mitunter nicht so frisch aussehen. Ferner meint Geikie, daß es fraglich ist, ob man gleichartige Ablagerungen an verschiedenen Stellen der Erde für sicher gleich alt halten könne.

Wie verhält es sich nun hienach mit den verschiedenen Eiszeiten in den verschiedenen Altersstufen der Erde? Es sei mir gestattet, einen Ausspruch, den Ed. Richter bei anderer Gelegenheit tat, hier anzuwenden: „Eine Eiszeit ist eine so große Sache, daß zu deren Annahme schon andere Beweise gehören, als vereinzelt Vorkommnisse.“

Wenn unter erraticem Geschiebe silurischer Felsen unterliegt, müssen denn die Erratika auch dem Silur angehören? Zwischen Silur und Eiszeit kann ja Faltung und Denudation stattgefunden haben, und wenn auch keine Faltungserscheinungen vorliegen, so kann ja doch das Fehlen der Zwischenschichten vielleicht andere Gründe haben!

Am zahlreichsten und weit umfassendsten sind die Tatsachen, die aus dem Perm vorliegen; sie sind so konstant, daß schwer ein Zweifel möglich

ist, und doch wird man auch hier fragen können, ob denn nicht eine andere Deutung möglich ist.

Eine Erklärung dieser Erscheinungen nach dem heutigen Standpunkte ist ja ganz unmöglich und deshalb bin ich auf dieselben etwas näher eingegangen. Zwischen den Ursachen der quartären Eiszeit und der hier angeführten Eiszeiten in fast allen anderen Altersepochen der Erde liegt eine tiefe Kluft, über welche wir nicht hinwegkommen, und gerade die Untersuchungen über die Ursachen der Eiszeiten werden ein wertvolles Glied in der Kette der wissenschaftlichen Diskussionen; sie mahnen zur Vorsicht in der Deutung: „Wir müssen nicht zu viel Gewicht auf alle Fälle von Blocktransporten legen“, sagt Geikie¹⁾ und Eug. Dubois²⁾ bemerkt: „Diese älteren Eisbildungen unterscheiden sich von den pleistozänen dadurch, daß sie nicht allgemein, sondern offenbar ohne direkten Zusammenhang mit den Breitengraden in den verschiedensten Erdteilen auftreten, während zu gleicher Zeit in anderen, unter allen möglichen Breitengraden gelegenen Gegenden Organismen gefunden wurden, die auf ein warmes Klima hinweisen.“

Ohne eine Meinung aussprechen zu wollen, war es für mich klar, daß die sämtlichen „verschiedenen Eiszeiten“ der Untersuchung auf ihre Ursachen nicht zugänglich wären und zunächst die Geologie weitere Beweise zu erbringen habe, ehe die mathematische Untersuchung sich derselben bemächtigen könnte — nur die „Permeiszeit“ halte ich für relativ sicherer³⁾; doch konnte von einer Untersuchung der Ursachen dieser aus einem anderen Grunde abgesehen werden, worüber an späterer Stelle gesprochen wird.

Auf die erodierende Wirkung der großen Gletscher wird auch die Bildung von Seen zurückgeführt. Geikie⁴⁾ unterscheidet hiernach vier Arten von Erosionsseen nach den verschiedenen Stadien der Felsenkessel, in denen sie auftreten und welche den verschiedenen Vergletscherungen angehören. Als erstes Stadium tritt der unterseeische Felsenkessel und einige Tieflandseen auf, welche dem allgemeinen Eismeer (mer de Glace) zugeschrieben werden; das zweite Stadium sind die Sea-Lochs und die Seen an den Mündungen der Bergtäler, entstanden in der Zeit der großen Talgletscher mit der Schneegrenze von 300 bis 500 *m*; das dritte Stadium, in den oberen Bergtälern und Felsenkesseln, an ihren unteren Enden oft von Moränen umgeben, entspricht der Schneegrenze von 800 *m*, und endlich die hochgelegenen Gebirgsseen, einer mittleren Schnee-

¹⁾ l. c. S. 811.

²⁾ „Das Klima der geologischen Vergangenheit.“ S. 19.

³⁾ Doch sei mir eine Bemerkung gestattet, welche sich unmittelbar darbietet: Ist es denn so sicher erwiesen, daß die australischen und afrikanischen Gletscherspuren so viel älter sind? Ist es nicht möglich, daß diese Vergletscherungen mit der Vereisung Patagoniens, der Kergueleninseln — die geographischen Breiten sind ja nicht gar so sehr verschieden — gleichzeitig war, und nur das Fehlen der Zwischenschichten zu einer anderen Altersbestimmung führte? Wenn dann die indischen Funde auf postglaziale Hebungen und Senkungen zurückgeführt werden, so verlieren alle diese Erscheinungen ihre Rätselhaftigkeit.

⁴⁾ l. c. S. 249.

grenze von 1200 m entsprechend. Geikie führt hier zur Bestätigung dieser Ansicht auch die Küstenerosion der Gletscher bei der Bildung der Fjorde an und meint, daß das von Schottland herabfließende Eis auch an der gegenüberliegenden Küste von Irland aufgehalten und dort seine stark erodierende Kraft betätigt habe. Nach seiner Ansicht ist es der Druck der Eismassen, welcher die gewaltigen Wirkungen hervorbringt. Wie schon S. 75 erwähnt, ist es weniger der ruhige Druck des Wassers als vielmehr die lebendige Kraft des bewegten Wassers, welchem die Erosionswirkung zuzuschreiben ist, und dies gilt in derselben Weise vom Eis. Auch möchte es mir scheinen, daß die Nordseite von Irland durchaus nicht so stark zerklüftet ist, wie die Westseite, daß also tatsächlich auf den Druck der von Norden kommenden Eismassen weniger Wirkung entfällt, als auf die lokale Tätigkeit der vom inneren Irland nach Westen abströmenden Massen — von Eis oder Wasser.

Eine Entscheidung darüber, ob der Gletscher hierbei erodierend oder konservierend wirkte, kann jedoch hieraus auch nicht getroffen werden. Während einerseits der erodierenden Wirkung eine viel geringere Intensität auf der Nordseite zukommt, würde der konservierenden Wirkung der ruhenden Massen ein viel größerer Spielraum eingeräumt werden müssen; aber die Konfiguration der Nordküste deutet eher auf eine mäßige Erosionswirkung hin.

Daß nicht alle Seen durch Gletscherwirkung zu erklären sind und zahlreiche Seen auch tektonischen Ursprungs sind, wird allgemein zugegeben. Inwieweit bei den Gebirgsseen an den Grenzen der Gletscherregion auch tektonische Kräfte mitgewirkt haben, kann nur von Fall zu Fall entschieden werden. Auffällig bleibt aber das Fehlen der Seen in den Niederungen nördlich und südlich der Pyrenäen (in den Bergen selbst sind etwa 600¹⁾) und der Mangel an Glazialspuren in den seenreichen Gebieten an der Loire und in der Champagne.

Über die Mächtigkeit der eiszeitlichen Gletscher ist man fast genauer unterrichtet, als über die Mächtigkeit der gegenwärtigen Gletscher. Aus erratischen Geschieben, Karen, Rundbuckelformen und Gletscherschliffen kann man die obere Grenze derselben recht gut erschließen. Penck nimmt an, daß dieselbe im Mittel 2200 m, in den Zentralalpen (Zillertaler, Stubayer, Oetztaler Alpen und Tauern) 2500 m hoch war. Die Hochplateaus waren ganz ausgefüllt, selbst hochgelegene Pässe wurden überschritten. Der Inntalgletscher überschritt das Hochtennenjoch (1895 m) und das Schweinsteinjoch (1579 m), der helvetische Gletscher die Jurapässe. Ebenso sind Gletscherschliffe und „eine großartige Rundhöckerlandchaft“ bis 2350 m auf der Höhe des Arlbergpasses sichergestellt. Reschenscheidek, Engadin, Brenner, Pfitscherjoch scheinen Übergänge für das nördlich gelegene Eis nach Süden gewesen zu sein. Allein eine zusammenhängende Masse von Inlandeis war es nicht. „Es mußte die Vergletscherung durchschnittlich um 1000 m mächtiger gewesen sein, um als Inlandeis zu erscheinen“. Es waren Eisströme, die sich zu einem Netz vereinigten, und die die Täler und die umliegenden Ebenen als Vorlandvergletscherung bedeckten.²⁾

¹⁾ Geikie, l. c. S. 586.

²⁾ Penck u. Brückner, „Die Alpen im Eiszeitalter“, S. 282.

Bei Gmunden wird die Höhe zu 500 *m*, im Aurachtale 600 *m*, über dem See wahrscheinlich 700 *m* angegeben. Die Schneegrenze setzt Penck während der W-Eiszeit ungefähr parallel der heutigen in einem Abstände von rund 1300 *m* tiefer und für die R-Eiszeit etwa 100 bis 200 *m* tiefer, als für die W-Eiszeit.

Beim helvetischen Gletscher ist, entsprechend der großen Flächenausdehnung, auch die Mächtigkeit bedeutender. Die Höhe der R-Vergletscherung im Rhonetal gibt Brückner zu 1600, am Ausgang des Linthtals zu 1350 *m* an. Da eine Zunge der W-Vergletscherung auch noch über den Paß Vallorbe nach Pontarlier vordrang, so kann die Höhe der W-Vergletscherung an dieser Stelle auch nicht viel niedriger gewesen sein; sie wird zu 1250 *m* angegeben ¹⁾.

Dem Charakter als Rückzugsstation entsprechend, sind die Schneegrenzen des β -, γ und δ -Stadiums viel weiter hinaufgerückt. Nach Brückner ist die Schneegrenze des β -Stadiums 900 *m* unter der jetzigen, diejenige des γ -Stadiums 600 *m*, des δ -Stadiums nur 310 *m* unter der jetzigen.

Die Mächtigkeit des englischen Inlandeises zur Zeit der größten Vergletscherung wird von Geikie zu 1200 *m* angegeben; in den Pyrenäen zu 900 bis 1000 *m*, nach Thoroddsen war die Mächtigkeit des Inlandeises in Island 1000 *m*; an der Küste 400 bis 500 *m*.

Dana nimmt an, daß auf der Wasserscheide am Lorenzostrom die Dicke des Eismeres mehr als 3600 *m* erreicht habe.

Diese Mächtigkeit kann es auch erklären, daß nicht selten Erratika höher gefunden wurden als der Ort, von dem sie stammen. Die Forbes'sche Erklärung, daß der fließende Gletscher durch den Widerstand des vorderen Teiles gehoben wird, und so höher zu liegen kommt, schließt sich der Tatsache, daß die Stromlinien nach vorn etwas gehoben werden können und an die Gletscheroberfläche treten, an; Hebungen von 8 bis 900 *m* werden dadurch allerdings nicht erklärt. Auf dem Åreskutan (östlich von Tronthjem) hat Törnebohm Blöcke in der Höhe von 1500 *m* gefunden, welche von keinem Platze höher als 600 *m* gekommen sein konnten ²⁾. Solche Erscheinungen sind wohl nur auf lokale Hebungen und Senkungen zurückzuführen. Wenn auch Heimat- und Fundstelle nicht allzuweit von einander entfernt sind, so kann und muß man wohl für vereinzelte Fälle solche Niveauänderungen annehmen. Sie können langsame oder gewaltsame sein, wobei man nur an lokale Erschütterungen zu denken braucht; diese müssen aber durchaus nicht mit Verwerfungen ver-

¹⁾ Die von Brückner angeführte Ursache für das soviel größere Areal der R-Vergletscherung wäre der Jura gewesen, der die Eismassen zwang, weiter hinauszugehen, scheint daher so zu verstehen, daß durch den vorgelagerten Jura die ursprüngliche Eindämmung die Mächtigkeit erhöhte, in deren Gefolge dann das Eis weiter vordrang. Hiefür spricht auch der Umstand der geringen Höhendifferenz zwischen R- und W-Vergletscherung; die letztere erreichte durch den vorgelagerten Jura eine beträchtliche Höhe, nur 130 *m* niedriger als die R-Gletscher; da aber dabei der Jura nicht mehr überschritten wurde, so ergibt sich der große Unterschied im Areal.

²⁾ Geikie, l. c. 201.

bunden sein, und kleine Faltungen postglazialer oder interglazialer Natur sind ja auch anderweitig nachgewiesen ¹⁾).

Die Dauer der Interglazialzeiten muß eine verhältnismäßig lange gewesen sein, „da in dieser Zeit bei Salzburg ein Alpensee von 6 km Rauminhalt zugesättigt werden konnte“ ²⁾ und Brückner schließt aus der Verwitterung der Deckenschotter, sowie aus der Mächtigkeit der Lößablagerungen, daß die M-R-Interglazialzeit weit länger war als die R-W-Interglazialzeit ³⁾. Als Dauer für die Bildung der 2,5 m mächtigen Schieferkohle von Utznach gibt Brückner 5 bis 6000 Jahre an; auch Heim schätzt die Dauer der Ablagerung der Schieferkohle bei Wetzikon bei 3 m Mächtigkeit auf mindestens 6000 Jahre ⁴⁾. Einen angenäherten Begriff über die hier auftretenden Zeiträume kann man aus dem Vergleiche mit der Kulturgeschichte des Menschen erhalten: Die sämtlichen Pfahlbauten der Schweiz sind weit jünger als das β -Stadium und die Bronzekultur ist jünger als das δ -Stadium ⁵⁾.

Auch Geikie hält die Interglazialzeiten für sehr lange, da zunächst eine starke boreale Fauna und Flora kam, bis sie der milderen Platz machte; welche sich in den Ablagerungen vertreten findet ⁶⁾. Für die lange Zwischenzeit spricht auch, daß, wie R. Credener gezeigt hat, an verschiedenen Stellen Dislokationen vorkommen, die nur die unteren, nicht aber die oberen Glazialablagerungen betreffen, und die er daher als interglaziale tektonische Prozesse (Faltungen) deutet ⁷⁾.

Penck rechnet, gestützt auf die Annahme, daß die Zungenbecken der Erosionswirkung der Eismassen zuzuschreiben sind, wenn die Erosion 1 mm im Jahre ausmacht, für die Dauer zur Übertiefung der Zungenbecken 800.000 Jahre und wenn die jährliche Denudation zu 10 mm angenommen wird, 80.000 Jahre, somit für die Dauer einer Eiszeit 200.000, beziehungsweise 20.000 Jahre ⁸⁾.

Um geringere Zahlen und übersichtlichere Werte zu erhalten, führt Penck das Denudationsmeter ein, d. i. die Zeit, welche zum Abtragen einer Schicht von 1 m erforderlich ist. Diese schätzt er in der Talsohle zu 12.000 Jahren, im Hochgebirge zu 3000 bis 4000 Jahren. Als eine wirkliche Zeitangabe kann dieses aber kaum angesehen werden; denn die Denudation hängt von dem Materiale, von äußeren Einflüssen ab und ist in verschiedenen Höhen nicht gleich. 3 bis 4 Denudationsmeter können 15.000, können aber auch 50.000 Jahre bedeuten, wodurch wirkliche Vergleichen sehr erschwert werden. Allerdings kommt

¹⁾ S. das 10. Kapitel.

²⁾ „Die Alpen im Eiszeitalter“, S. 247.

³⁾ Auf die Stärke der Erosion gestützt, welche in der postglazialen Zeit vielmals kleiner war, als in der interglazialen Zeit, nimmt Brückner (Klimaschwankungen, S. 295) an, daß die Postglazialzeit erheblich kürzer ist, als die Interglazialzeiten, daß also die Gegenwart von der Eiszeit weniger weit entfernt ist, als die Eiszeiten untereinander.

⁴⁾ Gletscherkunde, S. 549.

⁵⁾ „Die Alpen im Eiszeitalter.“ S. 638.

⁶⁾ Geikie, l. c. S. 165.

⁷⁾ Ibid. S. 427.

⁸⁾ „Die Alpen im Eiszeitalter.“ S. 594.

es auf genauere Schätzungen nicht an, meist können dieselben gar nicht gegeben werden. Aber die Wahl einer Einheit von etwa 10.000 Jahren als geologische Einheit würde die Millionen von Jahren, die der Vorstellung schwer zugänglich sind, wohl eliminieren; historisch ist es etwa der doppelte Zeitraum, wie derjenige, aus welchem historische Berichte vorliegen, und geologisch könnte dieser Einheit etwa $1\frac{1}{2}$ mittlere Denudationsmeter zugeordnet werden. Wo es notwendig sein sollte, kann man sich also als geologischer Einheit $1 E = 10.000 \text{ Jahre} = 1\frac{1}{2}$ mittlere Denudationsmeter bedienen.

Über die Art des Auftretens der Vereisung auf der Erde sind zwei Annahmen möglich: Perioden stärkster Vereisung und Wärmeperioden traten auf beiden Hemisphären gleichzeitig auf, oder sie alternieren. Ich sammelte nun die Ansichten verschiedener Autoren, um sie nach den beiden Hypothesen zu trennen, fand aber, daß da nicht viel zu trennen war:

Svante Arrhenius hält die gleichzeitige Vereisung für ganz natürlich, and this most natural view would probably have been generally accepted, if the theory of Croll, which demands a genial age on the Southern hemisphere at the same time as an ice age on the northern and vice versa, had not influenced opinion¹⁾.

Biermann meint, ob in beiden Hemisphären die Vereisung gleichzeitig war oder nicht, ist gegenwärtig nicht zu entscheiden; es sind beide Möglichkeiten zu betrachten, „wir können aber der gleichzeitigen Vereisung den Vorzug einräumen²⁾).

Chamberlin nimmt ebenfalls gleichzeitige Vereisung in beiden Hemisphären an³⁾.

Croll nimmt die Eiszeit in beiden Hemisphären gleichzeitig an, aber die Kälteperiode der einen Hemisphäre zusammenfallend mit der Wärmeperiode der anderen, d. h. die Interglazialzeiten der einen Hemisphäre mit den Eiszeiten der anderen zusammenfallend. „The glacial epoch may be considered as contemporaneous in both hemispheres. But the epoch consisted of a succession of cold and warm periods, the cold periods of one hemisphere coinciding with the warm periods of the other and vice versa⁴⁾).

Geikie sagt, daß es vom geologischen Standpunkte unmöglich ist, festzulegen, ob die Eiszeiten gleichzeitig oder abwechselnd in den beiden Hemisphären waren⁵⁾.

O. Nordenskjöld kommt zu dem Schlusse, daß die Eiszeiten in beiden Hemisphären gleichzeitig und von derselben Ordnung waren.

Penck⁶⁾ bemerkt, daß die hiebei wirkenden regelmäßigen Ursachen durch unregelmäßig wirkende, von geographischen Momenten abhängige

1) „On the influence of Carbonic acid.“ S. 268.

2) „Zur Frage nach der Ursache der Eiszeiten.“ S. 4.

3) „Localisation of glaciation.“ I. c. S. 753.

4) „Climate and time“ S. 234.

5) „The great Ice Age.“ S. 807.

6) „Vergletscherung der deutschen Alpen.“ S. 452.

wesentlich beeinflusst werden, so daß von einer regelmäßigen Periodizität nicht die Rede sein kann, und daß namentlich infolge der zur Schmelzung erforderlichen Wärme die vollständige Reduktion der Eismassen in einer Interglazialzeit von 10.500 Jahren — es wird dabei an die Bewegung des Perihels der Erde gedacht — nicht anzunehmen ist, wodurch die Eisanhäufung, die ursprünglich auf beiden Hemisphären alternierend war, später einer gleichzeitigen Bedeckung Platz machte.

Uhlig schließt daraus,¹⁾ daß auch Penck sich für die gleichzeitige Vereisung aussprach. So dezidiert scheint mir dieses nicht; es ist unter der Voraussetzung gedacht, daß die Periode der Vereisung eben der relativ geringe Zeitraum von 10.500 Jahren wäre und an einer anderen Stelle (S. 439) sagt Penck ausdrücklich, daß sich nicht angeben läßt, ob die beiden Hemisphären gleichzeitig oder hintereinander von der Vereisung betroffen wurden.

Die Geologen allerdings neigen durchwegs der Annahme der gleichzeitigen Vereisung zu. „Alle Beobachtungen ergeben, daß die Terrassen des Nordens und des Südens gleichzeitig entstanden sind, während jene Hypothese²⁾ es als eine notwendige Konsequenz mit sich bringt, daß die Eiszeiten und somit die hohen Wasserstände abwechseln mußten.“

Inwieweit die Beobachtungen derartige Schlüsse mit Sicherheit gestatten, hängt wesentlich von dem Gewichte ab, welches man den einzelnen Tatsachen beilegt. Jedenfalls ist die alternierende Vereisung durchaus nicht von vornherein auszuschließen und bei der Untersuchung der Tatsachen der Eiszeiten kann ohne Rücksicht hierauf allen Umständen eine gleichmäßige Sorgfalt zugewendet werden, gleichgültig, ob durch dieselbe eine gleichzeitige oder alternierende Vereisung bewirkt würde.

¹⁾ „Erdgeschichte“, II. Bd., S. 475.

²⁾ Uhlig, „Erdgeschichte“, S. 407. Ebenfalls die Hypothese der Veränderung des Perihels und der Exzentrizität.

V. Kapitel.

Das Klima der Erde.

Unter Zugrundelegung der Kant-Laplaceschen Theorie müßte das Klima der Erde ursprünglich außerordentlich warm gewesen sein, indem ja die Erde aus dem Zustande eines glühenden Gasballes hervorging; erst mit der fortschreitenden Abkühlung konnte sich der gegenwärtige Zustand herausbilden. Es war natürlich, diese Abkühlung mit den geologischen Epochen in Verbindung zu bringen und so entwickelte sich die Ansicht, daß im Karbon und noch im mesozoischen Zeitalter ein gleichmäßiges Klima über der ganzen Erde herrschte. Nach Heer und Engler¹⁾ erlitt „erst in der Tertiärperiode das homogene Klima eine Störung und es beginnt, vom Pole ausgehend, die Herausbildung der heutigen klimatischen Zonen“, so daß man eine tropische Eozänflora, eine subtropische Miozänflora und am Ausgange des Tertiär die jetzige boreale Flora unterscheidet. Diese Annahme wäre berechtigt, wenn die innere Erdwärme als die Ursache der verschiedenen Wandlungen angesehen werden könnte. Dieses geht aber nicht an. Denn ehe sich vegetatives und animales Leben entwickelte, mußte die Abkühlung schon weit vorgeschritten sein, und wenn auch die Bedingungen für die Lebensmöglichkeit sich im Laufe der Zeiten selbst geändert haben können, so können diese Änderungen wohl kaum so groß gewesen sein, daß in palaeozoischen Zeiten von einem homogenen Klima gesprochen werden könnte.

Es ist allerdings auffallend, daß die Kohle eine so allgemeine Verbreitung auf der Erde zeigt,²⁾ und daß daher eine üppige Vegetation, wie sie zur Kohlenbildung nötig scheint, über der ganzen Erde, selbst bis zu den Polen geherrscht haben mußte. Es hat aber Melchior Neumayr darauf hingewiesen, daß zur Bildung von Kohle keine übermäßige Wärme erforderlich ist, daß im Gegenteil die Kohlenbildung durch mäßige Temperaturen gefördert, durch übermäßige Hitze, welche rasche Verwesung zur Folge hat, gestört wird.³⁾

1) Brückner, Klimaschwankungen, S. 4.

2) Auch in der Umgebung des Südpols sind jetzt schon Kohlenlager gefunden worden.

3) Das Auftreten einer Eiszeit im Karbon kann daher angezweifelt werden. Das Vorhandensein von Kohle spricht zum mindesten ebensowohl gegen dieselbe, wie die gekritzten Geschiebe und andere scheinbar glaziale Ablagerungen für dieselbe

Daß übrigens eine besonders reiche und üppige Vegetation zur Bildung von Kohlenflözen erforderlich wäre, wurde auch bereits mehrfach bestritten. „Die Urwälder des Feuerlandes und vieler Gegenden der gemäßigten Zone entwickeln einen enormen Reichtum vegetabilischen Lebens, die allen Anforderungen für die Kohlenbildung vollauf genügen. Indessen ist auch kein zwingender Grund für die Annahme vorhanden, daß die Kohlenflöze durch eine reiche Vegetation gebildet worden seien. Die weitaus größten und wichtigsten Ansammlungen von Pflanzenstoffen bieten heute die Swamps und die Torfmoore; diese verdanken das Material zu ihrer Bildung vorwiegend wenigen Moosen. . . . Die Torfdildung ist auf kühle und kalte Gegenden beschränkt Von 30 bis 76° nördl. Breite herrschte also ein gleichmäßiges, aber nicht warmes Klima ¹⁾).

Soviel aber ist sicher, daß im Miozän das europäische Klima wärmer war als jetzt. Es ergibt sich dies aus der fossilen Fauna und Flora der gemäßigten Gegenden und wird am sichersten geschlossen durch das Vorkommen fossiler Pflanzen im hohen Norden²⁾, über welche die folgenden wenigen charakteristischen Bemerkungen Heers aus Neumayer-Uhlig Erdgeschichte ihren Platz finden mögen.

Wir kennen gegenwärtig aus Island, Grönland, Grinnelland, Spitzbergen und Nordkanada 363 miozäne Pflanzenarten. Die nördlichste Fundstelle solcher Pflanzen ist Grinnelland bei 81° 45' nördl. Breite, und im Jahre 1876 von Kapitän Feilden, Naturforscher bei der damaligen englischen Polarexpedition, entdeckt. Es wurden in einem schwarzen Schiefer 30 Pflanzenarten gesammelt, von welchen 10 zu den Nadelhölzern gehören; die Sumpfyzypresse (*Taxodium distichum*), die noch jetzt im südlichen Teil der vereinigten Staaten lebt, war da häufig, und es wurden nicht nur die zierlich beblätterten Zweige, sondern auch die männlichen Blüten gefunden. Die Fichte ist eine zweite noch lebende Pflanzenart, die uns in diesem Polarlande begegnet, und ihr waren 2 Kiefern (*Pinus Feildiana* und *Pinus polaris*) beigesellt. Eine eigentümliche ausgestorbene Gattung der Familie der Eibenbäume bildet *Feildenia*, welche in 3 Arten den höchsten Norden bewohnte. Eine Ulme (*Ulmus borealis*) bildet mit einer Linde, 2 Birken und 2 Pappelarten den Laubwald, 2 Haselarten mit einem Schneeballen (*Viburnum Nordenskjöldii*) das Buschwerk. In einem See, der sich dort befunden haben muß, lebte eine Seerose (*Nymphaea arctica*) und das Ufer bekleideten Seggen und Schilfrohr. Es tritt uns daher in diesem äußersten Teil eine Pflanzenwelt entgegen, welche am meisten mit derjenigen der nördlichen Teile der gemäßigten Zone übereinstimmt, und eine mittlere Jahrestemperatur von wenigstens 8° C verlangt, während diese gegenwärtig dort 20° unter Null liegt.

Am nächsten schließt sich die Flora von Spitzbergen an, welche wir von zahlreichen zwischen 77 $\frac{1}{2}$ ° und 78 $\frac{2}{3}$ ° nördl. Breite gelegenen Stellen in 179 Arten kennen. Auch hier dominieren die Nadelhölzer und die Sumpfyzypresse, die Fichte und die Feildenien treten uns auch hier entgegen; dazu

¹⁾ Neumayer-Uhlig, Erdgeschichte, II. Bd. S. 151.

²⁾ Ibid. S. 331; vgl. hierüber die Sammlung Oswald Heers: „Flora fossilis arctica, die in acht Bänden die überaus reiche fossile Flora der Polarländer beschreibt. Der oben im Text gegebene Auszug ist dem II. Bd. von Neumayer-Uhlig's Erdgeschichte entnommen.

kommen aber noch eine ganze Anzahl von Föhren, Fichten und Tannen, wie ferner mehrere Mammuthbäume (*Sequoia*, jetzt in Kalifornien lebend) und Glyptostroben; aber auch Zypressen fehlen nicht, so namentlich zwei zierliche Arten von *Libocedrus* (*L. Sabineana*, *L. gracilis*). Unter den Laubbäumen treten uns Pappeln mit 7 Arten entgegen; die Weiden sind selten, ebenso die Erlen, Birken und Buchen. Von größerem Interesse sind 2 großblättrige Eichen, ein Platanen-, ein Ulmen-, ein Linden-, ein Wallnußbaum, 2 Magnolien und 4 Ahornarten, von denen eine (*Acer arcticum*) mit prächtigen Blättern und Früchten gefunden wurde. 3 Schneeballen-, mehrere Cornus-, Nyssa-, Weißdorn- und Judendornarten bildeten mit dem Haselstrauche das Buschwerk. Die arktische Seerose, ein Froschlöffelkraut und ein Lauchkraut (*Potamogeton Nordenskjöldii*) weisen auf einen Süßwassersee, der wahrscheinlich von einem Torfgrund umgeben war, welchen zahlreiche Riedgräser (*Cyperus*, *Carex*) Spargenien und Schwertlilien bekleideten.

Überblicken wir diese Flora von Spitzbergen, so vermissen wir zwar in derselben alle Formen der heißen Zone, anderseits weicht sie gänzlich von der jetzigen Spitzbergens und überhaupt von der Flora der arktischen Zone ab; sie hat den Charakter der Pflanzenwelt der gemäßigten Zone, wie wir sie heute im nördlichen Deutschland antreffen und läßt auf eine mittlere Jahrestemperatur von 9° C. schließen.

Einen etwas südlicheren Anstrich hat die fossile Flora von Nordgrönland, welche uns von der Westküste bei 70° nördl. Breite näher bekannt geworden ist. Wir erblicken unter den 169 Arten, welche uns von da zugekommen sind, eine Magnolie mit immergrünen Blättern, während die beiden Arten von Spitzbergen offenbar fallendes Laub hatten. Ferner haben wir in Grönland einen Kastanienbaum, einen Ginkgo, *Diospirus*, *Sassafras* u. a., die Eichen treten uns in 7 Arten entgegen; und haben zum großen Teil große, prächtige Blätter, ebenso die Platanen und die Weinreben. Es ist dies eine Flora, die ein Klima andeutet, wie wir es gegenwärtig in der Umgebung des Genfersees, z. B. bei Montreux mit 10½° Jahrestemperatur treffen.

Daß aber nicht allein Grinnelland, Grönland und Spitzbergen zur miozänen Zeit ein viel wärmeres Klima gehabt haben, als heute, zeigen uns die fossilen Floren von Island, vom Bärensee in Nordamerika (bei 65° nördl. Breite), von Simonosa im westlichen Ostsibirien, von Alaska, Kamtschatka und von der Insel Sachalin. In allen diesen Ländern sind die Reste von Bäumen und Sträuchern gesammelt worden, welche dies bezeugen und nicht bezweifeln lassen, daß diese hohe Temperatur durch die ganze arktische Zone rings um die Erde verbreitet war. Während für die Schweiz eine Temperaturerhöhung von 9° genügt, um die Erscheinungen der Miozänzeit zu erklären, ist dieses in der arktischen Zone nicht der Fall . . es muß für diese Gegenden der Unterschied zwischen einst und jetzt 17½°, ja für Grinnelland 28° C. betragen haben.“ Auch auf Franz Josefs-Land (82 bis 83° Breite) kann aus dem Vorhandensein von Hörnern und Knochen von Renntieren auf ein früher milderes Klima geschlossen werden, denn jetzt kann dort kein Renntier leben, weil es keine Nahrung findet.

Heer gab dann auch¹⁾ als Temperaturen im unteren Miozän und Oligozän:

Oberitalien	22° C.
Schweiz	20·5° C.
Niederrheinisches Becken	18° C.
Gegend von Danzig	17° C.
Grönland bei 70° Breite	12° C.
Spitzbergen bei 78° Breite	9° C.
Grinnelland bei 82° Breite	8° C.

Aber es kommen auch jetzt im Sommer an der Küste von Grönland Erlen und Weiden vor²⁾ und Holmström erwähnt von der Umgebung der Gletscher des Folgefond: „La végétation est très développée jusque devant le front du glacier. Plusieurs espèces d'arbre à feuilles vivent parfaitement dans le voisinage immédiat de la glace, et à moins de deux cents mètres du Glacier on voyait un petit champ de seigle dont les tiges atteignaient une hauteur de deux mètres.“³⁾

So wie an den Polen Überreste eines gemäßigten Klimas gefunden wurden, so hat man auch z. B. in Italien Überreste einer tropischen Fauna gefunden. *Conus testudinarius* von den Capverdischen Inseln, *Terebra corrugata* von der Guineaküste, *Triton ficoides* und *Strombus bubonis* vom Senegal, *Natica orientalis* vom indischen Ozean u. s. w.⁴⁾

Da während der Eiszeiten die Vergletscherung einen so bedeutenden Umfang erlangt hatte, so muß man auf eine beträchtlich niedrigere Temperatur während derselben schließen; anderseits muß während der Interglazialzeiten und auch während der Interstadialzeiten eine merkliche Erhöhung der Temperatur stattgefunden haben. Allein eine so außerordentliche Verminderung der Temperatur für die Eiszeiten anzunehmen, ist eigentlich nicht nötig. Eine Schätzung für dieselbe erhält man aus der Depression der Schneelinie. Eine Zusammenstellung derselben nach den Angaben von Penck, Brückner, Richter, Sievers und Grissinger gibt Brückner⁵⁾, dessen Zusammenstellung ich hier wiedergebe:

	Jetzt	Diluvial	Depression
Gebirge von Wales	—	500 m	?
Harz	—	700 m	?
Nördlicher Schwarzwald	—	800 m	?
Südlicher Schwarzwald	—	950 m	?
Erzgebirge	—	1000 m	?
Schweizer Jura	—	1050 m	?
Bayrische Alpen	2500 m	1300 m	1200 m
Salzburger Alpen	2500 m	1200 m	1300 m
Östliche Alpen	2800 m	1500 m	1300 m
Hohe Tatra	2300 m	1500 m	800 m
Siebenbürger Alpen	—	1800 m	?

1) Vgl. C. Schröter: „Oswald Heer, ein Lebensbild, Zürich 1888. S. 335.

2) Geikie, l. c. S. 54.

3) Ch. Rabot, l. c. S. 220.

4) Geikie, l. c. S. 594.

5) Klimaschwankungen, S. 293.

	Jetzt	Diluvial	Depression
Pyrenäen	2700 m	1700 m	1000 m
Sierra Nevada (Spanien)	3100 m	2600 m	500 m
Thianschan	3750 m	2300 m	1450 m
Sierra Nevada (Kalifornien)	3750 m	2600 m	1150 m
Naga Hills (Indien)	4800 m	3000 m	1800 m
Sierra Nevada (Venezuela)	4500 m	4000 m	500 m
Neu-Süd-Wales	—	2000 m	?
Neu-Seeland	2300 m	1100 m	1200 m
Norwegen, England ¹⁾	1600 m	800 m	800 m

Überdies reichen nach Geikie²⁾ die Talzirkus herab: in den Vogesen bis 500 m, im Schwarzwald 750 m, im Böhmerwald 930 m, im Riesengebirge 1030 m, in den Sudeten 1200 m, in der Tatra 1500 m, woraus er schließt, daß die Schneegrenze umso höher war, je weiter man im Kontinente vorschritt.

Aus der Größe der Depression der Schneelinie schließt Brückner, daß die Temperatur der Eiszeit um etwa 3 bis 4° niedriger war als heute;³⁾ und ebenso schließt Uhlig,⁴⁾ daß mit einer Depression von 200 m pro °C. man auf eine Temperaturenniedrigung von 5° käme.⁵⁾

Wenn aber auch unter der Annahme, daß die eiszeitliche Schneegrenze rund 1150 m unter der heutigen verläuft, also die damalige Schneegrenze noch 300 m tiefer als die heutige Waldgrenze, so bedeutete die Temperaturenniedrigung von 4 bis 5° dennoch eine ganz erhebliche Klimaänderung. Daß dann das Eis weit in das Alpenvorland ausstrahlte, fügte sich selbstverständlich an, denn die ungeheuren Eismassen, die die Alpentäler erfüllten, konnten ein gewaltiges Areal des flachen Vorlandes decken, und nur durch eine derartige Ausbreitung war auch eine ausgiebige Ablation, eine Aufzehrung der Eismassen möglich.

Dies gilt nun auch für die Interglazialzeiten und ebenso für die Interstadialzeiten. Der Unterschied zwischen diesen ist ja nur quantitativ; er ist aus dem Auftreten von fossilen Pflanzenformen geschöpft, die im ersten Falle auf ein länger anhaltendes, wärmeres Klima und damit auf eine viel längere Dauer der Schwankung hindeuten, welche Anzeichen bei den interstadialen Schwankungen fehlen. Brückner sagt hiezu: „Gletscher und Steppe sind zwei extreme Produkte des Klimas, die wir nirgends in unmittelbarer Nachbarschaft voneinander antreffen In der diluvialen Zeit sehen wir Eiszeiten und Steppenperioden miteinander abwechseln; dieses Abwechseln konnte nicht unvermittelt geschehen. Ehe die Steppe das vom Eis freigegebene Gebiet in Besitz nahm, mußten über dasselbe nacheinander eine arktische Alpenpflanzenflora und eine Waldvegetation hinwegwandern.“⁶⁾

¹⁾ Geikie, l. c. S. 494.

²⁾ l. c. S. 520.

³⁾ Klimaschwankungen, S. 308.

⁴⁾ Erdgeschichte, II. Bd., S. 456.

⁵⁾ Hingegen soll die Höttinger Flora nach den Bestimmungen v. Wettsteins ein Klima von mindestens 2° milder als das jetzige von Innsbruck verlangen.

⁶⁾ Klimaschwankungen, S. 313.

Manches darüber wurde schon bei den interglazialen und interstadialen Ablagerungen erwähnt. Ganz allgemein finden sich zwischen der ersten und zweiten Vergletscherung Pflanzenreste: Fichte, Föhre, Eibe, Birke, Eiche u. s. w., die auf ein gemäßigtes Klima deuten. Es scheint jedoch hier zu wenig beachtet, daß unter Umständen keine allzugroße Retraktion des Gletschers nötig ist, um kurz vorher (natürlich nicht etwa wenige Jahre, sondern im geologischen Sinne gesprochen) von Eis überflutete Gegenden vegetationsfähig zu machen und sie mit einer selbst einer wärmeren Zone entsprechenden Vegetation zu bedecken. Derartige Vorkommnisse können auch heute noch beobachtet werden.

„Betrachten wir die Landschaftsverhältnisse des Feuerlandes und Westpatagoniens, so finden wir, daß dort überaus üppiger Baumwuchs besteht, fast undurchdringliche Wälder die tieferen Teile der Berge bis an die Grenze des ewigen Schnees bekleiden und die Gletscherzungen mitten zwischen den dichtesten Forsten ihren Weg talab zurücklegen. Die obere Grenze der Baumregion und die untere Grenze des ewigen Schnees berühren sich; ein Höhen-gürtel grüner Matten, wie er zwischen jenen beiden in Europa vorhanden ist, fehlt dem Feuerland vollständig“¹⁾. Auch findet sich an derselben Stelle die Bemerkung: „Eine arktische Flora umgab den Rand des nordeuropäischen Inlandeises und der Alpengletscher“ und ähnlich Heim²⁾.

Daß sich eine reichere Vegetation über der Schneegrenze entwickelt, berichtet Heim auch von den asiatischen Gletschern. „Während unter der Schneegrenze einzelne Schneefelder und Flecken das ganze Jahr bleiben, tritt über der Schneegrenze an einigen sonnigen Halden oft in wenigen Tagen ein prangender Blütenteppich hervor“³⁾. Im Hochlande von Pamir sind die Winterschneewolken in 2500 bis 3000 *m*, also unter der Schneegrenze. „Die höchsten Regionen erhalten ihren Schnee im Sommer, die tiefen im Winter; dazwischen (3000 bis 5000 *m*) bleibt der Boden im Winter schneefrei. Man steigt aus der Tiefe über schneebedeckte Gehänge und durch eingeschnitte Wälder hinauf, bis man bei 3400 bis 4900 *m* Meereshöhe im kräftigen Sonnenschein auf grüner Weide die Kirgisen mit ihren Herden überwintern findet. . . Der helle Winterhimmel der Alpen und die dort oft bei 1800 bis 2000 *m* zu findenden schneefreien Stellen mit Frühlingsblumen im Jänner sind nur ein schwaches Abbild der großartigen Erscheinung in Hochasien“⁴⁾.

Der Biafogletscher im Karakorumgebirge „trägt mit Moränen auch Erde mit Rasen und zahlreichen blühenden Pflanzen“⁵⁾.

„In Neu-Seeland steht die Temperatur in der Umgebung der Gletscherenden ziemlich hoch. Das Jahresmittel beträgt zirka 10°, das Klima ist ozeanisch, d. h. gleichförmig und feucht, die Kälte sinkt nie tief, so daß manche Gletscherenden, wie z. B. diejenigen des Franz Josefs-Gletschers umgeben sind von einer fast subtropischen Vegetation, Urwälder mit baumförmigen

1) Neumayer-Uhlig, Erdgeschichte, S. 456.

2) Gletscherkunde, S. 14.

3) Ibid. S. 10.

4) Ibid. S. 83/84.

5) Ibid. S. 427.

Farnkräutern, mit alten, immergrünen Typen von Nadelhölzern und einem reichen Schmuck von Fuchsia, der oft noch über die Gletscher hinaufragt“¹⁾).

Wenn also z. B. in der Schieferkohle von Dürnten Pflanzenformen auf ein warmes Klima hindeuten, kann daraus noch nicht gefolgert werden, daß diese Zwischenzeit länger gedauert habe, als eine andere, in welcher eine mehr arktische Flora herrschte; sondern es kann nur die Möglichkeit dieser Annahme ausgesprochen werden; es können aber äußere Umstände eine ganz andere Entwicklung der Pflanzen, eine raschere oder langsamere herbeigeführt haben. Es sind die Interglazialzeiten und die Interstadialzeiten qualitativ, möglicherweise auch quantitativ durchaus nicht so sehr verschieden, wie aus manchen Vorkommnissen, allerdings mit mehr oder weniger Unsicherheit, geschlossen zu werden pflegt. Daß die Schwankungen nicht von gleicher Dauer waren, daß sie sich nicht unter gleichen Temperaturverhältnissen vollzogen, ist ja wahrscheinlicher, als daß in dieser Richtung eine vollkommene Gleichmäßigkeit Platz gegriffen hätte, aber im Grunde genommen ist es für die Erörterung der Ursachen völlig gleichgültig, ob man die Interglazialzeiten und Interstadialzeiten trennt oder nicht.

Wenn daher Penck Interglazialzeiten von Gletscherschwankungen scharf trennen will, so kann dem jedenfalls ein gewisser didaktischer Wert nicht abgesprochen werden und auch für die Klassifizierung, für die Einreihung in ein System, mag dies gewisse Vorteile bieten; daß aber ein solches System nicht einmal allgemein gilt, daß möglicherweise Abwechslungen vorkommen, welche eine Wärmeperiode für eine Gegend interglazial, für andere aber als interstadial erscheinen lassen, zeigt zur Genüge die Vergleichung des alpinen Systems mit dem System der Vergletscherungen in außeralpinen Gegenden.

„Es wäre wohl möglich, daß der Inngletscher bei Innsbruck oszillierte, dann beim Vomperbach und später, als er den Sennfelderpaß überschritten hatte, bei Wallgau an der Isar, und daß sich in der Zwischenzeit zwischen den jemaligen beiden dadurch bewirkten Vereisungen der betreffenden Gegenden die Breccien anhäuften. Schon dieses ist eine sehr komplizierte und unwahrscheinliche Annahme.“²⁾ Beide Adjektive: „kompliziert“ und „unwahrscheinlich“ erscheinen hier nicht ganz gerechtfertigt. Und dem Ausspruch, „es wäre höchst sonderbar, daß sich gerade an den Stellen, wo der Inngletscher oszillierte, Breccien anhäuften“, möchte ich die Gegenbehauptung entgegenstellen, ob die Anhäufung von Breccien während einer Oszillation des Inngletschers sonderbarer ist, als das interstadiale Auftreten von Bergstürzen (der Flimser Bergsturz β - γ interstadial, der Bergsturz im Kandertale γ - δ interstadial).

Das an anderer Stelle³⁾ angeführte Vorkommnis der Schilfe auf diluvialer Nagelfluh kann wohl auf eine Verfestigung der Nagelfluh vor der Vergletscherung — zum Beweise eines langen Zeitintervalles — hindeuten. Kann aber nicht an anderen Stellen dieselbe Zwischenzeit ohne Verfestigung, ja nach Maßgabe der Umstände mit stärkerer Verwitterung abgelaufen sein?

1) Heim, Gletscherkunde, S. 450.

2) Die Vergletscherung der deutschen Alpen, S. 249.

3) Ibid. S. 281

Es wird auch auf die längere Dauer der Interglazialzeiten aus der Mächtigkeit der Kohhlenlager (30 bis 60 m) geschlossen. Es ist aber eine sich unmittelbar darbietende Frage, warum das Areal dieser Kohhlenlager so gering ist. Kohlenflöze in so unmittelbarer Nachbarschaft und von so geringer Oberflächenausdehnung, wie diejenigen bei Dürnten und Utnach, können ebensogut, vielleicht sogar eher als lokale, eisfreie Gebiete, Inseln, Nunatakers, wie als Zeugen einer allgemeinen Wärmeperiode aufgefaßt werden.

Hieraus kann aber gefolgert werden, daß es nicht erst einer übermäßig langen Zeit bedurfte, damit auf einem von einem Gletscher früher überströmten und von demselben verlassenen Boden eine üppige Flora entstehe. Geikie bemerkt, daß sich derartige Fälle nur auf arktischem Boden ereignen, in denen monatelang kontinuierlich Tag- und Sonnenwärme herrscht; in mittleren Breiten wären in der Nachbarschaft von Schnee und Eis stets Nebel und Wolken, welche das Klima anfangs unwirtlich gestalten, so daß sich erst eine Steppenflora und Fauna, daraufhin erst eine Waldflora und Fauna und als letztes Glied die organischen Wesen einer temperierten, eventuell subtropischen oder tropischen Region entwickeln könnten.¹⁾ Dieser Einwand scheint mir jedoch nicht ganz stichhältig und habe ich aus diesem Grunde die zahlreichen Beispiele, die sich auch auf nichtarktische Gebiete beziehen, angeführt.

Auch in gemäßigten Breiten kann sich in der Nähe des Eises rasch — nicht in einem Sommer, nicht in Dezennien, doch in Jahrhunderten, so daß der kontinuierliche Tag und die kontinuierliche Sonnenwärme auch von diesem Standpunkte keine wesentliche Rolle spielen — im geologischen Sinne eine üppige Vegetation entwickeln. Zudem zeigen ja zahlreiche Beispiele der Anpassung, der Verbreitung von Tieren und Pflanzen, daß sich unter Umständen eine sonst nur den Tropen angehörige Vegetation auch außertropisch entwickeln kann.

Aus dieser ganzen Diskussion möchte ich eine Schlußfolgerung ziehen, welche ich bei der Beurteilung der folgenden Ausführungen, wenn dieselben doch nicht alle Erscheinungen zu erklären vermögen, der Beachtung empfehlen möchte, und welche auch zur Entschuldigung dienen kann, daß ich im folgenden einen Komplex von Entwicklungen darbiere, welche trotz ihrer scheinbaren Vollständigkeit noch eine sehr große Zahl von Lücken zeigen: Die angebbaren Ursachen der Eiszeiten können nur genereller Natur sein; Abweichungen, welche lokalen Störungen zuzuschreiben sind, entziehen sich nach dem gegenwärtigen Stande unseres Wissens jedenfalls noch vorläufig der wissenschaftlichen Behandlung.

¹⁾ The great Ice Age. S. 386.

II. Teil.

DIE URSACHEN DER EISZEITEN.

Einleitung.

Es ist selbstverständlich, daß man bald, nachdem man das Vorhandensein einer wiederholten Vergletscherung der Erdoberfläche in einem Maße, von welchem die jetzige Vergletscherung nur ein schwaches Abbild geben kann, konstatiert hatte, nach den Ursachen derselben zu forschen begann. Die Untersuchungen hierüber sind ganz bedeutend angewachsen und die mannigfachsten Ursachen wurden für dieselben angegeben. Hin und wieder allerdings findet man auch die Meinung vertreten, daß es noch zu früh wäre, gegenwärtig nach Ursachen zu forschen. „When the country has been thoroughly examined, and the glacial deposits, striae etc. are well known, the proximate causes of these phenomena will in all probability be easily determined.“¹⁾ In dieser Weise ausgesprochen, kann man dem Satz nicht ganz zustimmen. Ob sich die Ursachen jemals leichter bestimmen lassen werden, bleibt immerhin fraglich; vielleicht wesentlich sicherer, aber der Anhaltspunkte für Schlüsse gibt es wohl gegenwärtig auch bereits genug.

Die Meinungen der Forscher stehen sich hier heute mitunter ziemlich unvermittelt gegenüber, und eine Ursache, welche der eine für allein wirksam angibt, wird von einem anderen als absolut unzulässig erklärt. Ein Bild von dieser Verschiedenheit der Ansichten kann die These und die Antithese geben: Die Gletscher wachsen beim Kälterwerden — die Gletscher wachsen beim Wärmerwerden. Beide Sätze sind richtig; der erste wird unmittelbar eingesehen,

¹⁾ J. Burr Tyrell The glaciation of North Central Canada. The Journal of Geology. Chicago. Bd. 6 (1898) S. 149.

weil man sich dabei eine mäßige Temperatur unter 0° denkt, etwa -2 oder -3° ; aber auch der zweite ist richtig, wenn etwa die Temperatur unter -10° gesunken war, und nun steigt. Korrekt ausgedrückt müßte der Satz lauten: Die Gletscher wachsen bei wenig unter dem Gefrierpunkte liegenden (steigenden oder fallenden) Temperaturen.¹⁾

Wenn man behauptet, wie dies mitunter geschieht, die Ursache der Eiszeiten ist eine allgemeine Verminderung der Temperatur, so ist dieses entweder eine Tautologie, oder aber es muß erklärt werden, woher diese Temperaturerniedrigung kommt, wenn sie den Eiszeiten voranging. „Long ages before the country became locked in ice, the climate must have been getting colder and colder.“²⁾ „Wenn man Indien mit einer Eisdecke überzieht, so wird sein Sommer kälter sein, wie derjenige in England“³⁾; das wird niemand leugnen. Und, könnte man hinzufügen, wenn man in den Polarregionen die Eismassen wegnehmen und die umspülenden Wassermassen auf, sagen wir 20° erwärmen würde, so würde es in den Polarregionen wärmer sein wie in England. Ist dieses aber eine Erklärung für die Entstehung der Eiszeiten? Brückner⁴⁾ sagt, daß eine Temperaturerniedrigung von $3-4^{\circ}$ für das Auftreten der Eiszeiten ausreichen, daß sich aber die Ursachen dieser mächtigen Klimaschwankungen uns vollkommen entziehen.

Auch diesen Schlußsatz möchte ich ebenso wie die früher erwähnte Behauptung Tyrells nicht zugeben. „Es ist dem Menschen eingeboren, daß sein Gefühl hinauf und vorwärts dringt“. Wir suchen die Vergangenheit der Menschheit und ihres näheren und weiteren Wohnsitzes zu erforschen, zu erkennen, und während die Ausgrabungen an Stätten längst untergegangener Kulturepochen neues Licht auf die Heimstätten, den Ausgangspunkt und die Höhe der Kultur vergangener Zeiten, die wir nach Jahrtausenden bemessen, bieten, forscht der menschliche Geist nach den Ursachen jener gewaltigen Veränderungen, die die Grundfesten unseres Stammsitzes betreffen, auf diesem die Möglichkeit des Entstehens einer Kultur förderten oder auch unterbanden, in längst vergangenen Zeiten, die wir vielleicht nach Jahrmillionen zu bemessen haben.

Wenn bereits so zahlreiche Ursachen für eine Erscheinung verantwortlich gemacht werden und Jeder Beweise für eine dieser Hypothesen gibt, so bleibt die Möglichkeit dieser Ursache nicht ausgeschlossen, wenn auch von anderer Seite Bedenken gegen dieselbe geäußert werden. Jede Ursache wird eben nur unter gewissen Prämissen als die wirksame erscheinen können, und was uns fehlt, ist der volle Einblick in die Prämissen. Es können daher auch nicht alle jene Bedingungen, welche mitunter von vornherein für eine Erklärung der

¹⁾ S. auch S. 91. Woeikoff kommt zum Schlusse, „daß die Geologen, welche eine höhere Temperatur der Luft und der Meere des Erdballes als der Vergletscherung günstig betrachten, nur hinsichtlich einiger der kältesten Räume der Nordhalbkugel teilweise recht haben“, da eine Erwärmung der Meere zwischen 40° bis 60° nördl. und auch südl. Breite jedenfalls einen großen Teil der Gletscher zum Schwinden bringen würde. l. c. SS. 104/5.

²⁾ Geikie, l. c. S. 70.

³⁾ Croll, l. c. S. 60.

⁴⁾ Klimaschwankungen S. 314.

Eiszeiten aufgestellt werden, zugegeben werden. Daß die Bedingung erfüllt sein muß, daß sie periodisch wirkend, daß sie höhere Breiten sowohl als auch die Tropen betreffen muß, ist richtig — dies zeigen die Erscheinungen. Warum aber die Ursache eine solche sein müsse, daß sie die Nord- und Südhemisphäre gleichzeitig beeinflussen müßte; daß sie aber rein tellurisch — oder rein kosmisch sein müsse — das liegt nicht in den Erfahrungstatsachen begründet, die zu erklären sind.

Ein Umstand, auf den wiederholt aber stets nur gelegentlich hingewiesen wurde, der aber gerade hier eine fundamentale Rolle spielt, so daß er nicht nur nicht übersehen werden darf, sondern geradezu durch die ganze Untersuchung festgehalten werden muß, ist die Tatsache der Summation der Wirkungen.

Eine geringe Erniedrigung der Temperatur kann, namentlich wenn sie die Sommermonate betrifft, zu einer Eisvermehrung führen, welche bereits den Keim eines weiteren Anwachsens der Gletscher in sich trägt.¹⁾ Die starke Vereisung bringt eine, wenn auch nur geringe Abkühlung; diese bewirkt geringere Verdunstung, aber starke Niederschläge; zum Abschmelzen ist Wärme nötig; wenn diese fehlt, wird die Ablation geringer; das Abschmelzen selbst erniedrigt die Temperatur der Umgebung wieder. Jede Erwärmung erhöht die Verdunstung, wodurch wieder eine geringe Abkühlung erfolgt; weiters ist aber eine wasserdampfreiche Atmosphäre weniger durchlässig für Wärmestrahlen und bei gleicher Wärmestrahlung von der Sonne wird die Erde eine geringere Wärmemenge erhalten.

Ähnliches gilt vom Kohlensäuregehalt der Luft. Und wenn auch Chamberlin seine Arbeit²⁾ in nicht ganz berechtigter Weise als eine notwendige Ergänzung zu den Ausführungen von Arrhenius, auf welche später eingegangen wird, betrachtet, in dem einen Punkte hat er vollkommen recht. Durch die großen Eismassen wird die absorbierende Landoberfläche vermindert, der Kohlensäuregehalt der Luft *ceteris paribus* steigen, und so die Bedingungen für die weitere Vereisung gegeben; das umgekehrte tritt beim Schwinden der Landoberfläche auf.

Weiters sind aber die verschiedenen Ursachen, welche für die Eiszeiten angegeben wurden, voneinander nicht unabhängig. Wenn z. B. eine Veränderung der Lagerung der Erdachse eine Veränderung in dem Klima der Erde zur Folge hat, gleichgültig welcher Art dieses ist — die einen behaupten, daß eine Vergrößerung der Schiefe der Ekliptik eine Erniedrigung, die anderen, daß sie eine Erhöhung der Temperatur zur Folge haben müsse — und ist dann eine veränderte Vereisung die Folge, so kann dieses in verschiedener Richtung: durch Verschiebung des Schwerpunktes, wenn es sich um eine Vereisung von ungleich um die Pole verteilten Kontinenten handelt, oder durch Veränderung der Erdabplattung wenn man die Vergrößerung der Polarkalotten berücksichtigt —

¹⁾ „Durch sein Dasein schafft sich der Gletscher die Bedingungen für sein Fortbestehen“ Heim, l. c. S. 479. „Die Abkühlung in der Eiszeit ist eher eine Folge als eine Ursache der Eisinvasion“. Marchi, l. c. S. 21.

²⁾ „A working hypothesis of the Glacial Periods.“ The Journal of Geology, Bd. 6.

auf die Lage der Erdachse zurückwirken. Da überdies, wie auch aus den gegenwärtigen Gletscherschwankungen leicht zu ersehen ist, die Gletscher in der arktischen Region viel stärker wachsen, wie in den gemäßigten Zonen, weil die gleiche Temperaturerniedrigung bei bereits niedrigerer Temperatur ein größeres Areal zur Vergletscherung bringt, so ist die Erniedrigung der Temperatur um 3 bis 4° vollständig ausreichend, um die gewaltigen Gletscher- ausdehnungen der Eiszeiten zu erklären. Dadurch werden dann die Erklärungs- versuche wesentlich vereinfacht. Eine nicht allzu große Änderung in den grundlegenden Verhältnissen vermag gar nicht so schwer eine Temperaturschwankung zu erklären, deren Amplitude eine an sich mäßige Größe beträgt. Schwierigkeiten aber bietet nur die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen, deren Gesamtheit durch eine einzige Ursache zu erklären kaum möglich sein wird, und es wird daher nötig, die einzelnen bisher aufgestellten Theorien, soweit dieselben überhaupt zulässig erscheinen, durchzunehmen und diejenigen von denselben beizubehalten, welche für sich allein oder im Zusammenhange mit anderen Tatsachen möglicherweise zu einer befriedigenden Erklärung zu führen versprechen können.

Wenn ich hier keineswegs jenen absolut behauptenden oder absolut negierenden Ton wähle, sondern mit größerer Vorsicht nur von der Möglichkeit einer befriedigenden Erklärung spreche, so entspringt dieses meiner Überzeugung, daß wir noch vor einer großen Menge von teilweise sehr komplizierten Fragen stehen (Konstitution des Erdinnern, Reihenfolge und Dauer der Vereisungen) die bisher noch nicht durch Erfahrungstatsachen völlig geklärt sind, und weil anderseits eine ganze Reihe von Einflüssen (Temperaturschwankungen mit der Höhe, Feuchtigkeitsgehalt der Luft, Schwankungen in der Zusammensetzung der Luft, Anteil der Senkung des Festlandes oder Flutung der Hydrosphäre an der Konfiguration der Erdoberfläche u. s. w.) zum Teil nur mit sehr hypothetischen Werten eingeführt werden können, so daß wir keineswegs berechtigt sind, unseren Resultaten eine allzu große Gewißheit zuzuschreiben.

Die Ursachen, welche zur Erklärung der Eiszeiten angenommen worden sind, können im wesentlichen in zwei Gruppen geteilt werden; in tellurische und kosmische. Die ersteren sind: 1. Geologische und geographische und 2. Meteorologische; die letzteren wesentlich: 3. Astronomische, mit der Stellung der Erde im Weltraume zusammenhängend.

Ehe auf die einzelnen Ursachen eingegangen werden kann, ist jedoch noch eine Erklärung voranzuschicken. Die sämtlichen Erklärungen können sich im wesentlichen mit einiger Sicherheit nur auf die quartäre Eiszeit beziehen. Vor dem Quartär fanden ja, wie die Geologen annehmen, so tiefgreifende Veränderungen in der Konfiguration der Erdrinde statt, daß die Gletscherverteilung schon infolge der ganz verschiedenen Verteilung der Gebirge, selbst des ganzen Festlandes eine gänzlich verschiedene sein mußte. Die für jene Zeiten angenommene Verbindung zwischen Asien und Australien, zwischen Europa und Amerika sind zwar Hypothesen, welche zur Klärung mancher Erscheinungen herangezogen werden; aber wenn dereinst hier wirklich Fest-

land war, welches jetzt tief im Meeresgrunde verborgen liegt und so lange der Forschung der Menschen entrückt sein wird, als wir nicht Mittel haben, mit unserem Auge Wasser und Festland zu durchdringen, so mögen wohl auch anderweitig derartige Veränderungen tiefeinschneidender Natur vorgekommen sein, die alle unsere Erklärungsversuche illusorisch machen. So habe ich ja bereits darauf hingewiesen¹⁾, daß außer für die Permeiszeit alle anderen angenommenen Epochen umfassender Vergletscherungen auf Schlüssen allzu schwankender Natur aufgebaut sind und daß, so lange die Hypothesen von vorpermischen Eiszeiten nicht auf sicherer Basis gestützt sein werden, die physikalischen Wissenschaften sich mit Erklärungen dieser Erscheinungen nicht zu befassen brauchen. Nur für jene Epochen, während deren wir unsere Erdrinde, unser Wasser- und Luftmeer anzunehmen haben, gelten die Entwicklungen und von astronomischen Erklärungsversuchen sind überdies alle jene auszuschließen, welche vermöge des Gültigkeitsbereiches der mathematischen Entwicklungen eine Übertragung auf so ferne Zeiträume nicht gestatten — ein Umstand der von Nicht-Astronomen mitunter übersehen wird.

Es muß nun allerdings zugegeben werden, daß auch im Quartär Veränderungen der Erdoberfläche vorkommen: Hebungen und Senkungen, von denen schon im ersten Teile Erwähnung geschah, Einsturz von Bergen, der Flimser Bergsturz, der Einsturz in der Sunda-See nach dem Ausbruch des Krakataua, die Kratereinstürze der tätigen Vulkane und das Aufwerfen von Sekundärkratern, der Einsturz des Fernpasses nördlich vom Tschirgant bei Innsbruck u. s. w.

Aber alle diese Veränderungen sind, so gewaltig sie als Lokalerscheinungen auftreten, doch gegenüber dem Gesamtbilde, welches uns die Erdoberfläche darbietet, als verschwindend zu bezeichnen.

Mit Rücksicht auf die gewaltigen Veränderungen aber, welche im Tertiär und Vortertiär die Erde betrafen, würden auch die Erklärungen für die Permeiszeit, selbst wenn dieselbe als genügend sichergestellt angesehen würde, nur den Charakter von mehr oder weniger sinnreichen oder auch phantastischen mathematischen Entwicklungen haben, weshalb ich auf eine Erklärung aller vorquartären angeblichen Eiszeiten verzichtet habe.

Indem aber auch die astronomischen Konstanten, die Konfigurationen der Weltsysteme in so fernen Epochen Wandlungen durchgemacht haben können, die den gegenwärtigen Zustand als einen möglicherweise völlig veränderten zu betrachten nötigen, werden wir nicht durch Übertragung astronomischer Rechnungen auf Erklärungen für den Zustand der Erde, sondern im Gegenteil durch geologische Studien über die Veränderungen der Erde zu sichereren Schlüssen über die kosmischen Verhältnisse unserer Erde in ihrer Stellung im Weltsystem geführt werden können. Denn es entspricht nicht der gegenwärtigen Art der Forschung auf unsichere, mitunter sehr zweifelhafte Beweise und mangelhafte Erfahrungstatsachen hin, Hypothesen zu bauen.

¹⁾ S. S. 123.

Ob aber für die quartäre Eiszeit dabei Interglazial- und Interstadialzeiten getrennt aufgefaßt werden oder als längere und kürzere Intervalle derselben Art, ist ganz gleichgültig; der Mathematiker kann die Sache so auffassen, daß sich Perioden längerer und kürzerer Unterbrechung finden, ohne daß darin ein Widerspruch gegen die beobachteten Tatsachen gefunden werden kann.

Daß die zirkumpolaren Gletscher eine so viel stärkere Entfaltung zeigen, ist wie erwähnt, natürlich. Merkwürdig aber ist die Abnahme der Vergletscherung von West nach Ost, und zwar sowohl in Eurasien als auch in Amerika; noch mehr aber die Übereinanderlagerung der Vereisungen bis zu einer gewissen Grenze: die verschiedenen Stadien der Vereisung scheinen die Grenze nicht überschritten zu haben, so, als ob das Zentrum der immer schwächer werdenden Vereisung nach Osten gerückt und die Ostgrenze der Vereisungen immer dieselbe geblieben wäre und die Westgrenze um den doppelten Betrag der Zentrumbewegung nachgerückt wäre, und zwar ebenfalls sowohl für Eurasien, als für Amerika; ein Umstand, auf den im wesentlichen noch nicht hingewiesen wurde.

VI. Kapitel.

Geologische und geographische Ursachen.

I. Die Theorie von Charpentier, daß die Alpen einst höher gewesen wären und durch eine postglaziale Senkung eine Einschränkung der Gletscherbereiche auf den heutigen Umfang erlangt hätten, war widerlegt, sobald das Vorhandensein der Erscheinung in anderen Gebieten auf die Allgemeinheit des Phänomens deutete. In der Tat müßte sich bei lokalen Ursachen, wenn sie sich nicht auf die Alpen allein, sondern auch auf andere Gebirge beziehen, ein Wechsel der Erscheinungen auftreten. Hat sich eine Reihe von Gebirgen gesenkt und zeigen sich Spuren einer einstigen großen Vergletscherung, die allerdings nicht überall gleichzeitig aufgetreten sein mußte, worüber die Erfahrungstatsachen bisher noch keinen sicheren Schluß gestatten, so müßten aber dafür andere Gebirge gegenwärtig im Maximum der Vergletscherung sein; aber bei keinem vergletscherten Gebirge der Jetztzeit kann man eine maximale Vergletscherung annehmen: Wo Gletscher sind, sind überall Spuren einer früheren größeren Vergletscherung.¹⁾

II. Ähnliches gilt von der Theorie Lyells, nach welcher Europa während des Quartärs unter Wasser war, in einem Meere versunken, auf welchem die Eisberge schwammen.

Daß die Sahara früher ein Binnenmeer war und seit der Austrocknung dieser Wüste das Klima der umgebenden Landstriche sich wesentlich geändert haben soll, kann nicht mehr aufrechterhalten werden, seitdem die Hypothese von der einstigen Überflutung der Sahara widerlegt wurde.

Wenn nun trotzdem auch Neumayer-Uhlig nach Zurückweisung aller anderen Hypothesen zur Erklärung die Veränderung in der Verteilung des Festen und Flüssigen auf der Erdoberfläche als die einzige brauchbare Hypothese erklären,²⁾ so geschieht dies auf Grund der wohlgegründeten Tatsachen von den großen Umwälzungen, welche sich im Bereiche der Litho- und Hydrosphäre im Laufe der Entstehung der Erde vollzogen haben. Allein für die hier wesentlich in Betracht kommenden Zeiten können die zulässigen Veränderungen nicht allein verantwortlich gemacht werden, wenn sie auch jedenfalls eine

¹⁾ Der Satz ist nicht ganz korrekt: die gegenwärtig nicht vereisten Rumpfgebirge könnten einst stark vereist gewesen sein.

²⁾ Erdgeschichte II. Bd. S. 152.

gewisse Berücksichtigung erfordern, freilich in einer von der ursprünglich gedachten vielleicht etwas abweichenden Form.

Betrachtet man Änderungen, welche die Gestalt der Erde betreffen können, unter dem Standpunkte der physikalischen Konstanten: Änderungen der Rotationsgeschwindigkeit, Änderungen der Stellung der Rotationsachse im Erdkörper — ohne vorerst auf die Ursachen einzugehen, die diese Änderungen bedingen können, so zeigt sich sofort eine Gesetzmäßigkeit in den Höhenänderungen, welche durchaus nicht zu vernachlässigen ist.

Die Form der Erde wird gegeben durch die Gleichung der Meridiankurve; wenn dieselbe als eine Ellipse angesehen wird, so ist

$$r = a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 u},$$

wobei u die reduzierte Breite ist. Hiefür kann für die vorliegenden Untersuchungen ausreichend genau geschrieben werden

$$r = a (1 - \alpha \sin^2 \varphi^2), \quad (1)$$

wenn φ die geographische Breite und α die Abplattung bedeutet. Dann ergibt sich für die Abnahme der Schwerkraft vom Äquator zum Pole, wenn G die Schwerkraft am Äquator ist, der Ausdruck:

$$g = G (1 + \beta \sin^2 \varphi^2).$$

Bezeichnet man die Schwerkraft am Pole mit Γ , so folgt hieraus für $\varphi = 90^\circ$:

$$\Gamma = G (1 + \beta)$$

$$\beta = \frac{\Gamma - G}{G} = \frac{\Gamma}{G} - 1.$$

Nach dem Clairaut'schen Theorem ist, wenn $\omega = 2\pi : t$ die Winkelgeschwindigkeit für die Rotationszeit T ist und $\gamma = \omega^2 a : G$ gesetzt wird

$$\gamma = \frac{2}{5} (\alpha + \beta). \quad (2)$$

Es sollen nun jene Änderungen untersucht werden, welche die Größen α , β , γ und die Achsen a , b erfahren, wenn die Rotationsdauer t um dt zunimmt, also $t + dt$ wird, wobei zunächst vorausgesetzt werden soll, daß das Volumen ungeändert bleibt.

Da für den vorliegenden Zweck ausreichend genau

$$\frac{\Gamma}{G} = \frac{a^2}{b^2} \text{ und } \frac{a-b}{a} = \alpha, \quad b = a (1 - \alpha)$$

ist, so wird

$$G = \Gamma (1 - \alpha)^2$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{2}{(1-\alpha)^3} \frac{d\alpha}{dt}; \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{2}{5} \left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \right)$$

daher für kleine Werte von α

$$\frac{d\beta}{dt} = 2 \frac{d\alpha}{dt} \quad ^1); \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{6}{5} \frac{d\alpha}{dt}. \quad (3)$$

Wegen der Konstanz des Volumens des Rotationsellipsoides ist

$$a^2 b \pi = a^3 (1 - \alpha) \pi = \text{const.},$$

demnach

¹⁾ Dieser Wert ist besser als der aus den Helmholtz'schen Gleichungen (l. c. S. 72) für die homogene Erde folgende, welche Annahme wegen $K = (C - A) : M = \frac{2}{5} a^2 \alpha$; $\alpha = \beta$ zur Folge haben würde.

$$3 a^2 (1 - \alpha) \frac{d a}{d t} - a^3 \frac{d \alpha}{d t} = 0$$

$$\frac{d b}{d t} = (1 - \alpha) \frac{d a}{d t} - a \frac{d \alpha}{d t}$$

und für kleine Werte von α :

$$\frac{d a}{d t} = \frac{1}{3} a \frac{d \alpha}{d t}; \quad \frac{d b}{d t} = -\frac{2}{3} a \frac{d \alpha}{d t}. \quad (4)$$

Aus der Definitionsgleichung

$$\gamma = \frac{4 \pi^2 a}{G t^2}$$

folgt durch logarithmische Differentiation:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d \gamma}{d t} = \frac{1}{a} \frac{d a}{d t} - \frac{2}{t} - \frac{1}{G} \frac{d G}{d t}.$$

Da aber die Schwerkraft am Äquator für verschiedene Äquatorialhalbachsen und ungeänderte Masse umgekehrt proportional dem Äquatorradius ist also $G = K : a^2$, so wird

$$\frac{1}{G} \frac{d G}{d t} = -\frac{2}{a} \frac{d a}{d t}$$

und damit

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d \gamma}{d t} = \frac{3}{a} \frac{d a}{d t} - \frac{2}{t} = \frac{d \alpha}{d t} - \frac{2}{t}.$$

Es folgt demnach zur Bestimmung von $d \alpha$ die Bedingung:

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{\gamma} \frac{d \alpha}{d t} = \frac{d \alpha}{d t} - \frac{2}{t}$$

$$\frac{d \alpha}{d t} = -\frac{5}{3} \frac{\gamma}{t} \frac{1}{1 - \frac{5}{3} \gamma}$$

wofür genügend genau gesetzt werden kann

$$\frac{d \alpha}{d t} = -\frac{5}{3} \frac{\gamma}{t}; \quad (5)$$

damit wird dann

$$\begin{aligned} \frac{d \beta}{d t} &= -\frac{10}{3} \frac{\gamma}{t}; & \frac{d a}{d t} &= -\frac{5}{9} a \frac{\gamma}{t}; \\ \frac{d \gamma}{d t} &= -2 \frac{\gamma}{t}; & \frac{d b}{d t} &= +\frac{10}{9} a \frac{\gamma}{t}. \end{aligned} \quad (5 a)$$

Betrachtet man nun den Ausdruck (1) in seiner Abhängigkeit von der Rotationszeit, so folgt:

$$\frac{d r}{d t} = \frac{d a}{d t} (1 - \alpha \sin^2 \varphi) - a \frac{d \alpha}{d t} \sin^2 \varphi,$$

daher mit Vernachlässigung der Größen zweiter Ordnung.

$$\frac{d r}{d t} = -\frac{5}{9} a \frac{\gamma}{t} + \frac{5}{3} a \frac{\gamma}{t} \sin^2 \varphi = -\frac{5}{9} a \frac{\gamma}{t} (1 - 3 \sin^2 \varphi). \quad (6)$$

In der Breite φ_0 , welche bestimmt ist durch

$$\sin \varphi_0^2 = \frac{1}{3}, \quad \varphi_0 = 35^\circ 15' . 9$$

findet daher eine Änderung in der Länge des Radiusvektors nicht statt.

Für die zweiten Differentialquotienten folgt mit den bereits oben zugestandenen Vernachlässigungen für kleine Werte von α :

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = 2 \frac{d^2\alpha}{dt^2}; \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{6}{5} \frac{d^2\alpha}{dt^2};$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{1}{3} a \frac{d^2\alpha}{dt^2}; \quad \frac{d^2b}{dt^2} = -\frac{2}{3} a \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Hieraus folgt dann

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = +5 \frac{\gamma}{t^2}; \quad \frac{d^2\beta}{dt^2} = +10 \frac{\gamma}{t^2}; \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = +6 \frac{\gamma}{t^2} \quad (7)$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = +\frac{5}{3} a \frac{\gamma}{t^2}; \quad \frac{d^2b}{dt^2} = -\frac{10}{3} a \frac{\gamma}{t^2};$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2a}{dt^2} - 2 \frac{da}{dt} \frac{d\alpha}{dt} \sin \varphi^2 - a \frac{d^2\alpha}{dt^2} \sin \varphi^2 = \frac{5}{3} a \frac{\gamma}{t^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi),$$

welcher Wert für $\varphi = 35^\circ 16'$ ebenfalls verschwindet.

Dieses zeigt, daß bei Veränderungen der Umdrehungsgeschwindigkeit die beiden Parallelkreise in der Breite $\pm 35^\circ 16'$ keine Hebungen oder Senkungen erfahren, daß also an dieser Stelle klastische Kräfte nicht auftreten.

Wenn sich die Lage der Polarachse in der Erde um den Betrag $d\varphi$ ändert, so daß die Rotation um eine andere, gegen die frühere um den Winkel $d\varphi$ geneigte Achse erfolgt, so wird sich eine neue Gleichgewichtsfigur, ein Rotationsellipsoid um diese neue Rotationsachse herstellen; ein Punkt, welcher früher die geographische Breite φ mit dem zugehörigen Radiusvektor r hatte, wird jetzt eine Breite $\varphi + d\varphi$ haben, und die aus dieser Umstellung resultierende Änderung dr des Radiusvektors folgt aus

$$dr = -a\alpha \sin 2\varphi d\varphi. \quad (8)$$

Für $d\varphi = 1^\circ$ folgt hieraus mit den Werten $\log a = 6.80392$ (in Metern) $\log \alpha = 7.52483$ für den Koeffizienten $a\alpha \text{ arc } 1^\circ = 372.1 \text{ m}$, so daß einer Veränderung $d\varphi = 1^\circ$ in der Breite φ

$$dr = -372.1 \sin 2\varphi$$

entspricht. Denkt man sich die Lithosphäre absolut starr, hingegen die Hydrosphäre absolut beweglich, so daß diese in jedem Augenblicke um die instantane Rotationsachse ein Rotationsellipsoid bildet, so wird bei Veränderungen der Rotationsachse eine Flutung der Hydrosphäre erfolgen, so daß dr den Höhenunterschied ergeben wird, und zwar bei der Bewegung des Poles von dem Punkte weg ein Ansteigen des Wassers, also eine Verminderung der Höhe der Berge, bei der Bewegung des Poles gegen den Punkt hin eine Hebung des Festlandes, eine negative Strandverschiebung. Die größte Erhebung erfolgt in der Breite $\varphi = 45^\circ$ und beträgt für jeden Grad der Polverschiebung 372 m .

Umgekehrt kann man aus der Größe der Strandverschiebungen die zu derselben notwendige Polhöhenverschiebung erhalten; für eine Strandverschiebung h in der geographischen Breite φ ist eine Polverschiebung im Betrage

$$d\varphi = \frac{h}{372.1 \sin 2\varphi}$$

erforderlich, wenn die Verschiebung des Poles im Meridian der beobachteten Strandlinie, zum Beobachtungsorte hin oder von demselben weg angenommen wird.

Etwas komplizierter werden die Verhältnisse, wenn es sich darum handelt, Polverschiebungen in verschiedenen Meridianen zu vergleichen, da in den um 90° von dem Meridian der Polverschiebung entfernten Punkten die Strandverschiebungen gleich Null sein werden.

Es genügt, die Berechnungen für eine Kugel durchzuführen, da für ein von derselben wenig verschiedenes Ellipsoid die Überhöhungen bzw. Vertiefungen gegen dasselbe von den gleichen Niveauänderungen über die Kugel höchstens um Größen von der zweiten Ordnung der Exzentrizität der Meridianellipse verschieden sein werden.

Sei für einen Ort M (Fig. 7) die Polhöhe für die Lage des Poles in Q gleich φ ; nach der Polverschiebung Δ in einer gewissen Richtung nach P die neue Polhöhe ψ und die Lage der Polverschiebung QP gegenüber M oder umgekehrt die Lage des Punktes M gegenüber dem Meridian QP der Polverschiebung gegeben durch den Winkel l_0 , d. i. die Länge des Meridianes QM gegenüber dem Meridian QP . Dann erhält man aus dem sphärischen Drucke QPM :

$$\sin \psi = \sin \varphi \cos \Delta + \cos \varphi \sin \Delta \cos l_0$$

demnach für kleine Werte von Δ

$$\sin \psi = \sin \varphi + \Delta \cos \varphi \cdot \cos l_0$$

oder

$$\sin \psi - \sin \varphi = 2 \sin \frac{1}{2} (\psi - \varphi) \cos \frac{1}{2} (\psi + \varphi) = \Delta \cos \varphi \cos l_0,$$

daher, da man für $\cos \frac{1}{2} (\psi + \varphi)$ wegen der Kleinheit des Unterschiedes von ψ und φ einfach $\cos \varphi$ und für $\sin \frac{1}{2} (\psi - \varphi)$ den Winkel setzen kann:

$$\psi - \varphi = d\varphi = \Delta \cos l_0. \quad (9)$$

Es wird daher

$$\begin{aligned} dr &= -a \alpha \sin 2\varphi \cdot \Delta \cos l_0 \\ h &= -372.1 \sin 2\varphi \cos l_0 \cdot \Delta \end{aligned} \quad (10)$$

wobei, da sich der Koeffizient auf die Verschiebung um 1° bezieht und als Längeneinheit $1 m$ gewählt ist, Δ in Graden und h in Metern auszudrücken ist.¹⁾

Diese Werte sind es, welche sich in den „Transgressionen der Meere“ äußern können. Wie man sieht, sind dieselben in der Nähe des Äquators und des Poles am kleinsten. Es werden die Maximalwerte (für $l_0 = 0^\circ$ und 180° , d. i. in der Richtung der Polverschiebung) für

$\varphi = \begin{cases} 0^\circ & 5^\circ & 10^\circ & 15^\circ & 20^\circ & 25^\circ & 30^\circ & 35^\circ & 40^\circ & 45^\circ \\ 90 & 85 & 80 & 75 & 70 & 65 & 60 & 55 & 50 & 45^\circ \end{cases}$	$\Delta = 1^\circ$	$h = 0$	64.6	127.3	186.1	239.2	285.0	322.3	349.7	366.5	372.1 m
$\Delta = 10'$	$h = 0$	10.8	21.2	31.0	39.9	47.5	53.7	58.3	61.1	62.0 m	

Sind die Werte der Strandverschiebungen h für verschiedene Punkte, deren Breiten φ und Längen λ_0 gegen den Nullmeridian (Greenwich) sind,

¹⁾ Von diesem Betrage wäre der im gleichen Sinne erfolgende Betrag für die Bewegung des Festlandes abzuziehen; da derselbe jedoch (s. S. 47) noch nicht 0.01 desjenigen des flüssigen Erdkörpers beträgt, so kann von demselben abgesehen werden.

bekannt, so läßt sich daraus Δ und die Lage des Kreises QP ermitteln. Ist ω_0 die Länge von QP , λ_0 die Länge von M gegen den Nullmeridian, so ist $l_0 = \lambda_0 + \omega_0$ und es wird

$$h = -372 \cdot 1 \sin 2 \varphi \Delta \cos \lambda_0 \cos \omega_0 - 372 \cdot 1 \sin 2 \varphi \Delta \sin \lambda_0 \sin \omega_0. \quad (10 a)$$

Führt man statt der Unbekannten Δ , ω_0 die Unbekannten

$$x = \Delta \cos \omega_0, \quad y = \Delta \sin \omega_0 \quad (10 b)$$

ein, so erhalten die zur Bestimmung derselben dienenden Gleichungen die Form

$$372 \cdot 1 [\sin 2 \varphi \cos \lambda_0 \cdot x + \sin 2 \varphi \sin \lambda_0 \cdot y] = -h_0 \quad (11)$$

wobei h_0 die in Metern ausgedrückte, beobachtete Strandverschiebung ist.

Für die Berechnung werden natürlich alle zur Verfügung stehenden Beobachtungen von Strandverschiebungen zu verwenden sein; man hat dann zur Bestimmung von x und y eine größere Anzahl Gleichungen, aus denen die Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden; sind x , y bekannt, so erhält man Δ , ω_0 aus den Gleichungen (10 b). Berechnet man dann die dieser erhaltenen Polverschiebung Δ , ω_0 entsprechende Flutung der Hydrosphäre nach (10 a), so gibt dieses die aus derselben folgende Strandverschiebung h , welche im allgemeinen mit h_0 nicht übereinstimmen wird, und die Abweichung $h_0 - h$ gibt schließlich den Betrag der von der Flutung durch Polhöhenverschiebung befreiten Hebung oder Senkung.

Berücksichtigt man gleichzeitig die einer Änderung der Rotationsdauer $dt = \tau$ entsprechende Änderung des Radiusvektors des Punktes M , welcher sich durch (6) ausdrückt, wobei der Koeffizient, wenn t und τ (um die numerischen Werte möglichst homogen zu erhalten) in Stunden ausgedrückt werden, 494·93 wird, so wird sich aus jeder beobachteten Strandverschiebung eine Gleichung

$$372 \cdot 1 \sin 2 \varphi \cos \lambda_0 \cdot x + 372 \cdot 1 \sin 2 \varphi \sin \lambda_0 \cdot y + 494 \cdot 9 (1 - 3 \sin^2 \varphi) \tau = -h_0 \quad (11 a)$$

ergeben.

Selbstverständlich treten durch eine derartige Verschiebung des Poles Änderungen in den Polhöhen und Längen der Orte auf; für die resultierende Polhöhenänderung gilt die bereits angegebene Formel

$$d \varphi = \Delta \cos l_0 = \Delta \cos (\lambda_0 + \omega_0).$$

Die Änderung der Länge folgt, wenn l , ω dieselbe Bedeutung, auf den neuen Pol P bezogen, haben:

$$\begin{aligned} \sin l : \sin l_0 &= \cos \varphi : \cos \psi \\ (\sin l - \sin l_0) : \sin l_0 &= (\cos \varphi - \cos \psi) : \cos \psi \\ l - l_0 &= \Delta \sin l_0 \text{ tang } \psi. \end{aligned}$$

Da nun in derselben Weise

$$\omega - \omega_0 = \Delta \sin \omega_0 \text{ tang } \Phi$$

ist, wenn Φ die geographische Breite des Nullmeridians (Greenwich) ist, so wird

$$\lambda - \lambda_0 = d \lambda = \Delta \sin l_0 \text{ tang } \varphi - \Delta \sin \omega_0 \text{ tang } \Phi. \quad (12)$$

Diese Gleichungen gelten für den einfachsten Fall, daß der Pol Q eine momentane Verschiebung gegen P erfährt und hier eine bleibende Lage ein-

nimmt. Dieser Fall wird jedoch zumeist nicht eintreten. Es kann der Pol P eine oszillierende Bewegung in dem größten Kreise PQ einschlagen, wobei dann für geringe Zwischenzeiten

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta'(t - t_0) \quad (13)$$

oder, Δ als periodische Funktion dargestellt:

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta' \sin n(t - t_0) \quad (14)$$

sein wird. Für die erste dieser Darstellungen würden sich Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} -h_0 = &+ 372 \cdot 1 \sin 2\varphi \cos \lambda_0 [\Delta_0 \cos \omega_0 + (t - t_0) \Delta' \cos \omega_0] + \\ &+ 372 \cdot 1 \sin 2\varphi \sin \lambda_0 [\Delta_0 \sin \omega_0 + (t - t_0) \Delta' \sin \omega_0] + \\ &+ 494 \cdot 9 (1 - 3 \sin^2 \varphi) \tau \end{aligned} \quad (15)$$

aus welchen Gleichungen die Unbekannten Δ_0 , Δ' , ω_0 zu bestimmen wären.

Beschreibt der Pol P einen Kreis um die mittlere Lage Q , so würde

$$\omega = \omega_0 + \omega' t$$

zu setzen sein; entwickelt man dann $\cos \omega$, $\sin \omega$, und jetzt

$$\begin{aligned} \Delta \cos \omega_0 &= x & x \omega' &= \eta \\ \Delta \sin \omega_0 &= y & y \omega' &= \xi \end{aligned} \quad (16 a)$$

so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} 372 \cdot 1 [\sin 2\varphi \cos \lambda_0 \cdot x + \sin 2\varphi \sin \lambda_0 y - t \sin 2\varphi \cos \lambda_0 \xi + t \sin 2\varphi \sin \lambda_0 \cdot \eta] + \\ + 494 \cdot 9 (1 - 3 \sin^2 \varphi) \tau = -h_0 \end{aligned} \quad (16 b)$$

Endlich soll noch der Fall betrachtet werden, daß der Pol P einen Kreis um eine mittlere Lage P_0 beschreibt, welche von Q verschieden ist. Ist ρ der Halbmesser des Kreises, u der Winkel, den die Verbindungslinie P_0P mit der Verlängerung von QP_0 über P_0 hinaus einschließt, und ist $QP_0 = \Delta_0$, $QP = \Delta$, $\omega_0 = \sphericalangle GQP_0$, $\omega = \sphericalangle GQP$, wenn G der Ausgangspunkt der Zählungen für die Längen ist, so wird:

$$\begin{aligned} \cos \Delta &= \cos \Delta_0 \cos \rho - \sin \Delta_0 \sin \rho \cos u \\ \sin \Delta \sin (\omega_0 - \omega) &= \sin \rho \sin u \\ \sin \Delta \cos (\omega_0 - \omega) &= \sin \Delta_0 \cos \rho + \cos \Delta_0 \sin \rho \cos u \end{aligned} \quad (17)$$

und daraus, indem die beiden letzten Gleichungen mit $\sin \omega_0$, $\cos \omega_0$; dann mit $-\cos \omega_0$, $+\sin \omega_0$ multipliziert und addiert werden:

$$\begin{aligned} \sin \Delta \cos \omega &= + \sin \rho \sin \omega_0 \sin u + \sin \Delta_0 \cos \omega_0 \cos \rho + \cos \Delta_0 \cos \omega_0 \sin \rho \cos u \\ \sin \Delta \sin \omega &= - \sin \rho \cos \omega_0 \sin u + \sin \Delta_0 \sin \omega_0 \cos \rho + \cos \Delta_0 \sin \omega_0 \sin \rho \cos u. \end{aligned}$$

Für kleine Werte von Δ , Δ_0 , ρ folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \Delta \cos \omega &= \Delta_0 \cos \omega_0 + \rho \sin \omega_0 \sin u + \rho \cos \omega_0 \cos u \\ \Delta \sin \omega &= \Delta_0 \sin \omega_0 - \rho \cos \omega_0 \sin u + \rho \sin \omega_0 \cos u, \end{aligned} \quad (17 a)$$

welche Formeln auch direkt erhalten werden, wenn man das Dreieck PP_0Q als ein ebenes ansieht. Hierin ist noch $u = nt - T_0$ zu setzen, und man erhält dann für jede beobachtete Strandlinie eine Gleichung zwischen den Unbekannten: $\Delta_0 \cos \omega_0$, $\Delta_0 \sin \omega_0$, ρ , n und T_0 . Da der gegenwärtige Pol Q ebenfalls auf dem Kreise liegen muß, welchen der Pol P beschreibt, so wird $\rho = \Delta_0$ zu setzen sein, wodurch sich eine wesentliche Vereinfachung ergibt.

Es ist jedoch nicht zu übersehen, daß in allen Fällen, in denen eine kontinuierliche Bewegung des Poles der Rechnung zugrunde gelegt wird, eine Hauptschwierigkeit in der Zuordnung gegebener Strandlinien zu gewissen Zeitmomenten liegt. Man ersieht jedoch hieraus, daß die Lösung der Aufgabe unter der Voraussetzung, daß man es mit zwei fixen Lagen des Poles zu tun hat, einem gegenwärtigen Pol und einer anderen Lage desselben, auf welchen sämtliche Strandlinien bezogen werden, inkorrekt ist, daß aber die korrekte Lösung der Aufgabe unter der Voraussetzung einer kontinuierlichen Bewegung des Poles auf Schwierigkeiten stößt, die nicht in der mathematischen Formulierung oder Lösung der Gleichungen liegen, sondern lediglich in der Bestimmung der geologischen Epochen der Strandmarken.¹⁾

Hierzu kommt noch überdies, daß ein Teil der Veränderungen in der gegenseitigen Lage von Land und Wasser durch die Attraktion der Eismassen auf das Wasser verursacht werden kann.

Zur Berechnung der Störungen, welche Berge, Eismassen u. s. w. in dem Flüssigkeitsniveau erzeugen, seien V_0 und v die Potentiale des Erdsphäroides und einer über dem Sphäroid herausragenden Masse (Berg) auf einen Punkt P außerhalb, also

$$V_0 = k_0^2 \int_M \frac{dm}{r}; \quad v = k_0^2 \int_m \frac{dm}{r},$$

das erste Integral ausgedehnt über alle Punkte innerhalb des Sphäroides M , das zweite über alle Punkte des Berges m , so ist das Gesamtpotential $V = V_0 + v$.

Da das Potential V eine Funktion der Koordinaten ist, so wird, wenn man eine der drei Koordinaten in die Richtung der Normale, die beiden anderen in zwei Tangentialrichtungen der durch P gehenden Niveaulfläche legt, nach der Taylorschen Reihe, wenn Δn die nach außen gerichtete Normale bedeutet, für einen von der Erde entfernten Punkt Q

$$V' = V_0 - \frac{\partial V}{\partial n} \Delta n + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V}{\partial t'} \Delta t' + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Da

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t'} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = -g,$$

ist, wenn g die Größe der normalen Schwerkraft (ohne die Störung durch den Berg) ist, so wird

$$V' - V_0 = +g \Delta n$$

und folglich

$$\Delta n = \frac{V' - V_0}{g}.$$

Durch den Hinzutritt der Masse m werden sämtliche Potentiale vergrößert. Ist dann Q (Fig. 8) derjenige Punkt, in welchem nunmehr das Potential V_0 ist, so entspricht die Differenz $V' - V_0$ des ungestörten und gestörten Potentials v der Distanz Δn , welche daher aus

¹⁾ Über den Einfluß der Lage des Poles auf die Vereisung s. das letzte Kapitel.

$$\Delta n = \frac{v}{g}$$

folgt. ¹⁾ Für den Hinzutritt von beliebigen Massen werden daher alle Niveauflächen gehoben; es tritt daher an Stelle der ursprünglichen Niveaufläche V_0 , welche die Flüssigkeitsoberfläche darstellte, jetzt eine andere V_1' , früher tiefer gelegene, also von höherem Potentialwerte, die so bestimmt werden muß, daß das früher von der Niveaufläche $V = V_0$ eingeschlossene Volumen gleich dem nachher von der Niveaufläche $V = V_1'$ eingeschlossenen Volumen ist. Die Volumsberechnung kann, wenn v klein ist, dadurch vorgenommen werden, daß man ein Mittel von zahlreichen Äquidistanten Δn , also eine mittlere Hebung (Δn_0) der ursprünglichen Niveaufläche sucht und dann die neue Niveaufläche um Δn_0 senkt. Diese Methode beruht auf der Voraussetzung, daß die ungestörten Niveauflächen $V = V_0$ und $V = V_1$ (Fig. 8), deren Abstand Δn_0 ist, punktweise um gleiche Stücke Δn gehoben, die gestörten Niveauflächen mit den gleichen Potentialen V_0' , V_1' geben, so daß die Senkung der gestörten Niveaufläche V_0' zu einer gestörten Niveaufläche V_1' führt, welche das gleiche Volumen wie V_0 begrenzt, ²⁾ aber die gestörte Niveaufläche V_1 darstellt.

Für unregelmäßig geformte Körper ist aber die Berechnung des Potentials nicht so einfach. Nach G. Stokes ³⁾ werden diese Weitläufigkeiten umgangen, indem man an Stelle der über das Niveau des Sphäroides herausragenden Massen die auf den Meereshorizont kondensierten Massen substituiert. Jede oberhalb der Normalfläche befindliche Masse wird in der Richtung des Radiusvektors auf die Normalfläche verschoben, so daß sich auf dieser eine unendlich dünn gedachte Lage von Massen: eine, die wirklichen Massen ersetzende, unendlich dünne Platte befindet.

Die aufgelegte Masse in M (Fig. 9) bewirkt zunächst eine gewisse Schwerpunktverschiebung. Berechnet man dieselbe unter der Annahme, daß die auf-

¹⁾ Für eine auf die Erde aufgelegte Kugel vom Halbmesser r hat man, wenn V das Potential der Erde (mittlere Dichte s_m), v dasjenige der Kugel (Dichte s) bedeutet

$$V = k_0^2 \frac{M}{R}, \quad v = k_0^2 \frac{m}{r}, \quad g = + k_0^2 \frac{M}{R^2}$$

$$M = \frac{4}{3} R^3 \pi s_m, \quad m = \frac{4}{3} r^3 \pi s$$

$$\Delta n = r \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{s}{s_m}$$

Für eine Bleikugel vom Halbmesser $r = 6.378 \text{ km} = 0.001$ Erdhalbmesser, folgt hieraus $\Delta n = 12.7 \text{ m}$, also recht gering.

²⁾ Denkt man sich auch innerhalb der Erde z. B. 100 Niveauflächen gezeichnet, so werden sämtliche gehoben, aber die Begrenzung bildet jetzt nicht mehr die 100^{te}, sondern etwa die 99^{te} gehobene.

³⁾ „On the Variation of Gravity“ 1849. Mathematical Papers, I. Bd. Die Kondensation ist jedenfalls eine Erleichterung der Rechnung, wenn man die Substitution unmittelbar vornehmen kann; wenn aber erst die in den kondensierten Platten stattfindende Massenverteilung zu ermitteln und zu berücksichtigen ist, ist damit nicht viel gewonnen. Es ist aber eine Täuschung, zu glauben, daß durch die Kondensation die Schwierigkeit der Konvergenzbestimmung beseitigt wird. Eine kondensierte Masse stellt stets eine auf die gegebene ellipsoidische Masse aufgelegte, an den Grenzen diskontinuierlich in die gegebene Masse übergehende Masse dar und die Berechtigung zur Kondensation setzt Brauchbarkeit der Entwicklungen auch ohne Kondensation voraus.

gelegte Masse m eine ebene kreisförmige Platte wäre, so ist, wenn x die Verschiebung des Schwerpunktes bedeutet:

$$x : (R - x) = m : (M - m),$$

folglich, wenn die Platte eine Masse von der Dicke D und dem spezifischen Gewicht σ ersetzt: ¹⁾

$$x = \frac{m}{M} R = \frac{3}{4} \frac{\sigma}{\sigma_m} \left(\frac{r}{R}\right)^2 D.$$

Zur Bestimmung des Einflusses der Kontinente ersetzt Helmert ²⁾ dieselben durch kreisförmige ebene Platten. Das Potential einer solchen auf einen Punkt P_i im Innern (Fig. 10) wird, wenn ρ die Entfernung eines Massenelementes dm von diesem Punkte ist, da $dm = \rho D \sigma d\varphi d\rho$ ist:

$$v_i = k_0^2 \sigma D \int d\varphi d\rho,$$

wenn k_0^2 die Attraktionskonstante ist und die Dicke D und die Dichte σ der Masse als konstant angesehen werden. Das Integral nach ρ zwischen den Grenzen $\rho = 0$ und $\rho = \rho_1 = P_i A_1$ über den einen Halbkreis und zwischen $\rho = 0$ und $\rho = \rho_2 = P_i A_2$ in der zweiten Hälfte gibt $\rho_1 + \rho_2 = A_1 A_2 = 2u$, somit

$$v_i = 2 k_0^2 \sigma D \int_0^\pi u d\varphi.$$

Nun ist, wenn r der Halbmesser der Kreisscheibe, Δ_i der Abstand des Punktes vom Zentrum ist,

$$u^2 = M A_1^2 - M M^2 = r^2 - \Delta_i^2 \sin^2 \varphi^2$$

$$v_i = 2 k_0^2 \sigma D \int_0^\pi \sqrt{r^2 - \Delta_i^2 \sin^2 \varphi^2} d\varphi = 4 k_0^2 \sigma D r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi^2} d\varphi$$

$$v_i = 4 k_0^2 \sigma D r E_0(\kappa); \quad \kappa = \frac{\Delta_i}{r}$$

wobei $E(x)$ das elliptische Integral zweiter Gattung und E_0 das vollständige Integral mit dem Modul κ ist. κ hängt von der Lage des Punktes P_i ab und ist für die Peripherie gleich 1.

Für einen Punkt P_a außerhalb wird die Integration nach ρ zwischen den Grenzen $P_a B_1 = \rho_1$ und $P_a B_2 = \rho_2$ auszuführen sein; sie gibt $\rho_2 - \rho_1 = 2u = B_1 B_2$. Da aber φ der Winkel $M P_a B_1$ ist, so ist die Integration nach φ hier zwischen denjenigen Werten $-\varphi_0$ und $+\varphi_0$ auszuführen, welche bestimmt sind durch

$$\sin \varphi_0 = \frac{r}{\Delta_a}.$$

Der Wert von u ist hier bestimmt durch

$$u^2 = r^2 - \Delta_a^2 \sin^2 \varphi^2$$

so daß

$$v_a = 2 k_0^2 \sigma D \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} u d\varphi = 4 k_0^2 \sigma D r \int_0^{\varphi_0} \sqrt{1 - \kappa_1^2 \sin^2 \varphi^2} d\varphi.$$

¹⁾ Helmert „Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie“ 2. Bd. S. 332, berechnet die Verschiebung mit Berücksichtigung der Krümmung; die daraus resultierende Korrektur kann vernachlässigt werden.

²⁾ 1. c. S. 313. Die mittlere Erhebung der Kontinente nimmt er jedoch zu gering an.

wird. Da hier aber $\kappa_1 = \Delta_a : r$ größer als 1 ist, so muß eine Transformation vorgenommen werden. Setzt man

$$\left(\frac{\Delta_a}{r}\right)^2 \sin \varphi^2 = \sin \psi^2; \quad \left(\frac{\Delta_a}{r}\right)^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \sin \psi \cos \psi d\psi$$

so werden die Integrationsgrenzen: für $\varphi = 0, \psi = 0$, für $\varphi = \varphi_0, \psi = \frac{1}{2}\pi$, demnach

$$v_a = 4k_0^2 \sigma D \frac{r^2}{\Delta_a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \psi^2 d\psi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin \psi^2}}; \quad \frac{r}{\Delta_a} = \kappa$$

Schreibt man

$$\cos \psi^2 = \frac{1 - \kappa^2 \sin \psi^2 - (1 - \kappa^2)}{\kappa^2}$$

und führt die elliptischen Integrale erster Gattung $F(\varphi)$ und zweiter Gattung $E(\varphi)$:

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin \varphi^2}}; \quad E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin \varphi^2} d\varphi$$

und die vollständigen Integrale $F(\frac{1}{2}\pi) = F_0, E(\frac{1}{2}\pi) = E_0$ ein, so wird

$$v_a = 4k_0^2 \sigma D \Delta_a [E_0 - (1 - \kappa^2) F_0].$$

Diese Formeln geben für die Erhebung der Niveaufläche, wenn man $g = \frac{3}{8} k_0^2 \pi R \sigma_m$ einsetzt:

für Punkte im Innern
$$h_i = \frac{v_i}{g} = \frac{3}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma_m} \frac{r}{R} D \cdot E_0$$

für Punkte außerhalb
$$h_a = \frac{v_a}{g} = \frac{3}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma_m} \frac{\Delta_a}{R} D [E_0 - (1 - \kappa^2) F_0].$$

Die schwache Krümmung der Kontinente kann dadurch berücksichtigt werden, daß man an Stelle der ebenen Radien die sphärisch gekrümmten setzt; der Einfluß der Krümmung beträgt selbst für Platten von der Größe des asiatischen Kontinentes nur 2⁰/₁₀ der Wirkung, und kann daher übergangen werden. Doch sind diese Formeln nur in der Nähe der kreisförmigen Platten brauchbar, solange die Krümmung der Erde sich nicht fühlbar macht. Ist aber die Entfernung so groß, daß auf die Krümmung der Erde Rücksicht genommen werden muß, dann wird es ausreichen, die Fernwirkung der Platten so zu berechnen, als ob ihre Massen im Mittelpunkte vereinigt wären; dann ist (Fig. 9):

$$v_a = k_0^2 \frac{m}{r}; \quad r = 2R \sin \frac{1}{2}\gamma$$

wenn γ der zur Entfernung MP_a gehörige Zentriwinkel ist; demnach

$$v_a = k_0^2 \frac{r^2 \pi D \sigma}{2R \sin \frac{1}{2}\gamma}; \quad h_a^{(1)} = \frac{3}{8} \frac{r^2 \sigma}{R^2 \sigma_m} \frac{D}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$$

Das neue Attraktionszentrum ist nun aber S (Fig. 9) und die Verschiebung der Niveauflächen gegen dieses ist um den Betrag $x \cos \gamma$, wobei γ kleiner oder größer als 90° sein kann, zu korrigieren; es ist daher durch das Auflegen einer kreisförmig angeordneten Masse der Abstand der neuen Niveaufläche vom neuen Attraktionszentrum um den Betrag

$$h' = h - x \cos \gamma$$

gehoben. Sind mehrere störende Massen, so ist das Gesamtpotential

$$V = V_0 + v' + v'' + v''' \dots;$$

damit wird die Überhöhung

$$H = h' + h'' + h''' \dots$$

Um nun die neue Niveaulfläche zu erhalten, welche ein dem ursprünglichen gleiches Volumen einschließt, hat man den Mittelwert H_0 aller H zu bilden und dann wird

$$\eta = H - H_0$$

die Überhöhung der gestörten Oberfläche über die ungestörte; ist η positiv, so verläuft die gestörte Niveaulfläche über der normalen, ist η negativ, unter derselben.¹⁾

Die Werte der h_a gelten nur in der Nähe der störenden Massen; die $h_a^{(1)}$ jedoch nur für $\gamma > 90^\circ$, sind jedoch auch noch für $\gamma = 90^\circ$ anwendbar.²⁾ Zwischen der Küste und dem Abstände 90° kann weder die eine, noch die andere Formel angewendet werden; denn der Unterschied von h_a und $h_a^{(1)}$ für $\gamma = 90^\circ$ wird, wenn auch nur mäßig, so doch nicht zu vernachlässigen, da sonst für $\gamma = 90^\circ$ ein Sprung stattfinden würde. Zur Vermeidung dieses Sprunges hat Helmert die Werte zwischen der Küste und $\gamma = 90^\circ$ auch nach der Formel für die h_a berechnet und dann so ausgeglichen, daß die Reihe der $h_i, h_a, h_a^{(1)}$ eine kontinuierliche Reihe bis zum Antipodenpunkt der Plattenmitte ($\gamma = 180^\circ$) ergab. Das Minimum der Erhebung h liegt etwa in der Entfernung $\gamma_0 = 60^\circ$ von der Mitte der Platte.³⁾ Läßt man nämlich die Formel für $h_a^{(1)}$ auch noch über 90° gelten, so läßt sich schreiben

$$h_a = \frac{3}{8} \frac{\sigma}{\sigma_m} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot D \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2} \gamma} - 2 \cos \gamma \right); \sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{\Delta_a}{2R},$$

wobei das zweite Glied den Einfluß der Schwerpunktsverschiebung gibt. Das Minimum findet statt, wenn der Differentialquotient des Klammerausdruckes nach γ gleich Null gesetzt wird; dieses gibt zur Bestimmung von γ_0 :

$$\frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} \gamma_0 \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \gamma_0 = 2 \sin \gamma_0; \sin \frac{1}{2} \gamma_0 = \frac{1}{3}; \gamma_0 = 60^\circ$$

(mit Rücksicht auf die Krümmung der Platte etwas davon verschieden) und

der Minimalwert selbst $(h_a)_{\min.} = \frac{3}{8} \frac{\sigma}{\sigma_m} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot D.$

(Ohne Rücksicht auf Schwerpunktsverschiebung würde $\gamma_0 = 180^\circ$ folgen, aber der Minimalwert der Überhöhung im selben Betrage.)

Diese Formeln haben nun E. v. Drygalsky⁴⁾ und F. Hergesell⁵⁾ angewendet, um die Wirkung polarer Eismassen zu berechnen.

1) Die Bildung der H_0 sollte eigentlich aus den Werten der h' abgeleitet werden, wobei S der gemeinsame Schwerpunkt aller Massen ist. Fällt daher der gemeinsame Schwerpunkt nahe nach M , so können die um $x \cos \gamma$ korrigierten Werte, wenn x sich auf den Schwerpunkt des Ellipsoides und nur einer der Massen bezieht, weniger gut sein, wie die unkorrigierten Werte. Die Bildung der Mittelwerte kann auch graphisch mittels Planimeters vorgenommen werden.

2) Helmert, l. c. S. 330.

3) Ibid. S. 336.

4) „Geoiddeformationen zur Eiszeit“ Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin 22. Bd. (1887), S. 169.

5) „Über die Änderung der Gleichgewichtflächen der Erde durch Bildung polarer Eismassen und die dadurch verursachten Schwankungen des Meeresniveaus“, Beiträge zur Geophysik von Gerland, Bd. I (1887) S. 59.

Für diese sind jedoch die h_i ohne Belang. Will man die Erhebung der Niveauflächen innerhalb der Platte ebenfalls finden, so sind allerdings die h_i auch zu rechnen; allein zur Bildung des Mittels h_m sind nur die h_a heranzuziehen, da nur das wirklich vorhandene, außerhalb der Platte befindliche Wasser eine Verschiebung erfährt; nur wenn das Meer die Platte überfluten würde, wären auch die h_i zu berücksichtigen; dieser Fall tritt aber nicht ein, wie allerdings eine erste Rechnung mit Einbeziehung der h_i zeigt. Während aber der Mittelwert der h_i sich auch analytisch durch ein Integral darstellen läßt, geht dieses für die h_a nicht; doch kann eine graphische Darstellung hier leicht verwendet werden.

Nimmt man nach v. Drygalsky die gestörte Niveaufläche N_0 (Fig. 11) als Abszissenachse, trägt auf dieser äquidistant, zum Beispiel von 10 zu 10⁰ die Distanzen vom Mittelpunkte der Platte auf, und zieht zu jeder Abszisse $O_0 R$ die zugehörige Ordinate $RS = h_i$, beziehungsweise h_a auf, so erhält man die durch die Wirkung der zylindrischen Platte gehobene Niveaufläche N_1 . Der Mittelwert TU ist derjenige, für welchen, wenn die h_i mitberücksichtigt werden, die Fläche $A O_0 B U B'$ gleich $A O_0 O' A'$ ist oder der Mittelwert $T' U'$, wenn ohne Berücksichtigung der h_i die Fläche $A R S U B'$ gleich $A R R_1 A_1$ ist, wobei $O_0 R$ dem Halbmesser der Eisplatte entspricht.¹⁾ Wenn es sich um die Anziehung von sich bildenden Eismassen handelt, so ist hier noch eine Korrektur anzubringen, da durch die Bildung der Eismassen selbst ein Wasserverlust stattfindet. Die Größe desselben ist $\pi r^2 D \sigma$; wird dieser auf die ganze Wasserfläche, also mit Ausschluß der Kontinente und der Eisplatte selbst verteilt, so wird, wenn man die Wasseroberfläche gleich p mal der Erdoberfläche setzt (p etwa 0.7), die Höhe der zugehörigen Wasserschicht aus

$$\pi r^2 \sigma D = p \cdot 4 \pi R^2 y; \quad y = \sigma \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{D}{4 p}$$

gefunden. Die um $y = O_1 O''$ (Fig. 11) über $O_1 A_1$ liegende Fläche gibt die ungestörte Niveaufläche vor dem Beginn der Vereisung. Durch die Vereisung wird dann zunächst ein Quantum Wasser zur Eisbildung entzogen und durch Attraktion der Eismassen das Niveau $S U B'$ hergestellt.

E. v. Drygalsky nimmt vier kreisförmig begrenzte Eisflächen, und zwar:

1. Das Nordeuropäische Inlandeis, nach Penck 115.000 Quadratmeilen, von der Gestalt eines halben Kreiszyllinders, dessen Mittelpunkt $\varphi = 68^\circ$, $\lambda = 14^\circ$ östlich von Greenwich ist; die nordwestliche Grenze ist eine gerade Linie von Nowaja Semlja bis zur Südwestküste von Irland; die östliche und südliche Begrenzung ein Halbkreis mit dem sphärischen Halbmesser $18^\circ 8'$; für die Wirkung auf entfernte Gegenden wird ein Vollkreis mit dem sphärischen

¹⁾ Drygalsky bildet das Mittel aller h , einschließlich der h_i , und bringt dann noch eine Korrektur wegen der Fläche $O' R' S B$ an, welche er als nicht gehobene Wassermasse über $R' A'$ verteilt, so daß sein Mittelniveau zu hoch ausfällt; allein zur Rechnung verwendet er als Mittelwert den doppelten von Helmhert angegebenen Minimalwert; also $h_m = 2 (h_a)_{\min.}$; dieser ist vielleicht eine ganz gute Näherung, ohne daß sich hierfür eine analytische Begründung geben läßt; die von Drygalsky angewendete erste Korrektur ist aber dann unnötig.

Halbmesser $12^{\circ} 47' 40''$ angenommen, dessen Mittelpunkt in der Gegend von Nicolaistadt im Bottnischen Meerbusen ist.

2. Das Nordamerikanische Inlandeis, nach Penck 361.000 Quadratmeilen, von der Gestalt eines ganzen Kreiszyinders (wobei allerdings Alaska ausgeschlossen ist), mit dem Zentrum Southampton am Eingang der Hudsonsbay: $\varphi = 64^{\circ}$, $\lambda = 84^{\circ}$ westlich von Greenwich; sphärischer Halbmesser $22^{\circ} 46'$.

3. Die Antarktische Vereisung; Ausdehnung 279.000 Quadratmeilen, mit dem Zentrum im Südpol und dem Halbmesser 20° , entsprechend der gegenwärtigen Vereisung und

4. Ein südpolarer Eisring, als Ergänzung für eine Eiszeit, bis $\varphi = 64^{\circ}$, entsprechend einer Fläche von 189400 Quadratmeilen, von Kreisen mit den Halbmessern 20° und 26° begrenzt.

Die Wirkungen rechnet Drygalsky getrennt, da für gleichzeitige Vereisung beider Hemisphären sich die Wirkungen addieren, bei alternierender Vereisung subtrahieren, um „auf diesem Wege einen Schritt zur Lösung des Problems zu tun, ob gleichzeitige oder alternierende Eiszeiten für beide Hemisphären anzunehmen sind.“¹⁾

Seine Resultate sind (in Teilen von D):

	1.	2.	3.	4.
Höhe in der Mitte der Platte . h_i	0·0549	0·0973	0·0856	—
Höhe am Plattenrande $h_{i,a}$	0·0350	0·0619	0·0545	0·0164 ³⁾
Mittel der Höhen ²⁾ h_m	0·0061	0·0192	0·0148	0·0101
Korrektion wegen Vereisung . y	0·0165	0·0517	0·0400	0·0275
$h_{i,a} - h_m - y$	0·0123	— 0·0090	— 0·0003	—

so daß das gestörte Niveau nur unterhalb der Eisplatte gehoben erscheint, hingegen außerhalb (selbst ohne Anbringung von Drygalskys erster Korrektion) überall zur Zeit der Vereisung Senkung des Wasserspiegels und daher erst beim Abschmelzen Hebung derselben auftritt.

Hergesell nimmt ebenfalls für das amerikanische Eis einen, für das europäische Eis zwei Eiszyinder von den Halbmessern $r = 2740 \text{ km}$, 1260 km und 625 km entsprechend den Winkeln $\gamma_0 = 24^{\circ} 36'$, $11^{\circ} 19'$ und $5^{\circ} 36'$. Die Bestimmung der $H = \Sigma h$ führte er graphisch durch; die Linien gleicher Erhebung der Niveauflächen (Isohypsen) sind natürlich für eine einzige Platte Kreise, deren Mittelpunkte im Mittelpunkt der Platte liegen; in den Entfernungen von 10 zu 10^o werden dieselben in stereographischer Projektion, so daß sich die Isohypsen auch in der Projektion als Kreise darstellen, gezeichnet. „Diese Isohypsen wurden nun für jeden Zylinder auf ein besonderes Blatt, welches durchsichtig ist, gezeichnet; dann wurden die betreffenden Blätter in geeigneter Weise übereinander gelegt, derart, daß die Eiszyinder ihre richtige geographische Position bekamen, und nun wurden mit Hilfe dieser drei superponierten Tafeln durch einfache Addition

1) l. c. S. 203.

2) Diese Werte, numerisch ermittelt, schließen sich der Formel, welche die h_i ausschließt, an und ist daher die erste Korrektion Drygalskys wegzulassen.

3) Für 40° Abstand von der Plattenmitte.

die in jedem Durchschnittspunkte existierenden Gesamterhebungen bestimmt¹⁾ und danach eine Karte der Isohypsen für die Wirkung aller drei Eiszyylinder angelegt. Es ergaben sich drei maximale Erhebungen: 1. Am Eingang der Hudsonsbay mit $\eta = 0.084 D$, 2. bei Finnland und 3. an der Südspitze von Skandinavien mit je $\eta = 0.052 D$. Eine Vertiefung gleich $0.038 D$ zeigt sich zwischen Grönland und der Europäischen Küste; das Gefälle war am stärksten südlich der Hudsonsbay am Rande des Inlandeises. Für $D = 1000 m$, mit welchem Werte Hergesell rechnet, sind daher die Schwankungen recht mäßig²⁾. Wird nun das gesamte Areal der Vereisung 30 Millionen km^2 , das gesamte Meeresareal 374 Millionen km^2 angenommen, so folgt $y = 0.070 D$, demnach überall mit Ausnahme des amerikanischen Inlandeises, wo eine Hebung des Wasserspiegels um $0.014 D$ stattfindet, eine allgemeine Senkung, die sowohl an der europäischen als an der amerikanischen Küste den Betrag von $0.028 D$ erreicht und in Ostgrönland auf $0.108 D$ steigt.

Geiki e hatte bekanntlich (s. das 11. Kapitel) angenommen, daß das Land zur Zeit jeder Vereisung untergetaucht, also der Meeresspiegel gehoben gewesen wäre. Penck hatte³⁾ ohne Rechnung geschlossen, daß durch den Wasserverbrauch der Eismassen unter Zuhilfenahme einer gleichzeitigen australen Vergletscherung der Meeresspiegel hätte sinken müssen und Hebungen des Meeresspiegels erst einige Zeit nach dem Beginne des Abschmelzens hätten auftreten können. Sowohl die Rechnungen von Drygalski, als diejenigen von Hergesell scheinen diese Ansicht wenigstens teilweise zu bestätigen. Eine gleichzeitige Vereisung der beiden Hemisphären ist dabei gar nicht anzunehmen nötig, denn die Rechnungen geben dieses Resultat ohne Zuziehung einer solchen.

Das Areal des antarktischen vereisten Meeres ist etwa $\frac{1}{120}$ der ganzen Oberfläche oder $\frac{1}{88}$ der ganzen Wasserfläche; bei einer Mächtigkeit von $1000 m$ würde daher ein Steigen von nicht mehr als $11.4 m$ stattfinden; wenn aber die Mächtigkeit zu $3000 m$ angenommen wird, und allem Anscheine nach war die Mächtigkeit der eiszeitlichen Vergletscherung an den Polen mindestens von dieser Größe, so würde dies bereits einen Betrag von $35 m$ bedeuten. Wesentlich

¹⁾ Hergesell l. c. S. 88. Dabei wurde die Eisdicke mit dem Durchschnittswerte $1000 m$ angenommen; die Bemerkung „daß die Annahme einer anderen Mächtigkeit keinen großen Einfluß auf das allgemeine Resultat haben kann, da die größere Attraktion durch die größere Wasseranziehung kompensiert wird“ (S. 64) ist jedoch unrichtig; auch wird später die Proportionalität mit der Dicke richtig angewendet.

²⁾ Hergesell untersucht auch den Gültigkeitsbereich der Formeln für h_a (S. 73) und findet dafür bez. 30° , 19° und 9° ; ferner findet er für den Fehler, der aus dem Nichtparallelismus der Niveauflächen entsteht, $4 mm$. Endlich untersucht er auch den Einfluß von Unregelmäßigkeiten der Oberfläche, indem er auf die Platte eine zweite kleinere aufsetzt. Ein Zylinder vom Halbmesser r' und der Dicke D' zentrisch aufgesetzt, gibt das Potential für den Mittelpunkt $v = 2 \pi k_0^2 \sigma D' (\sqrt{r'^2 + \rho^2} - \rho)$, wobei ρ der Abstand der Grundfläche des kleineren Zylinders von der Geoidfläche ist; für $r' = \frac{1}{100}$ des Radius des großen Zylinders, $D' = \frac{1}{10}$ von dessen Dicke folgt $h_z' = 0.006 m$ ($D = 1000 m$) also verschwindend.

³⁾ „Schwankungen des Meeresspiegels“ Jahrbuch der geographischen Gesellschaft zu München, Bd. 7 (1882) S. 21.

ist hier noch, daß bei Ausschaltung der h_t ¹⁾ sich für die den vereisten Gebieten Europas und Amerikas angrenzenden, also hier am meisten in Betracht zu ziehenden Teile, an den Küsten hiedurch eine Hebung des Wasserspiegels von mindestens $0.014 D$, also für $D = 3000 m$ eine Senkung des Festlandes von etwa $40 m$ ergeben würde. Würde hier die australische Vereisung dazutreten, so würde die Hebung des Meeres kompensiert. Andererseits würde die etwa $200 m$ betragende Senkung um Grönland durch die $35 m$ der australen Vereisung wenig geändert, so daß sich, wie Hergesell schließt, aus den Hebungs- und Senkungserscheinungen kein Rückschluß auf die Gleichzeitigkeit oder das alternierende Auftreten der borealen und australen Vergletscherung ziehen läßt, daß sich hingegen die nach Norden zu anwachsenden Strandlinien an der Küste des amerikanischen Kontinentes erklären lassen.²⁾

v. Drygalsky sowie Hergesell untersuchen dann noch den Einfluß der Abschmelzung. Der erstere verwendet hier als Korrektion h_m den früher angegebenen Ausdruck, so daß für außerhalb der Platte befindliche Punkte

$$\eta = \frac{3\sigma}{\sigma_m} \cdot \frac{2}{\pi} \sin \frac{1}{2} \gamma \left\{ E_0(x) - (1 - x^2) F_0(x) \right\} \cdot D - \frac{3\sigma}{\sigma_m} \sin \frac{1}{2} \alpha^2 \cdot D - \frac{\sigma}{p} \sin \frac{1}{2} \alpha^2 \cdot D$$

ist, wo α , der Öffnungswinkel der Eisplatte, bestimmt ist durch:

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{r}{2R}$$

Für Punkte in der Nähe des Randes ist nun $\gamma = \alpha$ zu setzen, und da dann x sehr nahe 1 ist, so wird

$$\eta = \frac{3\sigma}{\sigma_m} \left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{1}{2} \alpha - \left(1 + \frac{\sigma_m}{3p} \right) \sin \frac{1}{2} \alpha^2 \right] \cdot D.$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum für

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{3\sigma}{\sigma_m} \left[\frac{1}{\pi} - \left(1 + \frac{\sigma_m}{3p} \right) \sin \frac{1}{2} \alpha_0 \right] \cos \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot D = 0,$$

d. i. für

$$\sin \frac{1}{2} \alpha_0 = \frac{3p}{(\sigma_m + 3p)\pi}$$

Setzt man $p = 0.7$, so wird $\alpha_0 = 9^\circ 42' . 4$; $\eta_0 = 0.01328 D$ ³⁾. Wenn daher $\alpha > 9^\circ 42' . 4$ ist, so wird die Erhebung η über der Niveaufläche $O'' A''$ (Fig. 11) wachsen, bis α den Wert α_0 erreicht hat; eine Hebung, wenn $\alpha < \alpha_0$ ist, findet aber nicht mehr statt.

1) Wenn die Mittel h_m von Drygalsky mit Hinzuziehung derselben berechnet worden wären.

2) l. c. S. 95. Ob die Meinung Pencks: „Ist einmal erklärt, daß der Meeresspiegel durch Attraktion wesentlich beeinflusst wird, so ist damit eine Quelle für eine Menge lokaler, auf kurze Erstreckungen hin fühlbarer Oszillationen des Meeresspiegels gegeben, und es ist nicht mehr gestattet, aus lokal wechselnden Hebungs- und Senkungserscheinungen nur auf ungleiche Bewegung der Erdkruste zu schließen“ sich aufrecht erhalten läßt, ist, wenigstens für unregelmäßig auftretende Erscheinungen wohl fraglich.

3) Nach v. Drygalsky für $p = 1$: $\alpha_0 = 9^\circ 52' . 2$; $\eta_0 = 0.0135$.

Die weiteren Näherungsrechnungen, welche Drygalsky ausführte, führten zu dem Resultate, daß von dem Momente, wo das skandinavische Eis selbst die größte Hebung hervorbrachte, die aber durch eine Senkung durch das amerikanische Eis überwogen und in eine Senkung des Meeresspiegels verwandelt wurde, die Hebung des Meeresspiegels bis zu dem Maximalwerte $+ 0.006 D$ wuchs. Allein dieses Resultat kann nicht ganz richtig sein, denn die maximale Erhebung des europäischen Meeresspiegels durch das skandinavische Eis wird zu $0.0167 D$ angegeben und dieser Betrag konnte nach obigem unmöglich erreicht worden sein, da die Maximalwerte, welches immer auch die ursprüngliche Größe der Eisplatte war, in dem Momente erreicht wurden, wenn $\alpha = \alpha_0$ wurde und der Maximalwert in diesem Falle $0.01328 D$ betrug.

Die Ableitungen von Hergesell unterscheiden sich von denjenigen Drygalsky dadurch, daß er auch die Abschmelzung in der Mächtigkeit in Betracht zieht, während Drygalsky die Mächtigkeit als konstant ansieht.

Da η proportional D ist, also von der Form $\kappa r D$, die mittlere Erhebung h_m über der Geoidfläche und der durch Verteilung entstehende Wasserverlust aber von der Form $\lambda r^2 D$, so wird

$$h = \kappa r D - \lambda r^2 D.$$

Hergesell untersucht nun, welche Änderung h erfährt, wenn

1. Nur die Mächtigkeit des Eises allein beim Abschmelzen abnimmt, also D in Dx übergeht, wobei x ein echter Bruch ist; es wird dann

$$h_x = (\kappa r D - \lambda r^2 D) x.$$

Da dieser Ausdruck sein Zeichen nicht geändert hat, so kann eine Senkung nie in eine Hebung übergehen¹⁾.

2. Über die gleichzeitigen Änderungen von D und r führt Hergesell zunächst die folgende Tatsachen an: Der Rhonegletscher änderte 1850 bis 1880 seine Länge um $854 m$, seine Dicke um $120 m$; der Obersulzbachgletscher die Länge um $500 m$, die Dicke um 50 bis $80 m$; der Unteraargletscher seine Länge um 60 bis $88 m$, die Dicke um $47 m$. Es ändert sich also die Mächtigkeit stärker als die Länge. Wenn nun

a) Dicken- und Flächenausdehnung proportional gesetzt werden, so geht D in Dx , r in $r\sqrt{x}$ über, und es wird

$$h_x = \kappa r Dx\sqrt{x} - \lambda r^2 Dx^2;$$

dieser Ausdruck wird ein Maximum für

$$x = \frac{9\kappa^2}{16\lambda^2 r^2}$$

und der Maximalwert ist

$$h_x = \frac{27}{256} \frac{\kappa^4}{\lambda^3 r^3} D.$$

b) Wenn sich Dicken und Längenausdehnung proportional ändern, so geht D in Dx , r in rx über, und es wird

$$h_x = r D (\kappa x^2 - \lambda r x^3).$$

¹⁾ Dies ist an sich klar, da h proportional D ist.

Dieser Ausdruck wird ein Maximum, wenn

$$x = \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\lambda r}$$

ist, mit dem Maximalwerte

$$h_x = \frac{4}{27} \frac{\kappa^3}{\lambda^2 r^2} D.$$

Die numerischen Werte werden für den amerikanischen Eiszylinder $0.002 D$, bzw. $0.004 D$, so daß die Senkung des Meeresspiegels in eine leichte Hebung übergeht, also eine Schwankung im Maximalbetrage von ungefähr

$$\eta = \frac{3 \sigma}{\pi \sigma_m} \frac{r}{R} D$$

erfolgt. Wenn aber Hergesell schließt: „Die Wellen, welche unsere Geoidfläche zeigt, reichen nicht annähernd an die zu erklärenden Differenzen im Meeresstrande heran. . . . Die Gravitationstheorie ist also in keiner Weise imstande, den vorhandenen Tatsachen gerecht zu werden. . . . wir halten daher auch diese Erklärungsversuche der Meeresspiegelschwankungen für gescheitert“¹⁾ so kann man auch diesen Ausspruch nicht unmittelbar unterschreiben, da Hergesell seine Resultate mit der relativ geringen Dicke von $1000 m$ erhielt, und eine Dicke von $3000 m$ eine viel bessere Übereinstimmung geben würde, so daß jedenfalls ein Teil der regelmäßigen Strandverschiebungen auf diese Ursache entfällt²⁾.

¹⁾ l. c. SS. 103/4.

²⁾ Auf eine andere Art der Niveauschwankungen der Ozeane macht J. Lamp: „Über die Niveauschwankungen der Ozeane als eine mögliche Ursache der Veränderlichkeit der Polhöhe“ „Astronomische Nachrichten“ Bd. 126, S. 223, aufmerksam. Er geht von der Tatsache aus, daß sich die Wasserdruckminima und Luftdruckminima im Laufe des Sommers mit der Sonne nach Norden verschieben; es tritt ein gewisses Quantum Wasser während des Sommers von der südlichen auf die nördliche Halbkugel; allerdings werden Unterströmungen diesen Prozeß zu paralysieren suchen; doch ist es nicht wahrscheinlich, daß diese Kompensation jederzeit vollständig ist; daraus schließt er, daß dies Änderungen in der Polhöhe teilweise erklären könne. Rechnungen werden nicht gegeben; Mohn schätzt die Höhe auf $1 m$.

VII. Kapitel.

Meteorologische Ursachen.

Bei ungleichem Zustande der Wärme in den verschiedenen die Erde konstituierenden Medien: der festen Rinde und der flüssigen und gasförmigen Hülle, werden Wärmeübertragungen gegeneinander stattfinden, und es wird ein stationärer Zustand auftreten, wenn die von der Sonne übernommene Wärme und die durch Strahlung stattfindenden Verluste sich das Gleichgewicht halten. Dabei darf die verschiedene Absorption in den verschiedenen Medien nicht übersehen werden und in der Theorie der Eiszeiten spielen zwei Hypothesen eine große Rolle: Die Absorption durch Kohlensäure und die Absorption durch Wasserdampf.

Es war zuerst Tyndall, welcher auf die Verschiedenheit der Absorption nach Maßgabe der verschiedenen Zusammensetzung der Luft hinwies, und Angström, Heim, Langley, Lecher, Pernter u. a. haben sich mit der Frage beschäftigt.

Eine ausgedehntere Untersuchung über den Einfluß der Kohlensäure hat Svante Arrhenius ¹⁾ angestellt. Nachdem er aus den Langley'schen Beobachtungen die Absorptionskoeffizienten von Kohlensäure und Wasserdampf bestimmte, wird der Einfluß einer veränderlichen Zusammensetzung der Luft auf die Bodentemperatur durch Rechnung ermittelt. Bei dieser Rechnung scheint jedoch ein Versehen unterlaufen zu sein, das die Resultate wenigstens numerisch etwas beeinflußt. Arrhenius legt zwar das Stefan'sche Strahlungsgesetz seinen Rechnungen zugrunde; er hat aber dabei übersehen, daß die von ihm verwendeten Formeln für den vorliegenden Fall etwas modifiziert werden müssen. Denn der von ihm zugrunde gelegte Ausdruck für die durch Strahlung zwischen zwei Körpern mit den absoluten Temperaturen T und Θ übertragene Wärmemenge

$$W = \nu \beta \gamma (T^4 - \Theta^4)$$

gilt nur für den Fall des vollständigen Wärmeaustausches mit Rücksicht auf die gegenseitige Reflexion der nicht absorbierten Wärme. In dem vorliegenden Falle kommt aber nur die an der Oberfläche der Erde und des Wasserspiegels reflektierte Wärme in Betracht, während eine Rückstrahlung in der Luft nur teilweise zu berücksichtigen ist. Hingegen ist der Wärmeverlust durch Strahlung

¹⁾ „On the Influence of Carbonic Acid in the Air upon the Temperature of the Ground“. Phil. Magazine Bd. 41 (1896), S. 237.

in den Weltraum hier von Einfluß, so daß der Vorgang, wie er hier zu denken ist, zu etwas anderen Resultaten führt. Seien zunächst

drei Körper	K	K'	K''	
mit den absoluten Temperaturen	T	T'	T''	
den Emissionsvermögen	e	e'	e''	} pro Flächeneinheit
und den Absorptionsvermögen	a	a'	a''	
und den Flächen	s	s'	s''	

in drei Schichten übereinandergelegt, und seien die drei Körper solcher Art, daß nur wesentlich an dem unteren Körper K die Reflexion eine Rolle spielt.¹⁾ Von den drei Wärmemengen W , W_1 , W_2 , welche die drei Körper ausstrahlen, werden daher von den beiden anderen, die in derselben Zeile der folgenden Zusammenstellung angegebenen Wärmemenge absorbiert, wobei der nicht absorbierte, sondern durchgestrahlte und durch Reflexion an K zurückgestrahlte Teil wieder durch teilweise Absorption als Wärmevermehrung auftritt. So ergeben sich die Anteile der drei Körper an Wärmestrahlung und Absorption für

K	K'	K''
$- W$	$+ W s' a'$	$+ W (1 - s' a') s'' a''$
$+ W_1 s a$	$\left\{ \begin{array}{l} - W_1 \\ + W_1 (1 - s a) s' a' \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} + W_1 s'' a'' \\ + W_1 (1 - s a) (1 - s' a') s'' a'' \end{array} \right.$
$+ W_2 (1 - s' a') s a$	$\left\{ \begin{array}{l} + W_2 s' a' \\ + W_2 (1 - s' a') (1 - s a) s' a' \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} - W_2 \\ + W_2 (1 - s' a') (1 - s a) (1 - s' a') s'' a'' \end{array} \right.$

¹⁾ Bei zwei einander gegenübergestellten Körpern mit vollkommenem Wärmeaustausch hat man die von K ausgestrahlte Wärme $W = s e T^4$; hiervon absorbiert K' : $W s' a'$; der Rest $W (1 - s' a')$ wird rückgestrahlt, und hiervon absorbiert K die Menge $W (1 - s' a') s a$; so fortfahrend findet man für die abgegebenen und aufgenommenen Wärmemengen: für K : $Q = W (1 - s' a') s a + W (1 - s' a')^2 (1 - s a) s a + W (1 - s' a')^3 (1 - s a)^2 s a . . . - W$

$$Q = - W \frac{s' a'}{1 - (1 - s a) (1 - s' a')}$$

für K' : $Q_1 = W s' a' + W (1 - s' a') (1 - s a) s' a' + . . . = Q$

Ist weiter die von K' ausgestrahlte Wärmemenge $W' = s' e' \Theta^4$, so ist in derselben Weise die vom Körper K übernommene Wärme

$$Q' = + W' \frac{s a}{1 - (1 - s a) (1 - s' a')}$$

und $- Q'$ ist der Wärmeverlust von K' ; es ist daher die gesamte von K übernommene Wärme $Q' - Q$, und die von K' übernommene $Q - Q'$, (der eine Wert ist ein Wärmegewinn, der andere ein Wärmeverlust, beide wie natürlich dem absoluten Werte nach gleich) und es ist

$$Q' - Q = \frac{s s' (e a' T^4 - e' a \Theta^4)}{s a + s' a' - s s' a a'}$$

Da aber $e : a = e' : a' = A = 1.21, 10^{-13}$ (vgl. z. B. Winkelmann, Handbuch der Physik II. Bd., 2. Hälfte S. 213) so wird $s s' (e a' T^4 - e' a \Theta^4) = s s' a a' A (T^4 - \Theta^4)$ das von Arrhenius zugrunde gelegte Gesetz.

In der Tat wäre hiernach, wenn β der Absorptionskoeffizient der Luft, ν der Absorptionskoeffizient der Erde, ferner α der Absorptionskoeffizient der Luft für hohe Temperaturen (Sonnenwärme) ist, für Luft: die in den Weltraum ausgestrahlte Wärme (1) = $\beta A \theta^4$; die vom Boden übernommene Wärme (2) = $\beta A \nu (T^4 - \theta^4)$; die von der Sonne erhaltene Wärme (3) = αS ; die durch Leitung erhaltene Wärme (4) = N und die Beziehung: (1) = (2) + (3) + (4) gibt die erste Gleichung von Arrhenius.

Weiter ist für die Erde: Die an die Luft abgegebene Wärme (2) = $\beta A \nu (T^4 - \theta^4)$; die an den Weltraum abgegebene Wärme (5) = $(1 - \beta) A \nu T^4$; die von der Sonne übernommene Wärme (6) = $(1 - \alpha) \nu S$; die durch Leitung von der Umgebung erhaltene Wärme

Hiezu kommt noch die Sonnenstrahlung und die durch Leitung übertragene Wärmemenge. Aber eine weitere Verfolgung dieses Falles erscheint unnötig, da einerseits die durch dicke Schichten Wasser durchgestrahlte Wärme kaum von Belang sein dürfte, und andererseits die Reflexion an der Wasseroberfläche nicht zu vernachlässigen ist. Es genügt die Betrachtung, zweier Körper K, K' , wobei K Erde oder Wasser, K' die Luft darstellt, aber für K , je nachdem es die feste Erdrinde oder die flüssige Hülle bedeutet, andere Werte für T, e, a, s zu setzen sind.

Nach dem Stefan'schen Gesetze ist nun

$$W = s e T^4; \quad W_1 = s' e' T'^4$$

und damit werden die Wärmemengen

$$\text{für } K: \quad - s e T^4 + s' e' T'^4 s a$$

$$\text{für } K': \quad - s' e' T'^4 + s e T^4 s' a' + s' e' T'^4 (1 - s a) s' a'$$

Setzt man für die Sonnenstrahlung den Wert S , der bereits wegen Absorption im Weltraum korrigiert gedacht ist, so sind noch die Wärmemengen hinzuzufügen:

$$\text{für } K: \quad + S (1 - s' a') s a,$$

$$\text{für } K': \quad + S s' a' + S (1 - s' a') (1 - s a) s' a'.$$

Sind endlich die durch Leitung aus der Umgebung hinzugetretenen Wärmemengen:

$$\text{für } K: \quad M, \quad \text{für } K': \quad N,$$

so erhält man für den stationären Zustand der Erdrinde:

$$[- s e T^4 + s' e' T'^4 s a] + S (1 - s' a') s a + M = 0 \quad (1)$$

und für den stationären Wärmezustand in der Luft

$$[- s' e' T'^4 + s e T^4 s' a' + s' e' T'^4 (1 - s a) s' a'] + S s' a' [1 + (1 - s' a') (1 - s a)] + N = 0. \quad (2)$$

Hat man es nicht mit dem stationären Wärmezustand zu tun, so wird rechts in (1) und (2) an Stelle der Null $C_1 \frac{dT}{dt}$, beziehungsweise $C_2 \frac{dT'}{dt}$ zu setzen sein, und die Temperaturen sowohl wie die Sonnenstrahlung und die von den Temperaturen abhängigen Größen M und N werden Funktionen der Zeit und des Ortes; dann erhält man T und T' durch Integration der beiden Differentialgleichungen. Sind für T und T' die betreffenden Funktionen gefunden und integriert man dann

$$\int \frac{dT}{dt} dt, \quad \int \frac{dT'}{dt} dt$$

(7) = M und die Beziehung: (2) + (5) = (6) + (7) gibt die zweite Gleichung von Arrhenius (l. c. S. 256).

Man sieht nun, daß, während die Wärmemengen (1), (4), (6), (7) unverändert bleiben, in (3) noch die zurückgestrahlte Wärme zu berücksichtigen und eigentlich (3) = $\alpha S [1 + (1 - \alpha) (1 - \nu)]$ wäre. Die Beziehungen (2) und (3) sind jedoch nicht richtig; denn ein Überschuß der an den Weltraum abgegebenen Wärme ist noch in (2) enthalten. In der Tat müßte ja die Summe der an die Luft und an den Weltraum abgegebenen Wärme gleich der vom Boden ausgestrahlten sein; es ist aber hier (2) + (5) = $\beta A \nu (T^4 - t^4) + (1 - \beta) A \nu T^4 = A \nu T^4 - \beta A \nu t^4$, also um den Betrag $\beta A \nu t^4$ kleiner, als die vom Boden ausgestrahlte Wärme $A \nu T^4$. Da der Unterschied jedoch, wenn β klein und $t < T$ nur mäßig ist, so werden die Endformeln nur um geringe Beträge zu korrigieren.

nach der Zeit über eine oder mehrere ganze Perioden, so würde unter der Voraussetzung, daß T , T' periodische Funktionen sind und auch T^4 , T'^4 nur periodische Funktionen ergeben würden, die Integralé Konstante ergeben, was darauf hinauskommt, die obigen Gleichungen für die Mittelwerte der T , T' angesetzt zu denken.

Für s , a , e sind Werte s_1 , a_1 , e_1 zu nehmen, wenn man die feste Erdrinde betrachtet und andere Werte s_2 , a_2 , e_2 für die Meeresfläche. Für die Luft könnten aber auch die Werte e' a' über dem Festlande und dem Meere verschieden sein, und zwar wesentlich infolge des größeren Feuchtigkeitsgehaltes über dem Meere und des größeren Kohlensäuregehaltes über dem Lande; doch dürfte es wohl kaum möglich sein, schon jetzt darüber eine definitive Entscheidung zu treffen.

Nach dem Kirchhoff'schen Gesetze ist nun

$$e : a = e' : a' = A = 1.21 \cdot 10^{-12},$$

$$e = A a, e' = A a'$$

und folglich werden die beiden Gleichungen zwischen T^4 und T'^4

$$- A a s T^4 + A a s a' s' T'^4 + S a s (1 - a' s') + M = 0$$

$$+ A a s a' s' T^4 - A a' s' [1 - a' s' (1 - a s)] T'^4 + S a' s' [1 + (1 - a s) (1 - a' s')] + N = 0,$$

aus welchen man für T^4 und T'^4 die Werte findet¹⁾:

$$T^4 = \frac{(S + N) a s + M [1 - a' s' (1 - a s)]}{A a s (1 - a' s')} = \frac{S + N}{A (1 - a' s')} + \frac{M}{A a s} \left(1 + \frac{a s a' s'}{1 - a' s'} \right)$$

$$T'^4 = \frac{S a' s' (2 - a' s') + M a' s' + N}{A a' s' (1 - a' s')}, \quad (3)$$

worin $s' = s$ gesetzt werden kann, da die Ausdehnung der Atmosphäre sich von der Ausdehnung der darunter befindlichen Land-, beziehungsweise Wassermassen nicht wesentlich unterscheidet.

Die Formel für T^4 zeigt, daß derjenige Teil, der von der Sonnenstrahlung abhängig ist, mit dem Absorptionskoeffizienten a' der Luft variiert, und zwar im allgemeinen in derselben Weise, wie es die Formeln von Arrhenius angeben; mit dem Wachsen des Koeffizienten a' wird T wachsen. Da nun ein Wachsen des Kohlensäure- oder auch Wasserdampfgehaltes in der Luft den Absorptionskoeffizienten derselben steigert, so würde einem Wachsen des Kohlensäuregehaltes ein Wachsen der Mitteltemperatur des Bodens entsprechen.

Arrhenius nimmt an²⁾, daß in den höheren Schichten der Atmosphäre wegen der raschen Abnahme der Dampfspannung wenig Wasserdampf ist und man nur mit der Absorption durch Kohlensäure allein zu rechnen hat; ob

¹⁾ Die Formel von Arrhenius lautet in der hier gewählten Bezeichnung:

$$T^4 = \frac{\alpha' S + M + (1 - \alpha) (1 - \alpha') S + N \frac{1 + \alpha}{\alpha}}{A (1 + \alpha - \alpha \alpha')}$$

wobei Arrhenius, wie bereits erwähnt, den Absorptionskoeffizienten α' der Luft für Sonnenstrahlen von demjenigen α für die von der Erde in den Weltraum gehenden Strahlen verschieden annimmt.

²⁾ l. c. S. 260.

diese Hypothese zutreffend ist oder ob nicht auch der Kohlensäuregehalt in den höheren Schichten im selben Maße oder vielleicht sogar in erhöhtem Maße abnimmt, ist durchaus nicht von vornherein sicher, braucht aber auch nicht untersucht zu werden. Läßt man zunächst die Annahme von Arrhenius gelten, so kann man, wenigstens qualitativ, seine Resultate übertragen; die Rechnung selbst müßte allerdings auf Grund der hier abgeleiteten Formeln neu durchgeführt werden. Der Grund, warum ich hievon abgesehen habe, wird sofort ersichtlich werden.

Arrhenius findet, daß die Temperaturänderungen, welche den Änderungen im Kohlensäuregehalte entsprechen, für verschiedene Breiten und verschiedene Jahreszeiten nicht gleich sind. Setzt man den gegenwärtigen Kohlensäuregehalt gleich $p\%$, so werden die Temperaturänderungen gegenüber den jetzigen Temperaturen :

für den Kohlen- säuregehalt	das Maximum der Änderung	in der Breite	das Minimum der Änderung	in der Breite	maximale Schwankung nach der Jahreszeit
0·67 $p\%$	- 3·4°	± 40°	- 3·0°	+ 65°	0·2°
1·5 $p\%$	+ 3·8°	± 60°	+ 3·1°	im Äquator	0·5°
2·0 $p\%$	+ 6·1°	„	+ 4·9°	„	0·6°
2·5 $p\%$	+ 8·0°	„	+ 6·4°	„	0·6°
3·0 $p\%$	+ 9·4°	„	+ 7·3°	„	1·2°

In den warmen Zeiten mußte also die Temperatur in den arktischen Zonen um 8° oder 9° wärmer geworden sein und die Schwankung nach den Jahreszeiten würde ermäßigt, und Arrhenius meint, daß der 2·5- bis 3fache Kohlensäuregehalt die Temperatursteigerung in den Polargegenden, die Verminderung auf das 0·62- bis 0·55fache die Erniedrigung in den mittleren Breiten für die Eiszeiten erklären würde. ¹⁾

Zunächst darf nicht übersehen werden, daß der 2·5fache Gehalt an Kohlensäure eine so erhebliche Steigerung bedeutet, daß derselbe ganz andere Lebensbedingungen für die Organismen darstellt. Die Frage, ob derartige Schwankungen im Kohlensäuregehalte auftreten können, hat auch Arrhenius aufgeworfen und auf eine 1894 erschienene Arbeit von Högborn hingewiesen, in welcher dieselben erörtert und auch zugegeben werden.

Gegenwärtig werden jährlich 500,000.000 Tonnen Kohle verbrannt; dieses gibt 0·01 des wirklich vorhandenen Kohlensäuregehaltes der Luft; sie wird aufgezehrt durch die Bildung von Karbonaten und gibt eine Lage von 0·003 *mm* Dicke von kohlensaurem Kalk; die beiden Prozesse sind also von derselben Ordnung.

Nimmt man an, daß eine Lage von etwa 100 *m* Dicke von Karbonaten auf der Erde ist, so gibt dieses 25.000 mal die Menge der Kohlensäure in der Luft; diese ganze Menge muß die Luft passiert haben; Arrhenius schließt also, daß die Elimination der Kohlensäure der Luft, dem gegenwärtigen Gehalte derselben entsprechend, zur Bildung der Karbonate nicht ausreichte, und daß

¹⁾ l. c. S. 268.

somit wechselnde Quantitäten vorhanden gewesen sein müssen. Dem jetzigen Umsatze in dem vorhin angegebenen Ausmaße entsprechend, würde die Bildung einer Schichte von 100 *m* Dicke von kohlenurem Kalk 25 bis 30 Millionen Jahre erfordern; aber selbst der dreifache Gehalt an Kohlensäure würde noch immer zu deren Ablagerung eine Zeit von 10,000.000 Jahren beanspruchen.

T. C. Chamberlin¹⁾ adoptiert die Hypothese von Arrhenius, glaubt dieselbe aber durch Untersuchung der Bedingungen, unter denen Kohlensäurevermehrung oder Verminderung auftreten kann, weiter auszugestalten. Die Darstellung der bereits von Arrhenius ziemlich vollständig, aber kurz angeführten Hauptpunkte ist bei Chamberlin etwas ausführlicher, durch einige neue Hypothesen, die aber noch der Begründung harren, ergänzt. Angenommen wird: 1. In der Palaeozoischen Atmosphäre war der Kohlensäuregehalt nicht größer als der heutige, während in der darauffolgenden Zeit der Gehalt größer war; in diese Zeit wird der Beginn des marinen Lebens versetzt. 2. Unter dieser Voraussetzung ist dann die Ableitung von Arrhenius ausreichend, um die Klimaänderung zu erklären.

Mit größerer Ausführlichkeit stellt er die Quellen von Gewinn und Verlust dar.

Quellen von permanentem Verlust sind die Überführung der Silikate der älteren Schichten in die Karbonate der jüngeren Schichten. Schätzungen ergeben, daß dazu 20.000 bis 200.000 mal so viel Kohlensäure und selbst mehr nötig war, als jetzt in der Luft ist. Eine zweite Quelle permanenten Verlustes sind die pflanzlichen Organismen, die ja stets Kohlensäure absorbieren.

Quellen von permanentem Gewinn sind: die in den kristallinischen Felsen eingeschlossene Kohlensäure, welche durch die chemische Analyse der Flüsse und der vulkanischen Auswurfstoffe nachgewiesen ist und ferner die Meteore.²⁾

Quellen veränderlichen Verlustes sind Hebungen der Erde, wodurch eine größere Oberfläche der Luft ausgesetzt wird, welche die Bindung der Kohlensäure beschleunigt; Quellen veränderlichen Gewinnes sind vulkanische Ausbrüche.

Die Interglazialzeiten erklärt er dadurch, daß, wenn einmal die Vermehrung der Kohlensäureabsonderung eingeleitet war, der Prozeß sich von selbst fortsetzte, und so lange, bis wieder durch das Abschmelzen des Eises genügend Erde freigelegt war, neue Silikate an die Oberfläche kamen, so daß die Resorption der Kohlensäure von da ab überwog und dadurch ein Klimawechsel im entgegengesetzten Sinne eingeleitet war.³⁾ Als Stütze dieser Theorie sieht Chamberlin auch die Tatsache an, daß in Australien mächtige Kohlenlager (20 bis 40 Fuß) zwischen Erratika eingelagert sind. Wenn man daher

¹⁾ „An attempt to frame a Working hypothesis of the Glacial Periods on an Atmospheric Basis“; The Journal of Geology, Vol VII, Chicago 1899, S. 545.

²⁾ Die Anführung der Meteore an dieser Stelle erscheint geradezu befremdlich; denn für den Gewinn an Kohlensäure in der Luft kann diese Quelle wohl völlig übergangen werden.

³⁾ T. C. Chamberlin. „Moraines of recession and their signification in Glacial Theory.“ The Journal of Geology, Vol. VII, S. 677. Hier wird übrigens auch darauf hingewiesen, daß die Schwankungen während der Eiszeit auf astronomische Einflüsse (fälschlich wird die Präzession angeführt) zurückzuführen sind.

in der Kohlenbildung ein Mittel zum Entziehen der Kohlensäure sieht, so ist die Beziehung zwischen dieser und der Eiszeit nahe ideal (the relationship is nearly ideal).¹⁾

Auf eine Erklärung für das Auftreten einer Eiszeit in der palaeozoischen Epoche, in welcher noch keine Kohlensäureablagerung stattgefunden hatte und daher die Luft noch kohlenäurereicher war, muß Chamberlin verzichten.

Gegen die Hypothese, daß der Kohlensäuregehalt der Luft die klimatischen Schwankungen erzeugt, sind mancherlei Einwände erhoben worden. Uhlig²⁾ sagt, es fände wohl eine beständige Einsaugung der Hydrosphäre und Atmosphäre durch die Erde statt, wodurch das Einsaugen der Kohlensäure nicht unwahrscheinlich wird, aber der dadurch entstehende Verlust wird auch wieder gedeckt. Eine aus einem Bohrloch in Neusalzwerk strömende Quelle liefert allein nach Uhlig jährlich 140.000 *kg* Kohlensäure, und es ist sehr schwer, das Verhältnis zwischen Abgang und Gewinn zu bestimmen; erst wenn die starre Erdkruste widerstandsfähig genug sein wird, um Ausbrüche und Faltungen zu verhindern, wird eine vollständige Aufsaugung der ganzen Hydrosphäre und Atmosphäre stattfinden.

Es mag schon auf den ersten Blick sehr sonderbar erscheinen, daß die Bodentemperatur bei der Zunahme des Kohlensäuregehaltes, also bei vermehrter Absorption durch die Luft, wächst. Da aber im Zähler von T^4 der Betrag der zur Temperaturerhöhung beitragenden Wärme im wesentlichen $a s S + M$ ist, d. i. also der von der Sonne gelieferte und der von der Umgebung durch Leitung hinzugefügte Teil, so könnte man immerhin ohne näheres Eingehen das Resultat für richtig halten. Etwas bedenklicher aber erscheint dasselbe, wenn man die Temperaturerhöhung des Bodens über diejenige der Luft sucht; es findet sich

$$T^4 - T'^4 = \frac{M a' s' (1 - a s) - S a s a' s' - N a s}{A a s a' s'} \quad (4)$$

und dieses würde bedeuten, daß bei intensiverer Sonnenstrahlung die Bodentemperatur niedriger würde, wie die Lufttemperatur, daß also die dem Boden von der Umgebung (aus dem Erdinnern oder von der Luft) durch Leitung übertragene Wärme die Bodentemperatur erhöhen würde. In der Tat würde in diesem Falle, aber auch nur in diesem, eine Erhöhung der Absorptionsfähigkeit der Atmosphäre mit einer Erhöhung der Lufttemperatur und damit der auf den Boden durch Leitung übertragenen Wärme verbunden, so daß die Resultate der Rechnung zutreffend sein würden. Allein mit den Tatsachen steht dieses Resultat in direktem Widerspruch, hauptsächlich aus dem Grunde, weil bei der Ableitung auf die Konvektionsströmungen in der Luft nicht Rücksicht genommen wurde.

Auch die Zugrundelegung eines anderen als des Stefan'schen Gesetzes, etwa die Annahme, daß die Strahlung proportional T^n (n beliebig) wäre,

1) „Localisation of Glaciation“ The Journal of Geology, Vol. VII, S. 775.

2) Erdgeschichte II. Bd. S. 89.

würde an dem Resultate nichts ändern, und es kann daraus nur gefolgert werden, daß die Formeln (1), (2) S. 163 für einen stationären Zustand infolge gewisser unzulässiger Vernachlässigungen nicht anwendbar sind.

Auch Marchi¹⁾ führt die großen klimatischen Änderungen der geologischen Epochen mit Verwerfung aller anderen Hypothesen auf Änderungen in der Durchlässigkeit der Luft zurück; als wesentlichen Faktor nimmt er aber die Feuchtigkeit der Luft an und kommt zu dem Resultate, daß eine durch vermehrte Feuchtigkeit erhöhte Absorption und Verminderung der Durchlässigkeit der Luft die Bodentemperatur erniedrige; dieses scheint die natürlichste Deutung; aber Arrhenius sagt auf Grund seiner Resultate: „Marchi hat aber übersehen, daß der Feuchtigkeitsgehalt der Eiszeiten kleiner hat sein müssen“²⁾. Hier scheint aber der Schlußfehler nicht auf Seite Marchis zu liegen.

Die Feuchtigkeit der Luft, der Gehalt an Wasserdampf spielt eine viel bedeutendere Rolle sowohl für die Absorption, als auch durch die Niederschläge; denn diese bilden ja das den Gletscher konstituierende Element. Im Mittel kann man als Niederschlagsmenge für die ganze Erde gegenwärtig etwa 1 m jährlich³⁾ annehmen und Wechsel in den Niederschlagsmengen wird beträchtlichen Wechsel in der Ausdehnung der Gletscher zur Folge haben. Es ist auch eine durch die Beobachtungen bestätigte Tatsache, daß die Gletscher vorwiegend in jenen Regionen vorkommen, wo ursächliche Momente für die reichlichere Bildung von Wasserdampf vorliegen.

Die kontinentalen Teile von Asien sind gletscherarm; der Mangel an Gletschern im Thianschan, Kuenlün, Osthimalaya rührt wohl von der großen Trockenheit daselbst her; im Gegensatz hierzu sind die in der Nähe der Küste liegenden Gebirge Norwegens, der Südimalaya reich vergletschert. Da aber die Luftfeuchtigkeit bei sehr niedrigen Temperaturen (grimmiger Kälte) nur gering ist, so sind auch küstennahe Regionen mit allzugroßer Kälte weniger der Vergletscherung ausgesetzt, als solche mit relativ milden, nahe 0° liegenden Temperaturen; so äußert sich auch der Einfluß des Golfstromes durch die Zufuhr von warmem Wasser in die nördlichen Regionen; die von ihm gespülten Gegenden mit ihren mehr gleichmäßigen Temperaturen im Sommer und Winter und dem großen Feuchtigkeitsgehalte der Luft sind reich vergletschert. „Ein Winter von — 20° bis — 30° trägt zur Gletscherbildung nicht mehr, eher weniger bei, als ein solcher von bloß — 10°“⁴⁾. „Es war ein Irrtum, anzunehmen, daß die Wegnahme des Golfstromes Skandinavien wieder ganz vergletschern würde und Europa eine Eiszeit brächte; eher vermöchte dieses ein noch mächtigerer Golfstrom zu tun“⁵⁾. „Nicht die Kälte, sondern

1) Luigi de Marchi „Le cause dell' era glaciale“, Pavia 1895.

2) Arrhenius, l. c. S. 275.

3) Die Niederschlagsmenge ist am Festland allerdings sehr verschieden; sie beträgt z. B. in Suez 3 cm jährlich, in Cerra Punje in Vorderindien 14 m.

4) Heim, Gletscherkunde, S. 465.

5) Ibid, S. 486; dieser Schluß ist aber nicht ganz korrekt; denn die nördlicheren Gegenden würden vergletschert bleiben, und in denjenigen Gegenden, auf welche sich die Wirkung des Golfstromes bezieht, würde das Entfallen desselben eine Temperaturerniedrigung nicht von — 30°, sondern vielleicht von — 5° bis — 10° bringen, also gletscherfördernd sein.

der Schnee erzeugt die Gletscher, und Schnee bedarf zu massenhafter Entstehung nur mäßige Kälte, aber großer Feuchtigkeit. . . . Warme ozeanische Winde, ziemlich unvermittelt auf ein hohes Gebirge kommend, wie in Grönland, Spitzbergen, Neu-Seeland, Himalaya, Südamerika, Norwegen, gibt Gletscher“¹⁾).

Es hat auch diese Theorie die meisten Anhänger gefunden, unter denen Penck, Neumayer, Brückner, Biermann besonders genannt sein mögen. Penck sagt: „Die Ursache der Eiszeiten war eine Mehrung der Niederschläge und Erniedrigung der Temperatur, also klimatischer Wechsel“²⁾. Ebenso Brückner: „Es war das Klima der Eiszeit überall kühler und auf dem größeren Teile der Landfläche auch feuchter, als das heutige und als das Klima der Interglazial- und Präglazialzeiten“³⁾ und O. Biermann: „Die notwendige und hinreichende Bedingung zum Anwachsen der Gletscher liegen in einer reichlichen Niederschlagsmenge und einer tieferen Temperatur.“⁴⁾

Marchi vergleicht die eiszeitlichen Zustände mit denjenigen, welche jetzt in Südgrönland, Patagonien, dem antarktischen Kontinent herrschen: Winter nicht allzu strenge, Sommer genügend kalt, häufig Nebel, reichlicher Schnee.⁵⁾ Für ihn entfallen alle anderen Ursachen, es bleiben nur klimatologische, und er faßt das ganze Problem in der Grundfrage zusammen: *da quali condizioni climatologiche fu provocata al suo inizio l'espansione glaciale?* und er kommt zum Schlusse: *io credo che non posse rimanere alcun dubbio sulle conclusioni principali dell' invasione glaciale, queste condizioni dovettero essere una forte precipitazione nevosa e un abbassamento della temperatura specialmente estiva.*⁶⁾ Und ebenso behauptet Geikie: *Neither mountain-masses nor ranges are necessary to the production of an ice sheet: all that is required being a low temperature with sufficient precipitation.*⁷⁾

Hingegen erscheint es mir merkwürdig, daß der südliche Stock der Alpen, die ligurischen, cottischen und grajischen Alpen in der Nähe des Meeres, mit der reichlichen Verdunstung keine ausgedehntere Vergletscherung im Eiszeitalter gezeigt haben; es scheint dieses darauf zu deuten, daß zum mindesten noch andere Faktoren eine wesentliche Rolle gespielt haben.

Sowie das Vorrücken der Gletscher und die Steigerung des Wassergehaltes der Seen in unserer Zeit in engeren Zusammenhang gebracht wurden, so wird auch angenommen, daß die große quartäre Vergletscherung mit einer Füllung der großen Wasserbehälter einherschritt. Vom Beginne der zweiten Vergletscherung an nimmt man⁸⁾ eine Erstreckung des Kaspisees nördlich bis Orenburg,

1) Heim, l. c. S. 431 und 456.

2) Daß Penck (Vergletscherung der deutschen Alpen, S. 436) meint, Neu-Seeland zeige, daß ein maritimes Klima noch keine Eiszeit erzeuge, ist wohl ein Irrtum; gerade Neu-Seeland kann mit Rücksicht auf seine große Vergletscherung als Beweis für dieselbe angeführt werden.

3) Klimaschwankungen. S. 386.

4) „Zur Frage nach der Ursache der Eiszeiten.“ S. 3.

5) L. de Marchi, l. c. S. 15/6.

6) l. c. S. 47.

7) l. c. S. 415.

8) Siehe Geikie, „The great Ice-Age“; Brückner, „Klimaschwankungen“.

Kazan und Saratoff. ferner eine Verbindung mit dem Aralsee nach Osten und außerdem von Astrachan zur Donnmündung durch das Azowsche Meer mit dem Schwarzen Meere an. Diese Verbindung bleibt auch für die dritte Vergletscherung noch bestehend, für welche auch eine bedeutende Überflutung der Nordküste Europas durch das Weiße Meer stattfand, welches sich zwischen Petersburg und Helsingfors einerseits und weiter in zwei Zungen längs der Dwina und Petschora weit ins Land erstreckte.

In Amerika finden sich in dem großen Becken von Utah zwei Eintiefungen, welche im Tertiär noch nicht als Seen vorhanden waren, welche aber mit dem Eintreten der Eiszeit zu großen Seen umgewandelt worden sein sollen. Es sind dies der östlich gelegene Lake Bonneville, dessen kleine Überreste den Salzsee in Utah bilden und der an der Westseite des Beckens gelegene Lahontensee. Man nimmt eine zweimalige Füllung und Austrocknung an, welche auf dieselben Ursachen zurückgeführt werden, wie das Vorrücken und Abschmelzen der Gletscher: vermehrte Feuchtigkeit bei Erniedrigung der Temperatur und damit reichlichere Niederschläge.

Die Höhe der Wasserstände werden auch hier durch Strandlinien angezeigt und nach Gilbert und Russel¹⁾ lassen sich an den beiden Seen zwei Perioden hohen Wasserstandes unterscheiden, die durch eine Zeit getrennt sind, in welchen die Seen fast ganz — bis auf ihren heutigen Stand — geschwunden waren. Man kann nämlich drei Schichten unterscheiden, von denen die unterste und oberste Seeablagerungen, und dazwischen typische Fluß- und Bachablagerungen sind. Im Gebiete des Lake Bonneville lassen sich diese Ablagerungen bis 60 *m* über dem heutigen Spiegel des großen Salzsees verfolgen. Das Verhältnis der Ablagerungen der ersten zur zweiten Periode ist: Im Lake Bonneville 27 *m* : 4·5 *m*; im Lake Lahonton 30 *m* : 20 *m* (15 bis 23 *m*)²⁾

Außer dem Kaspi- und Aralsee sind in Asien noch eine Reihe abflußloser Seen, welche ähnliche Verhältnisse zeigen. Geikie erwähnt, daß der Issikulsee (südlich vom Balkaschsee gelegen) in 170 *m* Höhe über dem jetzigen Spiegel Strandlinien zeigt; ebenso sind am Baikalsee Terrassen in der Höhe von 300 *m* beobachtet. Im östlichen Teile von Ost-Turkestan ist eine weite Depression Han-Hai = Trockensee, welche in 700 *m* über dem Meere in einem Umfange von mehr als 1000 *km* früher ein großer See gewesen sein soll, an dessen Stelle sich gegenwärtig ebenfalls nur einzelne kleinere Salzseen finden.

Hingegen ist die ältere Annahme, daß die Sahara im Spättertiär ein Binnenmeer war, endgültig widerlegt;³⁾ der Wüstensand ist vom Meeressand wesentlich verschieden, und die Ablagerungen haben sich als Süßwasserablagerungen ergeben; doch war die Wüste früher jedenfalls besser mit Wasser

¹⁾ U. S. Geological Survey Report 1880/1 S. 186 und 261.

²⁾ Diesen Verhältnissen sucht Chamberlin auch bei den Eiszeiten dadurch gerecht zu werden, daß er mit denselben zwei Vereisungen als zusammenfallend ansieht, die dritte Vereisung aber als eine Episode (s. Geikie, l. c. S. 772).

³⁾ S. hierzu Desor „Aus Sahara und Atlas. 1865“, „La forêt vierge et le Sahara.“ Bary, Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin, Bd. 12, S. 17; Lenz, ebenda Bd. 16, S. 291; Zittel, „Beiträge zur Geologie und Palaentologie der lybischen Wüste, 1883.

versorgt, wie zahlreiche Reste von Trockenflußläufen zeigen, und dasselbe gilt von Palästina und Syrien.

„Es hat in der Tat den Anschein, als wenn dieselben klimatischen Schwankungen, welche die Eiszeit heraufbeschworen, in den kontinentalen Gebieten die abflußlosen Seen zum Teil bis zum Überfluten füllten.“¹⁾

Hierin liegt eine eigentümliche Verbindung zwischen Wasserstand, Temperatur und Eisbedeckung, ohne daß bisher entschieden werden konnte, welches die primäre Erscheinung war; es wäre aber wohl zu erörtern, ob Achsenumstellungen der Erde, die notwendigerweise mit Transgressieren der Meere und Änderungen im Niveau des Wassers auch in den Seen verbunden sein mußten, nicht auch den Wasserstand beeinflussten und damit eine der primären Ursachen hier zu suchen wäre.

Unter der Voraussetzung, daß die Wasserverdunstung veränderlich ist, soll nun zunächst der doppelte Einfluß auf die Absorption und die Niederschlagsmenge untersucht werden.

Für die theoretischen Untersuchungen ist es dabei nötig, den Zusammenhang zwischen Dampfspannung und Temperatur in einer mathematischen Formel gegeben zu haben. Formeln dieser Art wurden schon mehrfach aufgestellt, doch sind nicht alle wesentlich voneinander verschieden.

Wohl die älteste ist die von Roche (1830) gegebene:

$$E = a b^{\frac{t}{1+m}}$$

wobei, wenn τ in Celsiusgraden angegeben wird,

$\log a = 9.9590414$, $\log b = 0.0383818$, $m = 0.004788221$, $t = 20^\circ + \tau$ ist. Schreibt man $a = 10^\alpha$, $b = 10^\beta$, so wird

$$\log E = \alpha + \frac{\beta t}{1+m}$$

und setzt man $1 + m t = m \vartheta$, so wird

$$\log E = k_1 - \frac{k_2}{\vartheta}; \quad \vartheta = 228.85^\circ + \tau$$

$$k_1 = \alpha + \frac{\beta}{m} = 7.9749; \quad k_2 = \frac{\beta}{m^2}; \quad \log k_2 = 3.2237769.$$

Eine von dieser Formel prinzipiell nicht verschiedene ist die von Magnus:

$$E = E_0 \cdot 10^{\frac{a\tau}{b+\tau}}$$

wobei $E_0 = 4.525$, $a = 7.4475$, $b = 234.69$ ist. Aus dieser Formel folgt:

$$\log E = \log E_0 + \frac{a\tau}{b+\tau}$$

und wenn wieder $b + \tau = \vartheta$ gesetzt wird:

$$\log E = k_1 - \frac{k_2}{\vartheta}; \quad \vartheta = 234.69 + \tau$$

$$k_1 = \log E_0 + a = 8.1031$$

$$k_2 = a b; \quad \log k_2 = 3.2425051.$$

¹⁾ Brückner, Klimaschwankungen, S. 300.

Endlich hat Pictet aus theoretischen Erwägungen die Formel abgeleitet:

$$\log E = A - B \frac{V + (c_1 - c_2) \vartheta}{\vartheta}$$

wobei V die Verdampfungswärme, c_1 und c_2 die spezifische Wärme des Dampfes und der Flüssigkeit sind, und ϑ die absolute Temperatur bedeutet. Diese Formel schreibt sich unmittelbar:

$$\log E = A - B(c_1 - c_2) - \frac{B V}{\vartheta}$$

ist also identisch mit den früheren.

Als eine Erweiterung dieser Formel hat man diejenige von Dupré und Rankine anzusehen:

$$\log E = k_1 - \frac{k_2}{\vartheta} - k_3 \log \vartheta$$

mit den Konstanten: $k_1 = 17.44324$; $k_2 = 2795$; $k_3 = 3.8682$.

Zwei wesentlich von diesen verschiedene Formeln gaben Regnault und Kessler. Die Regnault'sche Formel ist:

$$\log E = a + b \beta^\vartheta + c \gamma^\vartheta$$

und die Kessler'sche

$$\log E = a - b \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{\beta + \tau}$$

Für die vorliegenden Untersuchungen in dem relativ engen Intervall der Temperaturen kann man die Roche-Magnus-Pictet'sche Formel beibehalten, in welcher ich jedoch für ϑ die absolute Temperatur einführte, wodurch sich die Konstanten etwas anders ergaben. Aus dem Bereiche zwischen -30° und $+50^\circ$ ergab sich für

$$\log E = k_1 - \frac{k_2}{\vartheta} \quad (5)$$

$$k_1 = 9.211018, \log k_2 = 3.3687035, \vartheta = 273^\circ + \tau$$

für welche die Darstellung allerdings nicht so gut ist, wie mit den Konstanten für $\vartheta_0 = 229^\circ$ oder 235° , welche aber in diesem Bereiche noch immer anwendbar ist ¹⁾.

Auf natürliche Logarithmen übergehend, erhält man dieselbe Form

$$\log_n E = c - \frac{d}{\vartheta} \quad (5 a)$$

$$c = 21.2091; \quad d = 5381.698; \quad \log d = 3.7309192$$

und durch Differentiation ²⁾:

¹⁾ Die Fehler werden von 10° zu 10° Temperatur: 0, - 0.01, - 0.02, + 0.14, + 0.21 + 0.25, + 0.12 - 0.53 und für $+50^\circ$: - 2.42.

²⁾ Die Kessler'sche Formel gibt

$$\begin{aligned} \log_n E &= a - b x, & \operatorname{tang} x &= \frac{\alpha}{\vartheta - \gamma} \\ \frac{1}{E} \frac{dE}{d\vartheta} &= -b \frac{dx}{d\vartheta} = + \frac{\alpha b}{(\vartheta - \gamma)^2 + \alpha^2} \end{aligned}$$

und wenn die Konstante β so gewählt wäre, daß $\beta + \tau = \vartheta$ wäre

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{d\vartheta} = \frac{\alpha b}{\vartheta^2 + \alpha^2}$$

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{d\vartheta} = + \frac{d}{\vartheta^2} \quad (6)$$

Luftdruck, Temperatur und Feuchtigkeit der Luft hängen von der Höhe ab und sind auch hier verschiedene Formeln aufgestellt worden, die aber teilweise miteinander im Widerspruch stehen.

Setzt man voraus, daß Druckänderungen und Temperaturänderungen derart stattfinden, daß der Vorgang ohne Wärmezufuhr oder Wärmeverlust erfolgen kann (adiabatisch), so läßt sich eine Beziehung für die Temperaturabnahme mit der Höhe leicht aufstellen.

Die Grundgleichung zwischen Temperatur- und Volumsänderung für eine zugeführte Wärme dQ ist:

$$dQ = c_v d\vartheta + A p dv, \quad (7)$$

wobei der erste Teil rechts die zur Temperaturerhöhung der Gewichtseinheit bei konstantem Volumen nötige Wärme darstellt, wobei also c_v die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Volumen ist; der zweite Teil ist die zur Volumvergrößerung um dv bei dem Drucke p dienende Wärmemenge, d. i. das kalorische Äquivalent der Arbeit $p dv$, wobei also $A = \frac{1}{424}$ ist. Da nun Druck, Volumen und Temperatur durch die Gleichung verbunden sind ¹⁾

$$p v = R \vartheta; \quad \text{für Luft: } R = 29.2719 \quad (8)$$

so folgt durch logarithmisches Differenzieren

$$\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} = \frac{d\vartheta}{\vartheta}$$

und damit

$$dQ = (c_v + AR) d\vartheta - AR \vartheta \frac{dp}{p}.$$

Hieraus folgt zunächst, daß die für konstanten Druck ($dp = 0$) nötige spezifische Wärme

$$c_p = c_v + AR \quad (9)$$

ist, und damit

$$dQ = c_p d\vartheta - AR \vartheta \frac{dp}{p}. \quad (10)$$

Eine Beziehung zwischen Druck und Höhe erhält man aus der Proportion

$$-dh : db = s : \sigma$$

indem die Änderung des Barometerstandes für die Höhenänderung $-dh$ im umgekehrten Verhältnis der spezifischen Gewichte von Luft (σ) und Quecksilber (s) stehen. Das Gewicht der Volumseinheit der wasserdampfhaltigen Luft setzt sich nun zusammen aus dem Gewichte der unter dem Partialdrucke $b - E$ stehenden Luft und dem Gewichte des unter dem Drucke E stehenden Wasser-

¹⁾ Strenge genommen wäre die Gleichung von van der Waals

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) = R \vartheta$$

zu verwenden; für die hier auftretenden Drucke genügt aber wohl das Boyle-Charles'sche Gesetz.

Da $p v = p_0 v_0 (1 + \alpha \tau) = p_0 v_0 \alpha (\vartheta_0 + \tau) = p_0 v_0 \alpha \vartheta$ ist, so wird

$$R = p_0 v_0 \alpha$$

und da $p_0 = b_0 s$, wenn s das spezifische Gewicht des Quecksilbers und $v_0 \sigma_0 = 1$ ist, wenn $\sigma_0 = 1.293$ das spezifische Gewicht der Luft ist, so folgt der obige Wert für R .

dampfes¹⁾, wobei die tatsächliche Spannkraft des Wasserdampfes E von der der betreffenden Temperatur entsprechenden Maximalspannung verschieden sein kann. Es wird also

$$\sigma = \sigma_0 \frac{b - E}{b_0 (1 + \alpha \tau)} + 0.622 \sigma_0 \frac{E}{b_0 (1 + \alpha \tau)}$$

$$\sigma = \frac{\sigma_0 b}{b_0 \alpha \vartheta} \left[1 - 0.378 \frac{E}{b} \right], \quad (11)$$

somit

$$db = - \frac{\sigma_0 b}{s b_0 \alpha \vartheta} \left(1 - 0.378 \frac{E}{b} \right) dh \quad (12)$$

und da $db : b = dp : p$ ist, so folgt

$$dQ = c_p d\vartheta + A R \frac{\sigma_0}{s b_0 \alpha} \left(1 - 0.378 \frac{E}{b} \right) dh.$$

Nun ist:

$$\frac{s b_0 \alpha}{\sigma_0} = R, \quad (13)$$

somit wird²⁾

$$dQ = c_p d\vartheta + A \left(1 - 0.378 \frac{E}{b} \right) dh.$$

Für absolut trockene Luft wäre $E = 0$, und damit für den adiabatischen Zustand ($dQ = 0$), da für Luft $c_p = 0.2377$ ist:

$$\frac{d\vartheta}{dh} = - \frac{A}{c_p} = - \frac{1}{100.8}, \quad (14)$$

so daß sich die Temperaturabnahme nahe 1° auf je 100 m ergibt.

Von derjenigen Höhe an, in welcher der Sättigungspunkt für den Wasserdampf erreicht ist, ist dQ nicht null, sondern es wird eine gewisse Wärmemenge frei, welche durch die Kondensation einer Menge dq des Wasserdampfes entsteht, wobei die in der Volumeneinheit Luft enthaltene Menge q des Wasserdampfes in dieser Höhe gegeben ist durch

$$q = 0.622 \frac{E}{b} \sigma = 0.622 E \frac{\sigma_0}{b_0 \alpha \vartheta_1}$$

$$\frac{dq}{q} = \frac{dE}{E} - \frac{d\vartheta_1}{\vartheta_1},$$

wenn jetzt ϑ_1 die Temperatur in der Höhe h ist; somit wird, wenn V die Verdampfungswärme ($V = 537$ Cal) bedeutet

$$Vq \frac{dE}{E} - Vq \frac{d\vartheta_1}{\vartheta_1} + c_p d\vartheta_1 + A dh = 0$$

¹⁾ Die Dampfdichte des Wasserdampfes gleich 0.622 vorausgesetzt. Auch diese Zahl ist aber nicht konstant; eine allgemeine Formel für dieselbe ist zum Beispiel:

$$\log \delta = k_1 - \frac{k_2}{\tau - \tau_0}$$

wobei τ_0 die Verdampfungsgrenze ist.

²⁾ Die Wärmezufuhr dQ ohne Temperaturerhöhung würde eine Ausdehnung, entsprechend der Erhebung und dh bewirken; da für trockene Luft ($E = 0$)

$$\frac{dQ}{A} = - R \frac{\sigma_0}{s b_0 \alpha} \cdot dh$$

ist, so folgt wieder, daß der Koeffizient von dh gleich der Einheit ist.

$$d\vartheta_1 = - \frac{A}{c_p + Vq \left(\frac{1}{E} \frac{dE}{d\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_1} \right)} dh \quad (15)$$

$$dh = - \frac{1}{A} \left\{ c_p + \frac{Vq}{\vartheta_1} \left(\frac{d}{\vartheta_1} - 1 \right) \right\} d\vartheta_1.$$

Diese Differentialgleichung läßt sich mit dem Werte

$$q = 1.06 E = 1.06 e^c e^{-\frac{d}{\vartheta_1}}$$

durch die Substitution $u \vartheta_1 = d$ integrieren, führt aber auf einen Integrallogarithmus, dessen Entwicklung zwar theoretisch konvergent, aber praktisch unverwendbar wird; das Resultat wird

$$h = \alpha (\vartheta - \vartheta_0) + \beta \log \frac{\vartheta}{\vartheta_0},$$

wenn die höheren Potenzen von ϑ vernachlässigt werden.

Zu berücksichtigen ist übrigens, daß der Wert von $\frac{d\vartheta}{dh}$ für trockene Luft auch nicht strenge sein kann, sondern nur eine Näherung darstellt, da die Temperaturabnahme mit der Höhe nicht in rein linearer Weise stattfinden kann. Setzt man für diesen Fall (absolut trockene Luft)

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-\frac{h}{m}},$$

so wird für kleine Höhen

$$\frac{\vartheta_0 - \vartheta}{\vartheta_0} = \frac{h}{m}.$$

Sei in der Nähe der Erdoberfläche die Höhe, für welche die Temperaturabnahme 1° beträgt H , welchen Wert man die aerothermische Höhenstufe nennen kann, so folgt

$$m = H \vartheta_0;$$

für $H = 100 m$, $\vartheta = 273 + 20 = 293^\circ$ würde $m = 29000$; für den später auf anderem Wege gefundenen Wert $m = 45.000$ würde H sehr nahe $150 m$ folgen. Aus der angenommenen Beziehung zwischen ϑ und h folgt

$$\frac{d\vartheta}{dh} = - \frac{\vartheta}{m};$$

soll dieser Wert mit dem früher aus der mechanischen Wärmetheorie erhaltenen (Formel 15) identisch werden, so müßte

$$Am = c_p \vartheta + Vq \left(\frac{d}{\vartheta} - 1 \right),$$

also

$$q \left(\frac{d}{\vartheta} - 1 \right) = C, \quad q = \frac{C\vartheta}{d - \vartheta}, \quad m = \frac{c_p \vartheta + VC}{A}$$

sein, was nicht möglich ist, da q nicht proportional ϑ ist, oder es müßte m veränderlich angenommen werden; für $C = 0$ würde mit dem mittleren Werte $\vartheta = 290^\circ$, m wie früher 30.000 folgen.¹⁾

Die aerothermische Höhenstufe für feuchte Luft kann aus den angenommenen Funktionalbeziehungen leicht gefolgert werden.

¹⁾ Der Wert muß wegen des Wertes von H mit dem oben erhaltenen identisch sein.

Der Abnahme der Dampfspannung

$$dE = \frac{d}{\vartheta^2} E \cdot d\vartheta$$

entspricht eine zugehörige Abnahme der Dampfmenge $dq = 1.06 dE$ Gramm pro m^3 Luft; diese Menge muß sich kondensieren.

In einem Volumen $v m^3$ Luft, welches das Gewicht $v\sigma$ hat, (σ = Gewicht pro m^3 Luft), wird sich $v dq$ Wasserdampf kondensieren, dieser fällt herab, um auf einer tieferen Stufe neuerdings verdampft zu werden; umgekehrt wird in dieser Schicht der von der nächstfolgenden herabgefallene kondensierte Dampf durch die freigewordene Wärme wieder verdampft; außer bei starken aufsteigenden Luftströmungen ist dies ja der beständige Vorgang, der dem Schweben der Wolken zugrunde liegt. Die Menge des herabgefallenen kondensierten Dampfes ist $v dq'$ und es bleibt noch ein Überschuß von kondensiertem Dampf gleich $v (dq - dq') = v \frac{d^2 q}{d\vartheta^2} d\vartheta$, wobei eine Wärmemenge

$$dW = V v \frac{d^2 q}{d\vartheta^2} d\vartheta \text{ Grammkalorien}$$

frei werden; diese werden die Luft erwärmen. Nun ist das spezifische Gewicht σ in der Höhe h bei dem Barometerstande b

$$\sigma = \frac{\sigma_0 b}{b_0 \alpha \vartheta} \left(1 - 0.378 \frac{E}{b}\right), \quad \sigma_0 = 1293 \text{ Gramm (pro } m^3).$$

Beträgt die durch die freigewordene Wärme dW bewirkte Erwärmung $d\vartheta'$, so wird

$$dW = \sigma v c_p d\vartheta',$$

wobei die spezifische Wärme c_p als Faktor auftritt, weil die Erwärmung ohne Volumsänderung stattfindet. Daraus folgt

$$\left(1 - 0.378 \frac{E}{b}\right) \cdot d\vartheta' = \frac{V b_0 \alpha \vartheta}{\sigma_0 b c_p} \frac{d^2 q}{d\vartheta^2} d\vartheta.$$

Da nun

$$q = 0.622 \frac{E}{b} \sigma = 1.06 E \left(1 - 0.378 \frac{E}{b}\right)$$

ist, so wird, wenn bei der Differentiation der Klammerausdruck als konstant angesehen wird:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q}{d\vartheta^2} &= 1.06 \left(1 - 0.378 \frac{E}{b}\right) \frac{d^2 E}{d\vartheta^2} \\ \frac{1}{E} \frac{d^2 E}{d\vartheta^2} &= \frac{1}{E^2} \left(\frac{dE}{d\vartheta}\right)^2 - \frac{2}{\vartheta^3} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{dE}{d\vartheta} - 2\right), \end{aligned} \quad (16)$$

somit

$$d\vartheta' = \frac{1.06 V \alpha b_0}{\sigma_0 c_p} \frac{b_0}{b} E \frac{d(d - 2\vartheta)}{\vartheta^3} d\vartheta.$$

$d\vartheta$ wäre die ohne Kondensation des Wasserdampfes stattfindende Abkühlung; infolge der Erwärmung um $d\vartheta'$ wird die resultierende Temperaturerniedrigung

$$d\vartheta_1 = d\vartheta - d\vartheta' = d\vartheta \left[1 - \frac{1.06 V \alpha}{\sigma_0 c_p} E \frac{b_0}{b} \frac{d(d - 2\vartheta)}{\vartheta^3}\right].$$

Der Koeffizient $\mathfrak{K} = \frac{1.06 V \alpha e^c d \cdot (d - 2\vartheta)}{\sigma_0 c_p \vartheta_0^3}$

wird, wenn hier an Stelle des veränderlichen Wertes ϑ , der konstante Wert $\vartheta_0 = 273^\circ$ eingesetzt wird,

$$\log \mathfrak{K} = 7.17325 - 10$$

somit $d\vartheta_1 = d\vartheta \left[1 - \mathfrak{K} \frac{b_\alpha}{b} \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta} \right)^3 e^{-\frac{a}{\vartheta}} \right]$, (17)

welche Formel aber mit der aus der mechanischen Wärmetheorie folgenden nicht stimmt.

Die zahlreichen Widersprüche, die sich hier aus den verschiedenen Beziehungen ergeben, zu lösen, scheint unmöglich; jede Beziehung zwischen den hier vorkommenden Größen: Höhe, Luftdruck, Temperatur, Dampfspannung bleibt hypothetischer Natur und wird erst dann als sichergestellt betrachtet werden können, wenn ausreichend empirisches Material vorliegen wird, um dieselbe zu prüfen. Solange diese Forderung nicht erfüllt ist, muß man sich mit Näherungen begnügen.

Die abgeleiteten Werte von $d\vartheta$ und $d\vartheta_1$ beziehen sich auf absolut trockene und absolut gesättigte Luft. Beide Zustände sind Grenzzustände, die in den unteren Teilen der Atmosphäre nicht erreicht sind. Stets wird die wirkliche Spannung des Wasserdampfes nur einen Bruchteil der Maximalspannung betragen; ist p die relative Feuchtigkeit (nicht in Prozenten, sondern $p < 1$ vorausgesetzt), so ist die wirklich vorhandene Spannung $\varepsilon = p E$, wenn E die maximale Spannung wäre, und es wird daher allgemein

$$\varepsilon = p E = p e^{c - \frac{a}{\vartheta}} \quad (18)$$

zu setzen sein, wobei jedoch der Wert von p sich, von dem Werte p_0 auf der Erdoberfläche ausgehend, asymptotisch dem Werte 1 in den obersten Schichten nähern muß. Man kann als eine p darstellende Funktion

$$p = 1 - (1 - p_1) e^a \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta} \right) \quad (18a)$$

wählen; ist dabei h_p die Höhe, in welcher praktisch p gleich 1 gesetzt werden sollte, so müßte wegen

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} = 1 + \frac{h}{m}; \quad e^a \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta} \right) = e^{\frac{a}{\vartheta_1} \left(1 - \frac{\vartheta_1}{\vartheta} \right)} = e^{-\frac{a h}{\vartheta_1 m}}$$

$$\frac{a h_p}{\vartheta_1 m} = \rho, \quad a = \frac{\rho \vartheta_1 m}{h_p}$$

so groß gewählt werden, daß der Faktor von $1 - p_1$ Null wird. Da $e^5 = 148$ ist, so würde $\rho \geq 5$ der Bedingung genügen und da h_p etwa 2500 m angenommen werden kann, so würde mit $m = 40.000 : a = 75 \vartheta_1 = 20.000$ genähert¹⁾; da übrigens

¹⁾ Dieser Wert ist, wie aus dem weiteren folgt, viel zu groß, so daß, wenn p durch diese Funktion dargestellt wird, p bis zu beträchtlichen Höhen kleiner als 1 ist; aus der letzten Form folgt übrigens, daß p nahe 1 wird, wenn auch a einen mäßigen Wert hat.

Eine direkte Abhängigkeit des Dampfgehaltes mit der Höhe gibt Hann (Handbuch der Meteorologie Seite 170) in der Form

$$\log \varepsilon_h = \log \varepsilon_0 - \frac{h}{q} \left(1 + \frac{h}{q'} \right)$$

wobei $q = 6500$, $q' = \infty$, oder nach Süring: $q = 6000$, $q' = 20.000$.

$$a \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta} \right) = - \frac{a}{\vartheta \vartheta_1} (\vartheta_1 - \vartheta)$$

ist, so kann auch geschrieben werden

$$p = 1 - (1 - p_1) e^{-\frac{a}{\vartheta_1^2} (\vartheta_1 - \vartheta)}$$

welche Gleichung für die Bestimmung von p nahe dieselben Werte liefert, aber für die folgenden Integrationen nicht verwendbar ist.

Durch Differentiation erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\vartheta} &= - \frac{a(1-p)}{\vartheta^2} \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} &= \frac{d}{\vartheta^2} - \frac{a(1-p)}{\vartheta^2 p} \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{d^2\varepsilon}{d\vartheta^2} &= \frac{d^2}{\vartheta^4} - \frac{2d}{\vartheta^3} - \left(\frac{2ad}{\vartheta^4} - \frac{2a}{\vartheta^3} + \frac{a^2}{\vartheta^4} \right) \frac{1-p}{p}. \end{aligned} \quad (19)$$

Aus der Formel für die mechanische Wärmetheorie würde damit folgen:

$$dh = - \frac{c_p}{A} \left\{ 1 + \frac{Vq}{c_p \vartheta} \left(\frac{d}{\vartheta} - 1 + \frac{a(p-1)}{p} \vartheta \right) \right\} d\vartheta \quad (20)$$

welche Gleichung als Definitionsgleichung für die Beziehung zwischen Temperatur und Höhe anzusehen wäre. Da nun

$$\frac{db}{b} = - \frac{dh}{R\vartheta} \left(1 - 0.378 \frac{\varepsilon}{b} \right)$$

ist, so würde sich für die Abhängigkeit des Barometerstandes von der Temperatur

$$\frac{db}{d\vartheta} = \frac{c_p}{AR\vartheta} \left\{ 1 + \frac{Vq}{c_p \vartheta} \left(\frac{d}{\vartheta} - 1 + \frac{a(p-1)}{p} \vartheta \right) \right\} b - \frac{0.378 c_p \varepsilon}{AR\vartheta} \quad (21)$$

ergeben; die Integrationen würden

$$h = \varphi_1(\vartheta), \quad b = \varphi_2(\vartheta), \quad b = \phi(h)$$

geben; da p sowohl als auch q Funktionen von ϑ sind, so werden die Integrale wohl als Quadraturen, aber in recht komplizierter Form folgen.

In der zweiten Form würde die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} d\vartheta &= - \frac{\vartheta}{m} [1 - F] dh \\ F &= \frac{Vb_0 \alpha \vartheta}{\sigma_0 b c_p} \cdot 1.06 \varepsilon \left[\frac{d^2}{\vartheta^4} - \frac{2d}{\vartheta^3} - \left(\frac{2ad}{\vartheta^4} - \frac{2a}{\vartheta^3} + \frac{a^2}{\vartheta^4} \right) \frac{1-p}{p} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

die Beziehung $h = \varphi_1(\vartheta)$ liefern, und dann wäre die Gleichung

$$\frac{db}{d\vartheta} = \frac{m}{R\vartheta^2(1-F)} b - \frac{0.378 m \varepsilon}{R\vartheta^2}$$

oder wenn $(1-F)^{-1}$ durch $1+F$ ersetzt wird

$$\frac{db}{d\vartheta} = \frac{m}{R\vartheta^2} b + \frac{m \varepsilon}{R\vartheta^2} \left[\frac{Vb_0 \alpha \vartheta}{\sigma_0 c_p} \left\{ \frac{d^2}{\vartheta^4} - \frac{2d}{\vartheta^3} - \left(\frac{2ad}{\vartheta^4} - \frac{2a}{\vartheta^3} + \frac{a^2}{\vartheta^4} \right) \frac{1-p}{p} \right\} - 0.378 \right] \quad (23)$$

zur Bestimmung der Beziehung $b = \varphi_2(\vartheta)$ zu lösen. Die Lösung der letzten Gleichung ist relativ einfach; sie gibt:

$$b = e^{-\frac{m}{R\vartheta}} (K + J) \quad (24)$$

wobei K eine Konstante und

$$J = \int \frac{m \varepsilon}{R \vartheta^2} \left[\frac{V b_0 \alpha \vartheta}{\sigma_0 c_p} \left\{ \frac{d^2}{\vartheta^4} - \frac{2 d}{\vartheta^3} - \left(\frac{2 \alpha d}{\vartheta^4} - \frac{2 \alpha}{\vartheta^3} + \frac{\alpha^2}{\vartheta^4} \right) \frac{1-p}{p} \right\} - 0.378 \right] e^{\frac{m}{R \vartheta}} d \vartheta \quad (25)$$

ist. Läßt man hier zunächst die von der Luftfeuchtigkeit abhängigen Zusatzglieder J weg und bestimmt die Konstante aus der Beziehung, daß auf der Erdoberfläche Luftdruck und Temperatur b_1, ϑ_1 sind¹⁾ so folgt

$$\log_n b_1 - \log_n b = \frac{m}{R} \left(\frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta_1} \right) = \frac{m}{R} \frac{\vartheta_1 - \vartheta}{\vartheta \vartheta_1}.$$

In erster Näherung kann, wenn die Exponentialfunktion in eine Reihe entwickelt würde, geschrieben werden:

$$\frac{b}{b_1} = 1 - \frac{m}{R} \frac{\vartheta_1 - \vartheta}{\vartheta \vartheta_1}.$$

Setzt man

$$\frac{R}{m} \vartheta \vartheta_1 = \vartheta_1 - G; \quad G = \vartheta_1 \left(1 - \frac{R}{m} \vartheta \right),$$

so wird:

$$\frac{b}{b_1} = 1 - \frac{\vartheta_1 - \vartheta}{\vartheta_1 - G} = \frac{\vartheta - G}{\vartheta_1 - G}; \quad \vartheta = G + (\vartheta_1 - G) \frac{b}{b_1},$$

oder wenn $G = 273^0 + g$ gesetzt wird:

$$\tau = g + (\tau_1 - g) \frac{b}{b_1}$$

Dieses ist die Formel, welche Mendeljeff zur Berechnung der Lufttemperatur τ in einem Punkte, in welchem der Luftdruck b herrscht, aus der Bodentemperatur τ_1 und dem Luftdruck b_1 am Boden verwendet, und welche auch Th. v. Oppolzer²⁾ verwendet. Aus Beobachtungen von Glaisher fand Mendeljeff die Konstante $g = -36^0$; nach späteren Messungen von Hann und Woeikoff ergab sich als Mittel -42^0 , also

$$\tau = -42^0 + (\tau_1 + 42^0) \frac{b}{b_1}$$

daher auf absolute Temperaturen reduziert $G = +231^0$ und

$$\vartheta = 231^0 + (\vartheta_1 - 231^0) \frac{b}{b_1}.$$

Man könnte hieraus den Wert von m bestimmen. Da in der Formel für G, ϑ nahe gleich der Bodentemperatur angenommen werden kann, so würde folgen

$$\vartheta_1 - G = \frac{R}{m} \vartheta_1^2$$

$$m = \frac{R \vartheta_1^2}{\vartheta_1 - G}.$$

¹⁾ Von b_0, ϑ_0 , d. i. 760 mm und 273⁰ C verschieden.

²⁾ „Über den Zusammenhang der Refraktion mit der Temperaturverteilung in der Atmosphäre.“ Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie 1884.

Nimmt man für die Bodentemperatur die Oberflächentemperatur der Erde gleich $+10^{\circ}\text{C}$, wie sich dieselbe in der Tiefe von 30 m findet, so wird ¹⁾

$$m = \frac{29 \cdot 27 \cdot 283^2}{283 - 231} = 45.000; \quad \frac{m}{R} = 1500.$$

Die Mendeljeff'sche Formel (und damit auch der erhaltene Wert für m) ist jedoch nur als Näherung anzusehen. Marchi²⁾ sucht dieselbe zu erweisen, wobei er die Temperatur der Luft als das Resultat der Einstrahlung von der Erdoberfläche und der Ausstrahlung gegen den Himmelsraum ansieht. Zugrundegelegt wird dabei das Strahlungsgesetz nach Maurer und Trabert,³⁾ nach welchem die Wärmemenge, welche ein Luftteilchen von der Temperatur τ von einem Körper, dessen Temperatur τ' ist, in einem Zeitteilchen dt erhält, gleich ist $\sigma (\tau - \tau') dt$. Dieses Strahlungsgesetz stimmt nicht mit dem Stefan'schen Gesetz überein; allerdings hat man es hier nicht mit absolut schwarzen Körpern zu tun, und das Gesetz kann immerhin als für die Luft gültig angesehen werden, wenn man Wärmestrahlung und äußere Wärmeleitung nicht trennt. Doch führt Marchi weiterhin noch zwei Wärmemengen S und V ein, von denen die eine die vom Boden auf das Luftteilchen übertragene, die andere die von diesem auf den Weltraum durch Leitung übertragene bedeutet. Streng bewiesen wird die Mendeljeff'sche Formel durch die Ableitung von Marchi sicher nicht.

Aus den Formeln

$$\log_n b_1 - \log_n b = \frac{m}{R \vartheta_1^2} (\vartheta_1 - \vartheta); \quad \frac{\vartheta_1 - \vartheta}{\vartheta_1} = \frac{h}{m}$$

folgt noch

$$h = R \vartheta_1 (\log_n b_1 - \log_n b) = C (\log b_1 - \log b) \\ C = R \vartheta_1 : \text{Mod.} = 18800$$

die gewöhnliche Formel für die barometrische Höhenmessung.

Um die von der Temperatur und Feuchtigkeit abhängigen Zusatzglieder zu berücksichtigen, ist zunächst in der Formel für b das Integral J zu berechnen. Es ist

$$\alpha' = \frac{V b_0 \alpha}{\sigma_0 c_p} \text{ sehr nahe } 1.4 \alpha \text{ und mit } \frac{m}{R} = n$$

$$J = n \int p \frac{e^c - \frac{a}{\vartheta}}{\vartheta^2} \left[\alpha' \frac{d^2}{\vartheta^3} - 2 \alpha' \frac{d}{\vartheta^2} - \alpha' \left(\frac{2 a d}{\vartheta^3} - \frac{2 a}{\vartheta^2} + \frac{a^2}{\vartheta^3} \right) \frac{1-p}{p} - 0.378 \right] e^{\frac{n}{\vartheta}} d\vartheta.$$

Setzt man hier

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \theta, \quad - \frac{\vartheta_1}{\vartheta^2} d\vartheta = d\theta, \quad \frac{d-n}{\vartheta_1} = x, \quad \frac{d-n+a}{\vartheta_1} = \lambda$$

so erhält man nach einigen leichten Reduktionen mit $1-p_1 = \pi$

¹⁾ Es ist aber nicht zu übersehen, daß die Bodentemperatur der Erde mit der Bodentemperatur der Luft nicht identisch ist; der Unterschied beträgt z. B. am St. Gotthard nach Messungen von Stapff (l. c. S. 16) nahe 4°C .

²⁾ Le cause dell' era glaciale. SS. 75 bis 81.

³⁾ „Die Wärmestrahlung der atmosphärischen Luft.“ Meteorologische Zeitschrift, Februar 1892, S. 41.

$$J = -\frac{ne^c}{\vartheta_1} \int \left(\frac{\alpha' d^2}{\vartheta_1^3} \theta^3 - 2 \frac{\alpha' d}{\vartheta_1^2} \theta^2 - 0.378 \right) e^{-x\theta} d\theta +$$

$$+ \frac{ne^c}{\vartheta_1} \pi e^{\frac{a}{\vartheta_1}} \int \left[\frac{\alpha' (a+d)^2}{\vartheta_1^3} \theta^3 - \frac{2\alpha' (a+d)}{\vartheta_1^2} \theta^2 - 0.378 \right] e^{-\lambda\theta} d\theta.$$

Da nun

$$\int e^{-x\theta} \theta^i d\theta = -\frac{e^{-x\theta}}{x} \left[\theta^i + \frac{i}{x} \theta^{i-1} + \frac{i(i-1)}{x^2} \theta^{i-2} + \dots + \frac{i(i-1)\dots 2 \cdot 1}{x^i} \right]$$

ist, so wird, wenn

$$\theta^i + \frac{i}{x} \theta^{i-1} + \frac{i(i-1)}{x^2} \theta^{i-2} + \dots + \frac{i(i-1)\dots 2 \cdot 1}{x^i} = C_i$$

gesetzt wird:

$$J = + \frac{ne^c}{\vartheta_1} \frac{e^{-x\theta}}{x} \left(\frac{\alpha' d^2}{\vartheta_1^3} C_3 - \frac{2\alpha' d}{\vartheta_1^2} C_2 - 0.378 \right) -$$

$$- \frac{ne^c}{\vartheta_1} \pi e^{\frac{a}{\vartheta_1}} \frac{e^{-\lambda\theta}}{\lambda} \left(\frac{\alpha' (a+d)^2}{\vartheta_1^3} C_3 - \frac{2\alpha' (a+d)}{\vartheta_1^2} C_2 - 0.378 \right)$$

und ebenso der Wert J_1 für die untere Grenze des Integrales $\vartheta = \vartheta_1$.
Schreibt man

$$\frac{C_i}{\vartheta_1^i} = \frac{1}{\vartheta_0^i} \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} \right)^i C_i$$

wobei ϑ_1 die Bodentemperatur, ϑ_0 eine Konstante, etwa 273^0 ist, so folgt für die Koeffizienten)

$$\frac{\alpha' d^2}{\vartheta_0^3} = 0.00729; \quad \frac{2\alpha' d}{\vartheta_0^2} = 0.00074$$

und da ϑ_1 stets nahe ϑ_0 ist, und die Koeffizienten C_i ebenfalls nahe 1 bleiben¹⁾, so fallen in der ersten Zeile die beiden ersten Ausdrücke gegen den letzten weg; wenn aber a nahe $4d$ ist, so wird

$$\frac{\alpha' (a+d)^2}{\vartheta_1^3} = 0.182, \quad \frac{2\alpha' (a+d)}{\vartheta_0^2} = 0.004$$

so daß man mit $C_3 = 1$ erhält:

$$J = -0.378 \frac{ne^c}{\vartheta_1 x} e^{-\frac{d-n}{\vartheta}} + 0.2 \frac{ne^c \pi e^{\frac{a}{\vartheta_1}} e^{-\frac{d-n+a}{\vartheta}}}{\vartheta_1 \lambda} =$$

$$= -0.378 \frac{m E e^{\frac{m}{R\vartheta}}}{R \vartheta_1 x} + 0.2 \frac{m E e^{\frac{m}{R\vartheta}} \pi e^a \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta} \right)}{R \vartheta_1 \lambda}$$

$$\Delta = -e^{-\frac{m}{R\vartheta}} J = \frac{m}{R \vartheta_1} \bar{E} \left[\frac{0.378}{x} - \frac{0.2}{\lambda} (1-p) \right].$$

Da nun x nahe 14, λ nahe 87 ist, so wird

$$\Delta = (0.135 + 0.014p) E; \quad b = K e^{-\frac{m}{R\vartheta}} - \Delta$$

und damit für die untere Grenze der Atmosphäre

$$\Delta_1 = (0.135 + 0.014p_1) E_1; \quad b_1 = K e^{-\frac{m}{R\vartheta_1}} - \Delta_1$$

¹⁾ Für $x = 16$, wird zwischen $\tau = \begin{cases} -30^0 \\ +30^0 \end{cases} : C_1 = \begin{cases} 1.186 \\ 0.963 \end{cases}, C_2 = \begin{cases} 1.410 \\ 0.932 \end{cases}, C_3 = \begin{cases} 1.682 \\ 0.906 \end{cases}$

wo für die obere Grenze auch $p = 1$ gesetzt werden kann. Hiermit wird

$$\log_n \frac{(b + \Delta)}{(b_1 + \Delta_1)} = \log_n \frac{b}{b_1} + \log_n \left(1 + \frac{\Delta}{b} \right) - \log_n \left(1 + \frac{\Delta_1}{b_1} \right) = -\frac{m}{R} \left(\frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta_1} \right)$$

somit

$$\log_n \frac{b}{b_1} = -\frac{m}{R} \left(\frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta_1} \right) + 0.135 \left[\left(1 + \frac{1}{10} p_1 \right) \frac{E_1}{b_1} - \left(1 + \frac{1}{10} p \right) \frac{E}{b} \right].$$

Die Differentialgleichung für h läßt sich schreiben:

$$\begin{aligned} d h &= -\frac{m d \vartheta}{\vartheta (1 - F)} = -\frac{m d \vartheta}{\vartheta} (1 + F) \\ d h &= -m \frac{d \vartheta}{\vartheta} - m d \vartheta \frac{\alpha'}{b} \varepsilon \left[\frac{d^2}{\vartheta^4} - \frac{2 d}{\vartheta^3} - \left(\frac{2 a d}{\vartheta^4} - \frac{2 a}{\vartheta^3} + \frac{a^2}{\vartheta^4} \right) \frac{1 - p}{p} \right]. \end{aligned}$$

Setzt man hier $\varepsilon = p E$ und für b seinen genäherten Wert

$$b = b_1 e^{\frac{n}{\vartheta_1}} e^{-\frac{n}{\vartheta}}; \quad \varepsilon = p e^{c - \frac{d}{\vartheta}}$$

so erhält man durch Integration

$$\begin{aligned} h + C &= -m \log_n \vartheta + \frac{m \alpha' e^{c - \frac{n}{\vartheta_1}}}{b_1 \vartheta_1} \left\{ \int \left(\frac{d^2}{\vartheta_1^2} \theta^2 - \frac{2 d}{\vartheta_1} \theta \right) e^{-\kappa \theta} d \theta - \right. \\ &\quad \left. - \pi e^{\frac{a}{\vartheta_1}} \int \left(\frac{(a + d)^2}{\vartheta_1^2} \theta^2 - \frac{2(a + d)}{\vartheta_1} \theta \right) e^{-\lambda \theta} d \theta \right\} \\ h + C &= -m \log_n \vartheta - \frac{m E}{b} \left\{ \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\alpha' d^2}{\vartheta_1^3} C_2 - \frac{2 \alpha' d}{\vartheta_1^2} C_1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - p}{\lambda} \left(\frac{\alpha' (a + d)^2}{\vartheta_1^3} C_2 - \frac{2 \alpha' (a + d)}{\vartheta_1^2} C_1 \right) \right\} \end{aligned}$$

und mit den angegebenen numerischen Werten der Koeffizienten:

$$\frac{h + C}{m} = \log_n \vartheta + \frac{E}{b} (0.00158 - 0.0019 p)$$

oder genügend genau

$$\frac{h + C}{m} = \log_n \vartheta + 0.0017 (1 - p) \frac{E}{b}.$$

Da für $\vartheta = \vartheta_1$, $p = p_1$, $h = 0$ ist, so folgt hiemit

$$\frac{h}{m} = \log_n \frac{\vartheta}{\vartheta_1} - 0.0017 \left[(1 - p_1) \frac{E_1}{b_1} - (1 - p) \frac{E}{b} \right].$$

Die beiden Resultate für b und h können jedoch keinesfalls die richtigen sein, da die von p_1 abhängigen Korrekturen nicht mit p_1 verschwinden, im Gegenteil die Korrektur in h mit abnehmendem p_1 wächst ($1 - p$ kann Null gesetzt werden). Daraus folgt, daß der Wert von a beträchtlich kleiner gewählt werden muß, selbst wesentlich kleiner als d , so daß κ und λ nicht sehr verschieden werden und auch die Koeffizienten $\frac{\alpha' d^2}{\vartheta_1^3}$, $\frac{2 \alpha' d}{\vartheta_1^2}$ von den Koeffizienten $\frac{\alpha' (a + d)^2}{\vartheta_1^3}$, $\frac{2 \alpha' (a + d)}{\vartheta_1^2}$ nicht sehr abweichen; dann wird

$$\Delta = \frac{m}{R \vartheta_1} E \cdot \frac{0.378}{\kappa} p = 0.135 p E$$

$$\log_n \frac{b}{b_1} = -\frac{m}{R} \left(\frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta_1} \right) + 0.135 \left(p_1 \frac{E_1}{b_1} - p \frac{E}{b} \right)$$

$$\frac{h - \eta}{m} = \log_n \frac{\vartheta}{\vartheta_1}; \quad \eta = 77 \left(p_1 \frac{E_1}{b_1} - p \frac{E}{b} \right).$$

Genauere Werte für die numerischen Koeffizienten zu geben, ist insolange unmöglich, als über die Koeffizienten der hier eingeführten Funktionen nur Schätzungen möglich sind; die Korrektion η sollte jedenfalls beträchtlich größer werden, als sie hier erscheint.

In den beiden Formeln

$$\vartheta = \vartheta_1 e^{-\frac{h-\eta}{m}}; \quad b = b_1 e^{\frac{m}{R} \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta} \right) + \delta}$$

in denen b_1, ϑ_1 sich auf die Höhe $h = 0$ beziehen, ist der Feuchtigkeitsgehalt der Luft durch die kleinen Korrektionsglieder η und δ berücksichtigt. Auf die Dichte der Luft wird der Einfluß derselben fast unmerklich und kann übergangen werden. Setzt man also

$$e^{\frac{h}{m}} = x; \quad \frac{m}{R} = n,$$

so wird

$$\vartheta = \frac{\vartheta_1}{x} \quad 1)$$

$$b = b_1 e^{-\frac{n}{\vartheta_1} \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta} - 1 \right)} = b_1 e^{-\frac{n}{\vartheta_1} (x-1)}.$$

Hieraus folgt für das Verhältnis der spezifischen Gewichte der Luft:

$$\sigma : \sigma_1 = b \vartheta_1 : b_1 \vartheta$$

und daher

$$\sigma = \sigma_1 \frac{b}{b_1} \frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \sigma_1 x e^{-\frac{n}{\vartheta_1} (x-1)}. \quad (26)$$

Findet nun beim Durchgange durch die Luft eine Absorption statt, so daß von einer auffallenden Lichtmenge L eine Menge KL zur Erde gelangt, so wird der Transmissionskoeffizient K von der Dichte der Luft, vom Gehalte an Wasserdampf und Kohlensäure und von der Zenitdistanz abhängen. Sei der Transmissionskoeffizient für den Durchgang durch die oberste Schicht, wenn die Luft in Schichten von der Dicke dh geteilt wird, k_1 , in der zweiten k_2 u. s. w.; so ist für den Durchgang durch n Schichten:

$$K = k_1 k_2 k_3 \dots k_n.$$

Für Schichten von gleicher Dichtigkeit wäre $k_1 = k_2 \dots = k_n, K = k^n$; da aber die Dichten nicht gleich sind, so ist k_i — bei vorerst normalem Einfall — eine Funktion der Dichte, und man kann setzen

$$k_i = k_0^{\delta \cdot dh} = e^{-\kappa \delta dh}; \quad k_0 = e^{-\kappa}$$

so daß für $\delta = 0$: $k_i = 1$ würde. Sodann ist

$$K_{i+1} = K_i k_i$$

daher

$$\frac{K_{i+1} - K_i}{K_i} = k_i - 1 = e^{-\kappa \delta dh} - 1; \quad \frac{dK}{K} = -\kappa \delta dh.$$

1) κ ist daher die bisher mit θ bezeichnete Größe.

Da nun

$$\frac{h}{m} = \log_n x; \quad dh = m \frac{dx}{x}$$

ist, so wird

$$\frac{dK}{K} = -\kappa \delta_1 m e^{-\frac{n}{\delta_1}(x-1)} dx. \quad (27)$$

Für trockene Luft erhält man daher durch Integration

$$\log_n K + C = +\kappa \delta_1 R \delta_1 e^{-\frac{n}{\delta_1}(x-1)}.$$

Es ist nun für die obere Grenze der Atmosphäre: $h = \infty, x = \infty, K = 1; C = 0$

für die Oberfläche: $h = 0, x = 1, K = K_0$

$$\log_n K_0 = \kappa \delta_1 R \delta_1$$

$$\log_n K_h = \kappa \delta_1 R \delta_1 e^{-\frac{n}{\delta_1}(x-1)}.$$

Für schief, aber geradlinig eintretende Strahlen ist die durchlaufene Strecke in der Schicht, die sich im Abstände h von der Erdoberfläche, d. i. im Abstände $r + h$ vom Erdmittelpunkte befindet, gleich, $dh \sec(z - \omega)$, wenn z die Zenitdistanz des Strahles gemessen im Einfallspunkte E an der Erdoberfläche und ω der Zentriwinkel EOP zwischen den Radienvektoren OE der Strahlen im Einfallspunkte und OP in der Höhe h ist; ω ändert sich daher mit der Höhe, und es folgt aus dem Dreiecke OEP :

$$\frac{r + h}{r} = \frac{\sin z}{\sin(z - \omega)}$$

Infolge der geringen Höhe der Luftsäule wird, wenn die Zenitdistanz nicht zu groß wird, ω klein bleiben; man kann aber wegen der Refraktion ω konstant gleich Null nehmen, so daß der Strahl in jedem Punkte seiner Bahn mit dem zugehörigen Radiusvektor OP den Winkel z einschließt und die in jeder Schicht durchlaufene Strecke $dh \sec z$ ist. Man hat daher mit genäherter Berücksichtigung der Refraktion:

$$\log_n K_{h,z} = \kappa \delta_1 R \delta_1 \sec z e^{-\frac{n}{\delta_1}(x-1)}$$

Es wird daher:

$$K_0 = e^{\kappa \delta_1 R \delta_1}$$

$$K_h = K_0^{\varphi(x)}; \quad \varphi(x) = e^{-\frac{n}{\delta_1}(x-1)}; \quad x = e^{\frac{h}{m}} \quad (28)$$

$$K_{h,z} = K_{h,0}^{\sec z}$$

Über die Größe des Transmissionskoeffizienten K_0 kann natürlich nur die Beobachtung entscheiden; dabei wäre noch zu berücksichtigen, daß die Absorption nicht für alle Strahlengattungen dieselbe ist. Nach Langley haben die kurzwelligen Strahlen im allgemeinen eine stärkere, langwellige eine schwächere Absorption. Seidel¹⁾ in München und Müller²⁾ in Potsdam fanden für den Transmissionskoeffizienten für Lichtstrahlen 0·794, beziehungsweise 0·825, im Mittel 0·810. Wenn es auch richtig ist, daß man es bei den

¹⁾ „Untersuchungen über die Helligkeit der Fixsterne und Extinktion in der Atmosphäre.“

²⁾ Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam 1888, S. 291.

Absorptionen hier mit einer fortlaufenden, kontinuierlichen Reihe zu tun hat, deren äußerste Glieder die Transmissionskoeffizienten Null haben, so wird auf diese Verschiedenheit in den Koeffizienten hier nicht Rücksicht genommen zu werden brauchen, da es sich wesentlich um die Absorption der Wärmestrahlen handelt.

Eine andere Frage ist die, was mit den absorbierten Wärmestrahlen geschieht und ob dieselben nicht in Berücksichtigung zu ziehen sind. Marchi hat in der Tat bei seinen Ableitungen über den Gleichgewichtszustand der Wärmebewegung in der Atmosphäre auf diese Strahlen Rücksicht genommen.¹⁾ und jedenfalls ist dieses nicht zu umgehen, wenn man die thermischen Verhältnisse in der Atmosphäre aus den Gesetzen der Strahlung und Wärmeleitung ableiten will. Diese Ableitungen sind aber auf mancherlei mehr oder weniger hypothetische Sätze gestützt, so daß man dieselben keinesfalls für einen Nachweis über die wirkliche Wärmeverteilung, als vielmehr für einen Versuch zur Lösung der Frage nach der Richtigkeit der zugrundegelegten Gesetze ansehen kann. Und da sich hiebei sehr häufig als Endergebnis zeigt, daß selbst sehr verschiedene Gesetze mit der wirklichen Verteilung der Wärme in der Atmosphäre nicht in direktem Widerspruche stehen, so ist bisher in dieser Frage noch kein endgültiges Ergebnis erreicht worden. So ist es für die vorliegenden Untersuchungen also ausreichend, die auf empirischem Wege ermittelte Wärmeverteilung in der Atmosphäre zugrundelegen, in welcher ja die von der Sonne ausgestrahlte, und in der Erdatmosphäre absorbierte Wärmemenge mit enthalten ist.

Wenn also im folgenden auf die Unterschiede in dem Transmissionskoeffizienten, denen auch W. Zenker etwas mehr Rücksicht zuteil werden läßt,²⁾ und auf die Wirkung der in der Atmosphäre absorbierten Wärmestrahlen, welche Marchi ausführlicher in den Bereich seiner Untersuchungen zieht, nicht weiter eingegangen wird, so kann dieses für die hier wesentlich in Betracht kommenden Resultate keine besondere Bedeutung haben.

Viel wichtiger ist, daß die Absorption in Luft, Wasserdampf, Kohlensäure eine wesentlich andere ist. Setzt man, wie bisher, voraus, daß die Absorption proportional ist der Dichte und Dicke der Schicht, so würde die Absorption in einer Schicht von der Dicke dh teilweise durch die Luft, teilweise durch die Beimengungen verursacht sein.

Das Gewicht der Luftmenge in der Volumseinheit bei dem Gesamtdruck b , dem Partialdruck des Wasserdampfes ϵ und anderer Gase (Kohlensäure) β , wäre³⁾

$$\sigma_1 = \delta_1 \frac{(b - \epsilon - \beta) \vartheta_1}{b_1 \vartheta}$$

die Gewichte des Wasserdampfes (Dampfdichte 0.622) und der Kohlensäure (Dichte 1.5) bei den angegebenen Partialdrucken ϵ und β sind beziehungsweise:

$$\sigma_2 = \frac{0.622 \delta_1 \epsilon \vartheta_1}{b_1 \vartheta} \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \frac{1.5 \delta_1 \beta \vartheta_1}{b_1 \vartheta}$$

1) l. c. S. 91.

2) „Über die Verteilung der Wärme auf der Erdoberfläche“, Berlin 1888. S. 37 ff.

3) δ_1 berechnet sich dabei aus:

$$\delta_1 = 1.293 \frac{b_1}{760} \frac{273}{\vartheta_1} = 0.46446 \frac{b_1}{\vartheta_1} \quad (b_1 \text{ in } mm, \vartheta_1 \text{ absolute Temperatur}).$$

Der Transmissionskoeffizient beim Durchgange durch dieses Gemenge ist nun gleich

$$(k_0^{a_1} k_0'^{a_2} k_0''^{a_3})^{dh},$$

wobei k_0 , k_0' , k_0'' von der Transmissionsfähigkeit der einzelnen Gase abhängt. Die Absorption in einer Luftschicht von der Dichte und Dicke 1 wäre $1 - k_0$; ist die Absorption im Wasserdampf μ_1 mal so stark, so wäre

$$1 - k_0' = \mu_1 (1 - k_0), \quad k_0' = 1 - \mu_1 (1 - k_0) = k_0^{\mu_0},$$

aus welcher Gleichung sich μ_0 für Wasserdampf bestimmen läßt; ¹⁾ ebenso wäre für Kohlensäure

$$k_0'' = 1 - \nu_1 (1 - k_0) = k_0^{\nu_0};$$

dann ist der Transmissionskoeffizient für die angegebene Schicht, wenn $k_0 = e^{-x}$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} k_i &= e^Q \\ Q &= - \frac{x \delta_1 \vartheta_1}{b_1 \vartheta} (b - \epsilon - \beta + 0.622 \mu_0 \epsilon + 1.5 \nu_0 \beta) dh = \\ &= - \frac{x \delta_1 \vartheta_1}{b_1 \vartheta} [b + (0.622 \mu_0 - 1) \epsilon + (1.5 \nu_0 - 1) \beta]. \end{aligned}$$

Nun ist

$$b = b_1 e^{-\frac{n}{\vartheta_1}(x-1)}; \quad \epsilon = p e^{c - \frac{d}{\vartheta_1}x}; \quad p = 1 - \pi e^{-\frac{a}{\vartheta_1}(x-1)}; \quad \beta = \beta_1 e^{-\frac{n'}{\vartheta_1}(x-1)},$$

wobei n' von n verschieden ist. Es ist nun, wie früher

$$\frac{dK}{K} = e^Q - 1 = Q, \quad dh = m \frac{dx}{x},$$

somit, wenn noch

$$0.622 \mu_0 - 1 = \mu'; \quad 1.5 \nu_0 - 1 = \nu'$$

gesetzt wird:

$$\frac{dK}{K} = - \frac{x m \delta_1}{b_1} \left[b_1 e^{-\frac{n}{\vartheta_1}(x-1)} + \mu' p e^{c - \frac{d}{\vartheta_1}x} + \nu' \beta_1 e^{-\frac{n'}{\vartheta_1}(x-1)} \right] dx.$$

Durch Integration folgt

$$\log_n K = \frac{x m \delta_1 \vartheta_1}{b_1} \left[\frac{b}{n} + \frac{\mu'}{d} E - \frac{\mu'(1-p)}{a+d} E + \frac{\nu' \beta}{n'} \right]$$

oder für mäßige Werte von a

$$\log_n K = \frac{x m \delta_1 \vartheta_1}{b_1} \left[\frac{b}{n} + \frac{\mu'}{d} p E + \frac{\nu' \beta}{n'} \right].$$

Die Integrationskonstante ist Null, da für die obere Grenze der Atmosphäre $b = 0$, $p E = 0$, $\beta = 0$, $K = 1$ ist. Bezeichnet man den für die Erdoberfläche gültigen Wert mit K_0' so ist

$$\log_n K_0' = x \delta_1 R \vartheta_1 \left[1 + \mu \frac{p_1 E_1}{b_1} + \nu \frac{\beta_1}{b_1} \right]$$

$$\mu = \frac{\mu' n}{d}; \quad \nu = \frac{\nu' n}{n'}$$

¹⁾ Ist $k_0 = 1 - z$, so wird $k_0' = (1 - z)^{\mu_0} = 1 - \mu_0 z + \frac{\mu_0(\mu_0 - 1)}{2} z^2 = 1 - \mu_1 z$;

$$\mu_0 = \mu_1 \left[1 + \frac{\mu_1 - 1}{2} z \right]$$

und ebenso wird für jede beliebige Höhe

$$\log_n K' = \kappa \delta_1 R \delta_1 \frac{b}{b_1} \left[1 + \mu \frac{pE}{b} + \nu \frac{\beta}{b} \right];$$

dabei ist $\frac{n}{d} = \frac{1}{3.5}$ und für Kohlensäure¹⁾ $\frac{n}{n'} = \frac{1}{1.35}$. Setzt man daher den Koeffizienten, der den Dampf- und Kohlensäuregehalt der Luft berücksichtigt

$$1 + \mu \frac{pE}{b} + \nu \frac{\beta}{b} = L \quad (29)$$

so werden ganz allgemein, wie früher die Formeln (28) Seite 184 für reine, trockene Luft gelten, und es wird für die tatsächliche dampf- und kohlen-säurehaltige Atmosphäre

$$\begin{aligned} K_0' &= K_0^L \\ K_h' &= K_h^L = K_0^{L\varphi(x)} = K_0'^{\varphi(x)} \\ K_{h,z}' &= K_{h,z}^L = K_{h,0}^{L \sec z} = K_{h,0}'^{\sec z} \end{aligned} \quad (30)$$

und es sollen im folgenden die Ausdrücke K_0' , K_h' , $K_{h,z}'$ durch K_0 , K_h , $K_{h,z}$ ersetzt werden, wobei

$$\begin{aligned} \log_n K_0 &= \kappa \delta_1 R \delta_1 \left(1 + \mu \frac{pE}{b} + \nu \frac{\beta}{b} \right) \\ \mu &= \frac{1}{3.5} (0.622 \mu_0 - 1); \quad \nu = \frac{1}{1.35} (1.5 \nu_0 - 1) \end{aligned}$$

und für reine, trockene Luft $pE = 0$, $\beta = 0$, $L = 1$ zu setzen ist.

Sei z. B. $K_0 = 0.8$, so wird für $L = 1$ und

$$\begin{array}{cccccc} \text{für } \varphi(x) &= & 0.0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1.0 \\ K_h &= & 1.000 & 0.956 & 0.915 & 0.875 & 0.836 & 0.800 \end{array}$$

in den Höhen

$$\text{für } m = 20.000 \quad h = \infty \quad 9600 \quad 6700 \quad 4000 \quad 1850 \quad 0 \quad \text{Meter}$$

$$\text{für } m = 40.000 \quad h = \infty \quad 12000 \quad 7300 \quad 4200 \quad 1900 \quad 0 \quad \text{Meter}$$

woraus folgt, daß innerhalb der den Beobachtungen zugänglichen Höhen der Wert von m keinen wesentlichen Einfluß auf die Resultate haben wird.

Setzt man $\log_n K_h = -k$, so wird

$$K_h = e^{-k}, \quad K_{z,h} = e^{-k \sec z} \quad (31)$$

Die Integrale mit dem Faktor $K_{z,h}$ in dieser Form sind meist nur durch mechanische Quadraturen ausführbar; um auch analytische Formeln allgemeiner Art abzuleiten, muß man zu Reihenentwicklungen schreiten. Für mäßige Zenitdistanzen wäre

$$e^{-k \sec z} = e^{-k} (1 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + \dots).$$

Nimmt man beiderseits Logarithmen, so erhält man

$$\begin{aligned} -k \sec z &= -k + \log_n (1 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + \dots) \\ -k &= \left[-k + a_1 z^2 + \left(a_2 - \frac{1}{2} a_1^2 \right) z^4 \right] \left[1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{24} z^4 \right] \end{aligned}$$

¹⁾ Da $c_p = c_v + AR$ ist, so wird

$$R = 424 (c_p - c_v) = 424 \frac{k-1}{k} c_p;$$

für Luft ist $c_p = 0.2377$, $k = 1.41$; für Kohlensäure $c_p = 0.2169$, $k = 1.31$; damit wird R für Luft 29.3, für Kohlensäure 21.76, und es wird $n : n' = R' : R$ (woraus auch folgt, daß der Kohlensäuregehalt nach aufwärts abnimmt).

und daraus

$$a_1 = -\frac{1}{2} k; \quad a_2 = -\frac{5}{24} k + \frac{1}{8} k^2$$

$$e^{-k \sec z} = e^{-k} \left[1 - \frac{1}{2} k z^2 - \left(\frac{5}{24} k - \frac{1}{8} k^2 \right) z^4 \right].$$

Da nun weiter

$$\cos(z \sqrt{k}) = 1 - \frac{1}{2} k z^2 + \frac{1}{24} k^2 z^4 \dots$$

ist, so kann für kleine Zenitdistanzen

$$K_{z,h} = e^{-k} \cos(z \sqrt{k}) \quad (32)$$

gesetzt werden. Für große Zenitdistanzen ist dieser Ausdruck mit dem früheren nicht identisch; er verschwindet für $z = 90^\circ$ nicht; da aber die Absorption im Horizonte tatsächlich auch nicht total ist, wie es die ursprüngliche Formel für $K_{z,h}$ gibt, so könnte der letztere Ausdruck wohl für jede Zenitdistanz angenommen werden. Es wird für

K_h	$K_h^{\sec z} =$			$\sqrt{k} =$	$K_h \cos(z \sqrt{k}) =$			
	$z = 20^\circ$	40°	60°		$z = 20^\circ$	40°	60°	90°
0.8	0.789	0.747	0.640	0.4724	0.789	0.757	0.704	0.590
0.9	0.894	0.871	0.810	0.3246	0.894	0.877	0.848	0.785
0.95	0.947	0.935	0.902	0.2265	0.947	0.938	0.923	0.890

Im folgenden habe ich daher als Transmissionskoeffizient in der Zenitdistanz z den Ausdruck (32) beibehalten. Trotzdem wird in manchen Fällen auch hier die Integration undurchführbar, und es muß der Mittelwertsatz angewendet werden.¹⁾ Man findet die Mittelwerte aus den zehn Werten für $z = 0^\circ, 10^\circ, \dots, 90^\circ$ für

$$\sqrt{k} = 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5$$

$$\text{Mittel von } \cos(z \sqrt{k}): \quad \mathcal{M}_1 = 0.9827 \quad 0.9614 \quad 0.9320 \quad 0.8951$$

$$\text{Mittel von } \frac{\sin(z \sqrt{k})}{\sin z}: \quad \mathcal{M} = 0.2344 \quad 0.3486 \quad 0.4595 \quad 0.5659.$$

Wenn auch der Transmissionskoeffizient sich wesentlich aus meteorologischen Faktoren zusammensetzt, und daher seine Berechnung hier seinen Platz finden mußte, so wird seine Bedeutung doch erst hervortreten, wenn an die Berechnung der Wärmemengen geschritten wird, welche irgend ein Punkt der Erde zu irgend einer Zeit von der Sonne erhält.²⁾ Soviel aber kann schon jetzt gefolgert werden, daß eine Veränderung im Feuchtigkeitsgehalte oder im Kohlen säuregehalte die Werte von μ und ν ändern wird, doch sind die Änderungen gegenüber anderen Einflüssen nicht allzubeträchtlich, da pE und β gegenüber b doch nur sehr mäßige Beträge sind. Nimmt man für die hier vorkommenden Größen extreme Werte: $\mu_0 = 10$, $\nu_0 = 10$, und ebenso $pE = \frac{1}{20} b$, $\beta = \frac{1}{500} b$, Werte, die sicher viel zu groß sind und nie erreicht werden, so würde $\mu = 1.5$, $\nu = 10$, $L = 1.1$, d. h. die Absorption gegenüber trockener Luft um etwa 10%₀

¹⁾ Marchi führt bei seinen Entwicklungen für $p^{\sec z}$ einen Mittelwert ein; theoretisch ist dieses natürlich zulässig; praktisch aber läßt sich über den Mittelwert selbst nichts aussagen. Marchi sagt „opportuna mente scelto“.

²⁾ S. das 9. Kapitel.

vermehrt werden. Vermehrung des Kohlensäuregehaltes könnte aber keinesfalls zu einer Erhöhung der Bodentemperaturen führen, und der Erhöhung der Lufttemperatur, die gerade in den unteren Schichten auftreten könnte, würde durch auftretende starke Konvektionsströmungen entgegengearbeitet.

Allein mit den Erfahrungstatsachen steht dieses Resultat dennoch insoferne in Widerspruch, als stark erhöhter Dampfgehalt in der Atmosphäre (Wolken) sehr merkliche Temperaturenniedrigungen herbeizuführen vermag, die durch diese Absorption nicht erklärt wird. In der Tat ist diese Abkühlung auch keineswegs eine Folge der Absorption, als vielmehr der Reflexion der Sonnenstrahlen an den Wolkenwänden, die in ganz anderer Weise in Rechnung zu ziehen ist.

Sei m die Wärmemenge, welche pro Minute und cm^2 der Erdoberfläche von der Sonne zur Erde gelangt und sei die Bewölkung für einen gegebenen Ort q ,¹⁾ daher $1 - q = q_1$ der nicht bewölkte Teil, so wird die Wärmemenge $m q_1$ frei, $m q$ durch Wolken zur Erde gelangen.²⁾ Nur für den ersten Teil ist der Transmissionskoeffizient K anzuwenden; vom zweiten Teil gelangt die Menge $K_{h_\omega} m q$ zu den Wolken, wenn h_ω die Höhe derselben ist; von dieser wird eine gewisse Wärmemenge durch Reflexion in den Weltraum verloren gehen, und es wird der restliche Teil $K_{h_\omega} m q r'$ hindurchgehen ($r' < 1$) und der von dieser Menge auf die Erde auffallende Betrag ist $K_{h_\omega} m q r'$. ($K_0 : K_{h_\omega}$) = $= K_0 m q r'$; für den durch Wolken bedeckten Teil des Himmels ist daher statt des Koeffizienten K_0 der Koeffizient $K_0 r'$ zu verwenden.

r' hängt von der Art der Wolken ab; bleibt man vorläufig bei der gewöhnlichen Einteilung in Cumulus, Stratus, Cirrus und ihren Mischformen stehen, so könnte r' für jede derselben einen gewissen Betrag annehmen. Da aber die Dichte der Wolken in einem gewissen Abhängigkeitsverhältnisse von der Höhe steht, so könnte man r' statt als Funktion der Dichte ebenso als Funktion der Höhe der Wolken darstellen; es wird also $r' = \varphi(h_\omega)$ sein, und da die Dichte mit der Höhe abnimmt, so könnte man

$$r' = r_0 + (1 - r_0) \frac{h_\omega}{h_\omega + a}$$

setzen, so daß für $h_\omega = 0$ der Minimalwert der durchgelassenen Wärme r_0 für $h_\omega = \infty$ der Maximalwert 1 resultiert, und a eine durch Beobachtungen für verschiedene Wolkenhöhen zu ermittelnde Konstante darstellt. In dieser Form fällt dann die Einteilung der verschiedenen Wolkenformen heraus, und es tritt an Stelle derselben ein konkretes mathematisches Gesetz.

¹⁾ Dieselbe wird allerdings in Prozenten des Himmelsgewölbes ausgedrückt; da sich dieselbe aber im wesentlichen auf den über dem Orte befindlichen Teil erstreckt und der Teil in der Nähe des Horizontes ausgeschlossen werden kann, der über der Fläche F befindliche Teil aber durch Parallelstrahlen auf die Erdoberfläche projiziert, einen gleichen Prozentsatz beschattet, so kann man, wenn es sich nicht um die äußerste Genauigkeit handelt, die ja hier schon aus anderen Gründen ausgeschlossen ist, q als den durch die Wolken beschatteten Bruchteil ($q < 1$) ansehen.

²⁾ Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, daß auch in dem wolkenfreien Teile Reflexionen stattfinden; der hiedurch verloren gegangene Teil kann aber mit dem Absorptionsverluste vereinigt gedacht werden.

Der Betrag von r_0 ist aber noch völlig unbekannt und wäre zunächst aus photometrischen und thermometrischen Messungen für Licht- und Wärmequalitäten zu bestimmen. Dann würde sich für die auf eine Fläche F auffallende Wärmemenge

$$K_0 (F m q_1 + F m q r'),$$

daher reduziert auf den cm^2 $K_0 m (q_1 + q r')$, ergeben, d. h. es tritt an Stelle des Transmissionskoeffizienten K_0 der wegen Bewölkung korrigierte Wert

$$K_0 (q_1 + q r') = K_0 [1 - q (1 - r')].$$

Für die weitere mathematische Behandlung stößt man hier noch auf erhebliche Schwierigkeiten. K_0 ist von der Zeit unabhängig; nicht so q und r' ; diese beiden Größen ändern sich von Tag zu Tag, ja von Stunde zu Stunde. Eine gegenseitige Abhängigkeit beider Größen ist wohl im allgemeinen, nicht aber immer im gleichen Maße vorhanden: je dichter die Bewölkung, desto ausgedehnter ist sie zumeist, d. h. wird q größer (ausgedehntere Bewölkung), so wird r' kleiner (geringere Menge der durchgelassenen Wärme). Eine solche Funktionsbeziehung wäre

$$r' + (1 - r_0) q = 1,$$

sodaß für $q = 0$, $r' = 1$; für $q = 1$, $r' = r_0$ wird. Damit würde dann

$$q = \frac{1 - r'}{1 - r_0} = 1 - \frac{h_w}{h_w + a},$$

sodaß für $h_w = 0$, $q = 1$, für $h_w = \infty$, $q = 0$ folgen würde. Der Transmissionskoeffizient wäre dann:

$$K_0 \left[1 - \left(1 - \frac{h_w}{h_w + a} \right) (1 - r_0) \left(1 - \frac{h_w}{h_w + a} \right) \right] = K_0 \left[1 - (1 - r_0) \left(\frac{a}{h_w + a} \right)^2 \right],$$

wobei r_0 die durch die Wolken noch durchgelassene Wärmemenge ist, wenn die Wolkenhöhe $h_w = 0$ wäre; da aber r_0 selbst noch möglicherweise ziemlich starken Veränderungen unterworfen sein kann, so kann diese Formel noch keinesfalls alle Verhältnisse hinreichend darstellen; doch kann genähert, wenn jetzt $r = 1 - r_0$ gesetzt wird, der Grad der Bewölkung durch den Faktor

$$W = 1 - r \left(\frac{a}{h_w + a} \right)^2; \quad K_h = e^{-k} \cdot W. \quad (33)$$

berücksichtigt werden.

Allein, wie schon erwähnt, liegt das Schwergewicht des Einflusses des Wasserdampfes auf die hier zu betrachtenden Verhältnisse noch viel mehr in der Bedeutung derselben als generatives Element der Gletscher, und gerade diese Verhältnisse der Rechnung zu unterwerfen, stößt auf unübersteigliche Schwierigkeiten. Das Entstehen des Wasserdampfes durch Verdunstung ist an verschiedene Verhältnisse gebunden; die Verdunstung findet der Hauptsache nach in demjenigen Teile der Erdoberfläche statt, welcher in der Höhe des Meeresspiegels liegt. Ist hier die Wassertemperatur (darunter auch die Temperatur derjenigen festen Teile verstanden, welche das der Verdunstung unterworfenen Wasser enthalten) ϑ_1 , die Temperatur der angrenzenden Luft θ_1 , so wird die Verdunstung proportional $\vartheta_1 - \theta_1$ gesetzt werden können, außerdem aber auch proportional dem Sättigungs-

defizit. Es wird daher für die in der Zeit dt pro cm^2 Fläche gebildete Dampfmenge der Ausdruck

$$D = C (\vartheta_1 - \theta_1) \pi e^c - \frac{d}{\vartheta_1} dt$$

erhalten werden. Zur Bildung dieser Dampfmenge ist eine Wärmemenge $D V$ erforderlich, welche der Luft entzogen wird. Obzwar diese Entziehung sich zunächst nur auf die nächstgelegenen Luftmengen erstreckt, wird durch Konvektionsströmungen ein Ausgleich erzielt, und man kann daher annehmen, daß diese Wärme der gesamten Luftmasse über dem angegebenen Querschnitt entzogen wird. Das Gewicht dieser Luftsäule ist aber

$$\int \sigma dh = \sigma_0 H = s b_1$$

($s = 13.6$, $b_1 =$ Barometerstand) und es wird demnach die Temperaturerniedrigung $d\theta$ bestimmt aus

$$VD = c_p s b_1 d\theta$$

$$d\theta = \frac{VD}{c_p s b_1}$$

Dadurch wird nun einerseits das Sättigungsdefizit und andererseits auch die Temperatur der Luft geändert, und dieses wird solange stattfinden, bis sich ein stationärer Zustand herausgestellt haben wird.

Die wichtigste Rolle spielen aber hier nun die erwähnten Konvektionsströme; wird durch dieselben einerseits ein Ausgleich der Lufttemperaturen in der ganzen Höhe der Luftsäule erzielt, wie es eben das Dichte- und Temperaturgesetz erfordern, so wird dadurch andererseits die gebildete Dampfmenge mit nach oben geführt und gibt dort durch Kondensation Anlaß zu Niederschlägen. Der Betrag dieser hängt ab von dem in jeder Höhe stattfindenden Werte von p ; die Form des Kondensationsproduktes und damit die Wirkung desselben im Gletscherbereiche auf Zuwachs oder Verminderung des Gletschereises von der Temperatur ϑ daselbst.

Würde es auch gelingen, alle diese außerordentlich komplizierten Verhältnisse in mathematisches Gewand zu kleiden, so würde man dadurch wohl ein Bild des sich in Ewigkeit gleichmäßig abspielenden Prozesses der Dampfbildung und Kondensation an einem Orte erhalten. Wenn aber auch die an einem Orte gebildeten Dampfmengen zumeist an nahe demselben Orte in größerer Höhe kondensiert werden, so nehmen die Luftströmungen nichtsdestoweniger auch in horizontalem Sinne so ausgedehnten Umfang an und werden überdies von so ausgedehnten Strömungen der Hydrosphäre begleitet, daß sich der Prozeß an verschiedenen Orten ganz verschieden abspielen müßte.

Zu berücksichtigen bleibt dabei der Umstand, daß Kondensation von der Firmlinie nach aufwärts nicht in jeder Höhe gleichmäßig stattfindet.

Es hat wohl zuerst Heim ¹⁾ hervorgehoben, daß es auch eine obere Schneegrenze gibt. Erhebt man sich zu immer größeren Höhen, so wird die Temperatur so niedrig, die Luft so trocken, die Niederschlagsmengen so gering, daß von merklichen Ansammlungen von Schnee keine Rede sein kann; der wirklich noch fallende Schnee ist so trocken und staubförmig, daß er verweht wird.

¹⁾ Gletscherkunde, S. 493.

Denkt man sich für jeden Ort (auch für jene Orte, in denen sich keine Gebirge erheben) nach Maßgabe der geographischen und lokalen Einflüsse diejenige Höhe berechnet oder empirisch ermittelt, in welcher sich perennierender Schnee befinden würde (im Hochgebirge die Schneelinie), so werden die sämtlichen Punkte über der ganzen Erde natürlich ein Kontinuum bilden; ihre Verbindung gibt eine Fläche: die untere Schneegrenze. Denkt man sich ebenso für jeden Punkt der Erde in noch größerer Höhe jene Punkte festgelegt, über welche ein Schneefall mit bleibendem Schnee nicht mehr stattfinden würde (im Hochgebirge durch die aus den Schneefeldern herausragenden obersten Gebirgspyramiden charakterisiert), so erhält man eine zweite Fläche: die obere Schneegrenze. Beide Flächen verlaufen in verschiedenen Distanzen von einander und können sich natürlich nicht schneiden.¹⁾ Ihr Abstand wird in den arktischen Regionen mäßig, in den äquatorealen Regionen sehr groß und stellt die Grenze der möglichen Mächtigkeit der Gletscher dar. Rein geographisch würden die beiden Flächen abgeplattete Rotationssphäroide sein mit relativ geringem Abstande über den Polen, sehr großem Abstande über dem Äquator. Lokale Einflüsse werden die beiden Flächen mannigfach verändern. Äquatoreales und tropisches kontinentales Klima wird beträchtliche Hebungen beider Flächen verursachen; da aber die obere Schneegrenze weniger beeinflusst wird, so werden die beiden Flächen einander genähert. Polares kontinentales Klima wird Senkungen beider Flächen mit Näherung derselben bis fast zur Berührung zur Folge haben. Ozeanisches Klima wird sowohl über dem Äquator als über den Polen die untere Schneegrenze herabdrücken, die obere Schneegrenze vielleicht nicht beeinflussen, den Abstand beider Flächen jedenfalls vergrößern. Es wird daher der Abstand der beiden Schneegrenzen denselben Gang, jedoch im umgekehrten Sinne, wie die Amplitude der Temperatur zeigen, und die Höhe der unteren Schneegrenze von der Mitteltemperatur selbst abhängig sein. Bei zu großen Kälten kann es vorkommen, daß nicht nur die untere, sondern auch die obere Schneegrenze die Erdoberfläche schneidet (die Höhen beider werden negativ, aber immer bleibt die untere Schneegrenze unter der oberen): in sehr kalten Gegenden gibt es keine Gletscher.

Für die Beurteilung dieser Verhältnisse wird also das Studium der Wärmeverteilung auf der Erdoberfläche von besonderer Wichtigkeit.

Formeln für die Mitteltemperaturen der Parallelkreise wurden mehrfach gegeben. Nach D. Forbes drückt sich die Mitteltemperatur des Parallelkreises der Breite φ aus:²⁾

$$\text{für die nördliche Halbkugel: } \vartheta_{\varphi} = -17.8^{\circ} + 44.9^{\circ} \cos(\varphi - 6\frac{1}{2})^2,$$

$$\text{für die südliche Halbkugel: } \vartheta_{\varphi}' = 26.0^{\circ} + 4.54^{\circ} \sin \varphi - 40.8^{\circ} \sin \varphi^2 \text{ oder}$$

$$\vartheta_{\varphi} = -10.8^{\circ} + 32.9^{\circ} \cos \varphi^{\frac{3}{4}} + 21.2^{\circ} L \cos 2\varphi,$$

wobei L das Maß der Kontinentalität des Parallels ist, nämlich die Erstreckung des Landes in demselben, welche für

¹⁾ Heim bemerkt hier, daß sich die beiden Grenzen in den arktischen Regionen kreuzen, was natürlich ausgeschlossen ist.

²⁾ Hann, Handbuch der Meteorologie, S. 120.

$\varphi = +70^\circ$	$L = 0.40$	$\varphi = +30^\circ$	$L = 0.40$	$\varphi = -10^\circ$	$L = 0.21$
+60°	0.52	+20°	0.32	-20°	0.20
+50°	0.53	+10°	0.25	-30°	0.16
+40°	0.47	0°	0.22	-40°	0.09

ist. Diese Formeln geben aber noch nicht die Mitteltemperatur eines Ortes; um eine solche abzuleiten, habe ich zwei Gürtel rings um die Erde gelegt, welche die größten kontinentalen Massen in nahe regelmäßiger Abwechslung mit größeren Wassermassen enthalten; der eine geht durch Australien, den Pazific, Nordamerika, den Atlantic, Europa, Afrika, den Indic; die Mitte bildet etwa ein größter Kreis A, dessen Pole $Q: \beta_0 = +40^\circ, \lambda_0 = 100^\circ$ (gegen Greenwich) und dessen Antipodenpunkt (also in Asien und Patagonien) sind. Der zweite Gürtel geht durch den Atlantic, Norwegen, Asien, Indien, Australien, die Antarktis, Patagonien, Brasilien; dessen Mitte bildet ein größter Kreis A' mit den Polen $Q': \beta_0' = +30^\circ, \lambda_0' = 200^\circ$ und dessen Antipodenpunkt (im Großen Ozean und im Kap).

Bildet man für die beiden Gürtel die Ausdrücke:

$$A_1 = a_1 + [b_1 \sin(\mu_1 + \beta_1) + c_1 \sin 2(\mu_1 + \gamma_1)] \cos \psi_1$$

$$A_2 = a_2 + [b_2 \sin(\mu_2 + \beta_2) + c_2 \sin 2(\mu_2 + \gamma_2) + d_2 \sin 3(\mu_2 + \delta_2)] \cos \psi_2 \quad (34)$$

wobei ψ_1, ψ_2 die auf die größten Kreise A, A' bezogenen Breiten und μ_1, μ_2 die auf dieselben bezogenen Längen sind, gezählt von den Anfangsmeridianen $QP, Q'P$ ($P = \text{Erdpole}$), so stellen diese Funktionen, für $a_1 = 0, a_2 = 0, \psi_1 = 0, \psi_2 = 0$, krumme Linien dar, die für $b_1 = c_1 = b_2 = c_2 = d_2$ und $\beta_1 = -10^\circ, \gamma_1 = +50^\circ, \beta_2 = 200^\circ, \gamma_2 = 200^\circ, \delta_2 = 170^\circ$ in Fig. 12 verzeichnet sind. Im ersten Gürtel (Fig. 12 a) treten Maxima auf (positive oder negative) in Nordamerika (II) und Afrika (III) mit einem schwachen Maximum in Australien, während die Ordinaten im Pazific (zwischen I und II), Atlantic, Europa (I, II, III) und dem Indic nahe null werden. Die zweite Kurve (Fig. 12 b) zeigt ein starkes Maximum in Asien (I), schwächere Maxima in Indien (II) und Australien (III), während sie für die Antarktis (IV), Patagonien und Brasilien (V) mit ziemlich gleicher, mäßiger Ordinate verläuft und an der Grenze des Atlantic und Norwegens, ferner in der Sundasee und im Gebiete von Neuseeland die Ordinate Null hat. Der Ausdruck

$$A = A_1^2 + A_2^2$$

würde daher schon ziemlich parallel mit dem Verlauf der Temperaturamplitude gehen und könnte die Temperaturamplituden darstellen, wenn den Konstanten $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ und den Winkeln $\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ an Stelle der von mir nur versuchsweise genähert angegebenen Werte beigelegt würden, die aus möglichst zahlreichen Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt werden müßten. Für die Bestimmung der μ, ψ der Beobachtungsorte B ergibt sich aus dem Dreiecke PQB , in welchem die Seiten: $PQ = 90^\circ - \beta_0, PB = 90^\circ - \varphi, QB = 90^\circ - \psi$, die Winkel: $PQB = 180^\circ - \mu, QPB = \lambda - \lambda_0$ sind die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= + \sin \varphi \sin \beta_0 + \cos \varphi \cos \beta_0 \cos(\lambda - \lambda_0) \\ \cos \psi \cos \mu &= - \sin \varphi \cos \beta_0 + \cos \varphi \sin \beta_0 \cos(\lambda - \lambda_0) \\ \cos \psi \sin \mu &= + \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0). \end{aligned} \quad (35)$$

Der obige Ausdruck A gäbe unmittelbar auch ein Maß für die Kontinentalität, für den Abstand der beiden Schneegrenzen und müßte für Untersuchungen, welche auf lokale, klimatische Verhältnisse Rücksicht nehmen, verwendet werden.

Denn ϑ_1 , θ_1 , b_1 , π , E_1 sind Funktionen der Zeit. Für θ_1 ergibt sich hiemit z. B. der Ausdruck:

$$\theta_1 = \theta_1^{(0)} + \frac{1}{2} A \sin 2\pi(t - t_0)$$

wenn $t - t_0$ die Zeit seit dem Momente, für welchen die Temperatur gleich dem Temperaturmittel war, ausgedrückt in Jahren, ist.

So einfach liegen jedoch die Verhältnisse nicht. Sämtliche Ausdrücke sind viel kompliziertere Funktionen, wenn man auf die mehrfache Periodizität Rücksicht nimmt. Alle diese Größen sind periodische Funktionen mit einer täglichen und einer jährlichen Periode und wahrscheinlich auch Perioden viel längerer Dauer, deren Bestimmung auf rein empirischem Wege durch Beobachtungen noch keinesfalls als abgeschlossen betrachtet werden kann. Hiezu kommen dann aber ganz bestimmte, sicher ebenfalls kausal bedingte, aber der mathematischen Analyse gegenwärtig kaum noch zugängliche unregelmäßige Störungen, die auch eine zeitliche Veränderlichkeit des Wertes von h_ω zur Folge haben.

Selbst abgesehen von diesen unregelmäßigen zeitlichen Veränderungen würde die Einführung der in dieser Weise auszudrückenden funktionalen Abhängigkeit von ϑ_1 , θ_1 , b_1 , π , E_1 von dem Orte und der Zeit nur auf empirischem Wege möglich sein, und eine solche Einführung gibt noch keineswegs eine kausale Verknüpfung in dem Wechsel der Erscheinungen, sondern nur eine Beschreibung desselben. Soll eine Erklärung dieses Wechsels angebahnt werden, so muß auf die Ursache der Veränderlichkeit der angegebenen Größen mit der Zeit zurückgegriffen werden, und da ist sofort als die nächste Ursache der veränderliche Sonnenstand zu erkennen, womit man notwendigerweise auf astronomische Ursachen zurückgeführt wird. Sowie die tägliche und jährliche Periode der Veränderlichkeit der die Erscheinungen bedingenden Elemente eine tägliche und jährliche Periode der Erscheinungen selbst herbeiführt, so wird man naturgemäß dazu geführt, in einer langperiodischen oder sekularen Veränderlichkeit der astronomischen Elemente die Ursache der langperiodischen oder sekularen Veränderlichkeit der Erscheinungen zu vermuten und so ist die Prüfung der möglichen astronomischen Ursache zur Erklärung der Eiszeiten zu einer unabweislichen Notwendigkeit geworden.

Temperaturänderungen infolge der vermehrten oder verminderten Absorption, sei es durch Wasserdampf oder Kohlensäure, kann nun aber auch eine sekundäre Wirkung auf die Klimate üben, indem durch derartige Änderungen der Temperatur geänderte Luft- und Meeresströmungen auftreten, welche an sich erst die großen klimatischen Umwälzungen erzeugen. Damit ist aber nicht gesagt, daß dieser Einfluß auf die Luftbewegungen direkt den veränderten Absorptionsverhältnissen zuzuschreiben ist; er kann ebensowohl durch später zu besprechende Ursachen (Änderungen in der Exzentrizität, der Neigung der Erdbahn u. s. w.) erzeugt werden. Da jedoch, welches immer

die Ursache derselben ist, die Erscheinungen der geänderten Luft- und Meeresströmungen sich zunächst als meteorologische Tatsachen äußern, so gehört deren Betrachtung ebenfalls zunächst an diese Stelle.

Der Einfluß derselben wurde schon von Poisson 1835 erwähnt und seither wiederholt zur Erklärung der Temperaturschwankungen in geologischen Zeitaltern herangezogen. J. Croll¹⁾, der Hauptverfechter dieser Theorie in der Gegenwart, stellte hierüber interessante Rechnungen an, die aber teilweise einer Korrektur bedürfen. Nimmt man den Golfstrom zu 80 *km* Breite und 300 *m* Tiefe, so wird bei einer stündlichen Geschwindigkeit von 3·2 *km* von der Fläche 80 · 3·2 = = 256 *km*² eine Wärmemenge *Q* übergeführt, welche sich aus dem Gewichte 80 · 10³ · 3 · 10² · 32 · 10² *m*³ = 768 · 10¹¹ *kg* und der Temperaturerhöhung gleich 14⁰ zu 10¹⁵ Cal. ergibt. Da die von der Sonne übernommene Wärmemenge (ohne Rücksicht auf Absorption) 2·5 cal. pro *cm*² und Minute ist, so erhält 1 *km*² pro Stunde 10¹⁰ · 60 · 2·5 = 15 · 10¹¹ cal = 15 · 10⁹ Cal. Die Wärmemenge von 10¹⁵ Cal. kann daher als von einer Fläche von 10¹⁵ : 15 · 10⁸ = 667.000 *km*², d. i. von einem Streifen von 40.000 *km* Länge (Äquator) und 16·6 *km* Breite geliefert werden.²⁾ Daraus folgt, daß der Golfstrom in seinem Laufe die Wärme eines Streifens von 8 *km* Breite zu beiden Seiten des Äquators abgibt. Der folgende Schluß Crolls, daß der Atlantische Ozean $\frac{1}{3}$ seiner Wärme durch den Golfstrom erhält und daß die Hälfte der in der polaren Zone deponierten Wärme auf den Golfstrom zurückzuführen ist, ist daher nicht richtig. Die von dem Golfstrom abgeführte Wärme wird in den verschiedensten Breiten nach und nach abgegeben, und einen Teil erhält auch der Atlantische Ozean, aber eben darum gelangt der Golfstrom schon wesentlich abgekühlt in die Polarregion und kann keine so bedeutende Temperaturerhöhung bewirken, umsomehr, als ein beträchtlicher Teil der Wärme zum Schmelzen der polaren Eisberge verwendet wird.

Nichtsdestoweniger geben die angeführten Zahlen einen guten Überblick über die in Bewegung gesetzten Wärmemengen. Da das spezifische Gewicht der Luft $\frac{1}{773}$ desjenigen des Wassers und die spezifische Wärme der Luft 0·2377 ist, so wäre ein 773 : 0·2377, d. i. ein mehr als 3000faches Volumen, Luft nötig, um dieselbe Wärmemenge überzuführen. Es ist klar, daß hienach dem Golfstrom ein ganz bedeutender Einfluß zugesprochen werden muß; daß aber, wie Croll meint, bei Abwesenheit des Golfstromes die Temperaturdifferenzen zwischen Pol und Äquator von dem jetzigen Werte gleich 45⁰ C. auf 110⁰ C.³⁾ steigen müßten, ist jedoch unrichtig, selbst dann, wenn zugegeben würde, daß die Polarzone die Hälfte ihrer Wärme durch den Golfstrom erhält. Die direkte Beobachtung liefert hier sofort Aufschluß. Nimmt man an, daß die dem Golfstrom entrückten, inneren Teile Nordamerikas und Asiens die Mitteltemperatur des Paralleles andeuten, so gibt die Verlegung der Isothermen einen Maßstab für den Einfluß des Golfstromes.

Wenn aber auch hiernach die Luftbewegung einen viel geringeren Einfluß auf die Klimaänderungen hat, als die Wasserbewegung selbst, so ist der Luft-

1) Climate and Time, S. 25.

2) Croll hat 32 miles = 50 *km* zu beiden Seiten des Äquators.

3) l. c. S. 41.

bewegung ein hervorragender Anteil insofern zuzuschreiben, als dieselbe wenigstens zum Teile die Wasserbewegung bewirkt.

Die verschiedenen möglichen Ursachen für die Meeresströmungen teilt Croll in zwei Gruppen ein. In der ersten Gruppe, von Croll die Gravitationstheorie genannt, tritt als Ursache der Unterschied der spezifischen Gewichte oder der Temperaturen auf (Maury¹⁾ und Carpenter), nach der zweiten, von Croll als Windtheorie bezeichneten sind es die Luftbewegungen, die das Wasser durch Reibung an der Oberfläche mitführen, oder doch wenigstens in Bewegung setzen. Croll macht hier insofern einen Unterschied von den übrigen Verfechtern dieser Theorie, als im allgemeinen nur die Passatwinde für die Meeresströmungen verantwortlich gemacht werden, während Croll als Ursache das System der Winde auf der ganzen Erde heranzieht²⁾. Daß dieser Einfluß vorhanden ist, folgt auch aus Beobachtungen über Temperaturschwankungen, die mit den Windrichtungen zusammenhängen. So bemerkt Woeikoff³⁾, daß in acht aufeinanderfolgenden Wintern in Nowaja Semlja, aus denen Beobachtungen vorliegen, sich immer der Jänner wärmer erwies, als der Dezember und Februar. Die angeführten Mittelwerte sind: November — 16·5°, Dezember — 20·9°, Jänner — 16·2°, Februar — 23·4°, März — 20·3°, April — 16·2°. „Wahrscheinlich ist dieses davon abhängig, daß die Zentren der Zyklonen im Jänner häufiger in geringem Abstände nach Norden von diesen Orten vorüberziehen, als früher oder später.“⁴⁾ So kam denn auch T. C. Chamberlin⁵⁾ zu einer Hypothese, daß die Ursache der klimatischen Schwankungen in einem Nichtzusammenfallen der Achse der Erdrotation mit der Achse der atmosphärischen Zirkulation gelegen wäre. Diese Theorie, wenn man sie überhaupt so nennen darf, ist aber kaum mehr als angedeutet. Der Punkt, gegen welchen die beiden großen Eisströme des Eiszeitalters in Nordamerika konvergierten, ist angeblich auch der Pol der atmosphärischen Zirkulation, von welchem aus die Zyklonen ausgehen, die über das Festland wandern; und dieses gibt nach Chamberlin eine Andeutung für eine Theorie: wenn nämlich die großen Eisablagerungen von der Luftzirkulation abhängig sind, so müßte jede Verschiebung dieses Zentrums, von einer Verschiebung der Vereisung gefolgt sein.⁶⁾ Hier stimmt aber manches nicht. Schon daß die Wirbelstürme Nordamerikas in dem Punkte nördlich der Hudsonsbay ihren Ursprung haben sollten, von welchem aus der Keewatin- und der Labradorgletscher ausgegangen sein mögen, ist nicht richtig; denn die Richtung der Bewegung der Zyklonen ist durchweg von Nordwest gegen Südost. Aber

¹⁾ Nach Maury ist die Verschiedenheit der spezifischen Gewichte durch den verschiedenen Salzgehalt und die verschiedene Temperatur bedingt; dabei kommt es auf das gegenseitige Verhältnis an, da die beiden Wirkungen einander entgegengesetzt sind. So ist z. B. in Grönland der warme Strom unten, der kalte oben, u. zw. nach Maury infolge des größeren Salzgehaltes des äquatorialen Wassers. (Croll, l. c. S. 133.)

²⁾ l. c. S. 15.

³⁾ Die Klimate der Erde, II. Bd. S. 7.

⁴⁾ Ebenda S. 8.

⁵⁾ „Localisation of Glaciation“, The Journal of Geology, Chicago, Bd. VII, S. 752.

⁶⁾ Ibid. S. 770.

auch der Zusammenhang zwischen dem Ursprungsorte der Zyklonen und der Bildung von Eis ist nicht klar und das Ganze eine etwas phantastische Konzeption, die kaum in Diskussion zu ziehen sein wird, da die Grundlagen, auf denen sie aufgebaut ist, irrig sind. ¹⁾

Croll wurde wohl in seiner Annahme über den Einfluß des genannten Windsystems dadurch geführt, daß er einsah, daß die Passatwinde für sich allein die Richtung des Golfstromes nicht zu erklären vermögen. Ist ja doch der Golfstrom der Richtung des Nordostpassates geradezu entgegengesetzt! So ist es wohl unbedingt nötig, auch auf die Temperatur und den Salzgehalt des Wassers selbst Rücksicht zu nehmen.

Auf die zwischen Carpenter und Croll bestehenden Meinungsdivergenzen kann nur ganz kurz eingegangen werden, da hier ein Mißverständnis beiderseits vorzuliegen scheint. Eine Niveaudifferenz als Ursache des Strömens anzunehmen, wie dieses Croll tut²⁾, scheint doch etwas gewagt, und der Einwand Carpenters, daß ein solcher Überdruck schon infolge des konstanten Fließens nicht auftreten kann, daß daher ein minimaler Höhenunterschied genüge, um das konstante Fließen zu erhalten, scheint die richtigere Ansicht zu sein.

Es ist ja nicht zu übersehen, daß ganz ähnliche Verhältnisse bei den Luftströmungen bestehen. bei denen ja auch durch die Wärme Hebungen der Niveauflächen stattfinden, als deren Folge erst die Luftströmungen auftreten. Sobald durch Erwärmung der Luft — oder durch Erwärmung und verschiedenen Salzgehalt des Wassers, die Flächen gleichen Luftdruckes — beziehungsweise gleichen hydrostatischen Druckes — nicht mehr mit den Niveauflächen, d. i. den Flächen gleicher Schwereintensität, zusammenfallen, so müssen Bewegungen auftreten. Allein diese Bewegung beginnt in dem Momente, in welchem die Niveaufläche gehoben wird, so daß eine endliche Überhöhung nicht zustande kommen kann.

Croll meint, daß alle Tatsachen ebensogut mit der Gravitationstheorie als mit der Windtheorie stimmen, daß aber eine Tatsache mit der ersteren nicht stimmt; absolut notwendig erscheint ja, daß eine, wenn auch noch so kleine Überhöhung am Äquator stattfinden müßte, daß aber die Challenger-Expedition gezeigt habe, daß der Nordatlantic ein höheres Niveau habe, und daß das Niveau gerade am Äquator am tiefsten sei. ³⁾ Dieser Ausspruch ist nun folgendermaßen zu verstehen: Aus Sondierungen in verschiedenen Tiefen ergab sich, daß am Äquator die Temperatur von der Oberflächentemperatur 26° C. schon in 700 *m* Tiefe auf 4° C. gesunken war, während in mittleren Breiten von etwa 30° bei einer Oberflächentemperatur von 22° C. die Temperatur von 4° C. erst in der Tiefe von 1200 bis 1300 *m* erreicht war. Wird nun aus den Tempera-

¹⁾ Dr. Hayes berichtet von seiner Expedition, daß er von dem weiteren Vordringen in Grinnelland durch einen furchtbaren Orkan verhindert war; zum Schiffe zurückgekehrt fand er hier alles ruhig, während weit weg die Wolken noch sturmgepeitscht waren. Auch andere Polarforscher sollen ähnliche Erfahrungen gemacht haben (Geikie, l. c. S. 55). Sollte dieses den Anstoß zu jener Hypothese Chamberlins gegeben haben?

²⁾ l. c. S. 172.

³⁾ Croll. l. c. S. 220

turen in den einzelnen Tiefen mit Hilfe des Ausdehnungskoeffizienten die Höhe der zugehörigen Wassersäule bestimmt, so findet sich die Gesamthöhe der Wassersäule am Äquator am kürzesten.¹⁾

Die von Croll mitgeteilten Zahlen sind (auszugsweise):

Breite	0°	23°	38°	Breite	0°	23°	38°
Oberfläche	77·9 ⁰	72 ⁰	70 ⁰ F	400 Faden	40·3 ⁰	47·7	54·8 ⁰ F
50 Faden	64·0	—	—	600 „	39·2	41·7	41·6
100 „	55·6	67·0	63·5	800 „	39·1	39·4	38·1
200 „	46·6	57·6	60·6	1000 „	36·9	38·3	37·9
300 „	42·2	52·5	60·0	1500 „	36·1	36·7	36·2

Diese Reihen kann man ausdrücken durch eine Funktion

$$\vartheta = a + b e^{-cx}$$

und es findet sich, wenn x in Metern, ϑ in Celsiusgraden ausgedrückt wird:

für den Äquator: $\tau = 5·7^0 + 19·8 e^{-0·00343 x}$

für die Breite 23°: $\tau = 1·4^0 + 20·9 e^{-0·00073 x}$

für die Breite 38°: $\tau = 1·2^0 + 19·9 e^{-0·00073 x}$

In der Tiefe x ist nun die Temperatur ϑ ; das spezifische Gewicht, ohne Rücksicht auf den Salzgehalt:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + \alpha \tau};$$

es wird daher die Druckzunahme pro Querschnittseinheit für die Tiefe dx :

$$dp = \sigma dx = \sigma_0 \frac{dx}{1 + \alpha \tau},$$

demnach der Druck in der Tiefe h

$$p_h = \sigma_0 \int_0^h \frac{dx}{1 + \alpha a + \alpha b e^{-cx}}$$

Setzt man $1 + \alpha a = m$, $\alpha b = n$, $e^{-cx} = y$, $-cx = \log_n y$, so wird:

$$\begin{aligned} p_h &= -\frac{\sigma_0}{c} \int_0^h \frac{dy}{y(m + ny)} = -\frac{\sigma_0}{c} \int \frac{dy}{m} \left(\frac{1}{y} - \frac{n}{m + ny} \right) = \\ &= -\frac{\sigma_0}{cm} \log_n \frac{y}{m + ny} = -\frac{\sigma_0}{cm} \log_n \frac{e^{-cx}}{1 + \alpha a + \alpha b e^{-cx}} \Big|_0^h \\ p_h &= \sigma_0 \left[\frac{h}{1 + \alpha a} + \frac{1}{c(1 + \alpha a)} \log_n \frac{1 + \alpha \tau_h}{1 + \alpha \tau_0} \right]. \end{aligned}$$

Die Höhen, denen gleiche hydrostatische Drucke entsprechen, werden daher nicht gleich sein; sollen für zwei verschiedene Orte die Drucke gleich sein, so muß

$$\frac{h}{1 + \alpha a} + \frac{1}{c(1 + \alpha a)} \log_n \frac{1 + \alpha \tau_h}{1 + \alpha \tau_0} = \frac{h'}{1 + \alpha a'} + \frac{1}{c'(1 + \alpha a')} \log_n \frac{1 + \alpha \tau'_h}{1 + \alpha \tau'_0}.$$

¹⁾ Auch Woeikoff macht auf diesen Umstand aufmerksam (II. Bd. S. 70). Für die Westküste von Afrika gab er als Ursache die hohe Temperatur des Mittelmeeres, welche bis zum Grunde + 12° betrage. Dadurch würde sich allerdings auch die anfänglich südwestliche Strömung des atlantischen Äquatorialstromes erklären. Doch findet sich dieselbe Temperaturverteilung auch im Indischen Ozean in der Nähe des Roten Meeres. Durch die Challenger-Expedition hat aber diese Tatsache eine viel allgemeinere Bestätigung erfahren.

Da man in großen Tiefen die Temperatur τ_h , $\tau_{h'}$ als gleich ansehen kann, und zwar nahe 0°C. , so wird, wenn noch αa , $\alpha a'$ gegenüber der Einheit vernachlässigt wird:

$$h - \frac{1}{c} \log_n (1 + \alpha \tau_0) = h' - \frac{1}{c'} \log_n (1 + \alpha \tau_0')$$

und da $\alpha \tau_0$, $\alpha \tau_0'$ gegenüber 1 nur klein sind, durch Reihenentwicklung der Logarithmen:

$$h - h' = \frac{\alpha \tau_0}{c} - \frac{\alpha \tau_0'}{c'}$$

Hiemit folgt für den Unterschied der Höhe h im Äquator und derjenigen h' in 25 bis 35° Breite $h - h' = -81.7 \text{ m}$, d. h. am Äquator wäre das Niveau etwa 80 m niedriger, als in der Breite von etwa 30° .

In der Tat ist die Sache jedoch etwas anders aufzufassen.

Mathematisch ausgedrückt werden die Flächen gleichen Potentials nicht mehr Kugelflächen sein, sondern, gleichmäßige Erwärmung durch die Sonne vorausgesetzt, von ellipsoidischer Form, mit einer Überhöhung in dem Ringe der stärksten Erwärmung. Diese Fläche müßte eine Gleichgewichtsfläche sein, und kann daher, solange die Erwärmungs- und Dichteverhältnisse sich nicht ändern, dennoch nicht zu Strömungen Anlaß geben. Bei steigender Erwärmung würde aber die Überhöhung am Wärmeäquator wachsen, bei Abkühlung abnehmen, und so würde ein unter Umständen sogar labiler Gleichgewichtszustand durch eine Art Schwingungen der Kugel in einen stabilen übergehen, und sofern die Temperatur des Wassers überall dem Einfluß der wechselnden Bestrahlung gleichmäßig rasch zu folgen vermag, würden Strömungen überhaupt nicht auftreten können.

Wenn aber an einzelnen Stellen lokal stärkere Erwärmungen auftreten, und damit Abweichungen der Niveauflächen von der ellipsoidischen Gestalt, so wird dieses Anlaß zur Entstehung von Strömungen geben. So scheint es fast, als ob die Wüstenregion des afrikanischen Kontinentes und des Ostens von Asien als Entstehungszentren von warmen Meeresströmungen anzusehen wären, während deren weiterer Verlauf der Hauptsache nach durch die vorgelagerten Kontinente beeinflußt wird.

Tatsächlich sind auch die Meeresströmungen in der Nähe des Äquators diesem nahe parallel und folgen den Passaten, durch welche sie angeregt werden; nur in der Nähe der Kontinente erfahren sie Ablenkungen, die daher im wesentlichen der oberflächlichen Erwärmung zuzuschreiben sind.

Die Luftströmungen werden nun allerdings durch Verteilung von Wasser und Land bedingt; dadurch, daß auf der nördlichen Hemisphäre das Festland, auf der südlichen das flüssige Element vorherrscht, sind ja die Region der Kalmen und mit derselben die beiden Passatzonen und die Roßbreiten¹⁾ etwas nach Norden verschoben, so daß der meteorologische Äquator, d. h. die wärmste

1) Der Name „Roßbreiten“ ist noch nicht erklärt. Der englische Name „horse-latitudes“ kann ganz wohl aus dem französischen „latitudes hors des alizées“ durch mißverständliche Übertragung entstanden sein

Zone in etwa + 5° Breite liegt. Eine Veränderung in der Richtung des Golfstromes dürfte kaum ohne Änderung in der Verteilung von Land und Wasser denkbar sein; und so ist allerdings indirekt die Verteilung von Land und Wasser von nicht unwesentlichem Einfluß auf die Temperaturverteilung, wenn sie auch nicht direkt auf die Vereisung selbst von Einfluß wäre.

J. Geikie schreibt den Meeresströmungen ebenfalls einen gewissen Einfluß zu; er spricht aber von Änderungen in denselben zu den Zeiten der klimatischen Wechsel. Er meint, daß während der Eiszeiten die Meeresströmungen vom Süden unbedeutend gewesen sein müssen, und daß hauptsächlich Meeresströmungen von Norden stattgefunden haben müssen, welche Eisberge bis zu den Azoren brachten, während in den Interglazialzeiten sich Strömungen vom Süden nach Norden, und zwar in viel höherem Maße als jetzt, herausgebildet hatten. ¹⁾ Welches jedoch die Ursache dieser Veränderungen in der Richtung der Meeresströmungen gewesen sein mag, die diesen klimatischen Wechsel herbeiführte, könne nicht angegeben werden.

Wenn seit dem Pleistozän die Anordnung der Kontinente sich im wesentlichen nicht geändert hat, so wird der Verlauf der Meeresströmungen sich, im großen und ganzen wenigstens, nicht geändert haben. Gerade diesem Umstande schreibt aber Croll einen sehr bedeutenden Einfluß zu. Wenn der Golfstrom nach Süden gegangen wäre, so würde die nördliche Erdhälfte in eine Eiskalotte verwandelt worden sein, und im Süden würde das Eis abschmelzen. Auch A. Penck schließt sich dieser Meinung an und akzeptiert sie als die seinige; denn der Unterschied, den er zwischen seiner Ansicht und derjenigen von Croll anführt, „daß nach Croll die herrschenden Winde indirekt durch die wechselnde Exzentrizität der Erdbahn beeinflusst werden, während solches nach unserer Ansicht eine direkte Folge derselben ist,“ ²⁾ scheint doch im ganzen recht unwesentlich. Der Beweis aber, daß der Golfstrom zur Eiszeit eine andere Richtung angenommen haben müsse, den Croll aus den geologischen Lagerungen, z. B. am Clyde zieht, scheint durchaus nicht stichhältig, wenn man an die viel wahrscheinlichere Annahme von Hebungen und Senkungen denkt. Jedenfalls, ob und in welchem Maße auch Verlagerungen von Luft- und Meeresströmungen zur Eiszeit anzunehmen sind — denn eine, wenn auch nur mäßige Verlagerung muß bei dem Vorhandensein einer größeren Vereisung der arktischen Regionen jedenfalls angenommen werden — führt die Untersuchung der Ursachen dieser Verlagerung dennoch wieder auf die Untersuchung der Veränderung in den astronomischen Konstanten zurück.

¹⁾ J. c. S. 778.

²⁾ „Vergletscherung der deutschen Alpen“ S. 450.

VIII. Kapitel.

• Astronomische Ursachen.

a) Temperatur des Weltraumes; Veränderlichkeit der Sonnenstrahlung.

Die einfachste Erklärung — einfach, weil sie keiner weiteren Hypothesen und Erläuterungen bedarf, ist die, daß der Wechsel in dem Klima der Erde durch Änderungen in der Temperatur des Weltraumes oder in der Stärke der Sonnenstrahlung bedingt gewesen sei.

Änderungen in der Temperatur des Weltraumes können Erwärmung oder Abkühlung herbeiführen, je nachdem das Sonnensystem durch wärmere oder kältere Gegenden hindurchzieht. Croll¹⁾ meint, daß Erniedrigung der Temperatur des Weltraumes keine Eiszeit hervorrufen hätte können, weil das Wasser gefrieren und sich daher das Land nicht hätte mit Eis überziehen können. Dieser Schluß ist unrichtig; denn es bedarf ja keiner so bedeutenden Temperaturerniedrigung; eine solche von 2 bis 3° würde völlig ausreichen, und bei einer derartigen Temperaturerniedrigung kann von einem Gefrieren des gesamten Wassers auf der Erde keine Rede sein.

Wenn Chamberlin²⁾ bemerkt, „An astronomer might be moved to hunt for the cold spot, but it has no inspiration for the geologist,“ so ist dies ein sehr einseitiger Standpunkt, den der Astronom ganz entschieden zurückweisen muß. Würde es gelingen, jenen kalten Punkt zu finden, so wäre die Frage nur teilweise gelöst. Denn der Astronom muß die Frage auch von dem Standpunkte des Physikers auffassen: Ist es möglich, daß bei einer vollkommen homogenen Verteilung von Massen im Weltraume eine ungleiche Temperatur in einzelnen Teilen herrscht? Und der Astronom als Physiker wird dann nach den Ursachen fragen, welche eine nach den Gesetzen der Wärmeleitung und Wärmestrahlung zulässige ungleichmäßige Wärmeverteilung im Weltraume ergeben. Solange wir daher über jene fernen Ätherregionen, zu denen nur unser geistiges Auge dringen kann, keine andere Kunde erhalten, als diejenige, welche uns der Durchgang des von den fernen Fixsternen herkommenden Lichtstrahles bringt, müssen wir annehmen, daß in den Jahr-
millionen

¹⁾ l. c. S. 79.

²⁾ l. c. S. 545.

des Weltbestandes selbst dann, wenn ursprünglich keine gleiche Temperatur herrschte oder wenn durch lokale Ausstrahlung, etwa durch den Zusammenstoß von Himmelskörpern, und das Entstehen neuer Welten neue Wärmequellen erstanden, sich allmählich ein Gleichgewichtszustand herstellte, welcher durch eine gleichmäßige Temperatur im ganzen Weltraume charakterisiert ist. Dies ist der Grund, warum an eine weitere Verfolgung dieser Idee nicht geschritten werden kann.

Auch der Durchgang des Sonnensystems durch einen Nebelfleck und die dadurch bedingte verminderte Erwärmung der Erde durch erhöhte Absorption der Sonnenstrahlen wurde zur Erklärung der Eiszeiten herangezogen. Man braucht nur an das Aufleuchten der Meteore in den obersten dünnsten Schichten unserer Atmosphäre zu denken, um einzusehen, daß, wie sehr auch die Schwächung der Strahlung eine Verminderung der von der Sonne gesendeten Wärme zur Folge haben würde, dennoch die durch Reibung verursachte Eigenwärme einen so hohen Grad erreichen würde, daß alles Leben auf der Erde vernichtet werden müßte.

Meech bemerkt, daß der Vorübergang der Erde bei einer fremden Sonne ¹⁾ die Kohlenfelder von Disko in Grönland zur Ablagerung gebracht haben kann. Hiegegen kann allerdings eingewendet werden, daß der Vorübergang bei einer fremden Sonne derartige Störungen in der Bewegung der Planeten hervorgerufen haben müßte, daß der Einfluß des Vorüberganges viel gewaltiger in diesen zum Ausdruck hätte kommen müssen. Allein hier ist eine gewisse Vorsicht geboten; da wir über die Bewegung der Erde und überhaupt der Planeten zur Eiszeit und vor derselben gar nichts wissen, so ist dieser Einwand nicht völlig gerechtfertigt; im Gegenteil: Ein Vorübergang in ziemlich weiter Entfernung von einer störenden Sonne, wie er gar nicht unmöglich ist, kann einen vielleicht sehr geringen direkten Einfluß durch Strahlung seitens der fremden Sonne, aber einen viel größeren indirekten Einfluß durch die Störungen in der gegenseitigen Konfiguration, in der Neigung, Exzentrizität der Bahnen u. s. w. geübt haben, und Änderungen in den astronomischen Elementen, die sich durch innere Kräfte nicht erklären lassen, können vielleicht durch von außen wirkende Kräfte entstanden sein. Wenn daher eine Veränderung in der Exzentrizität, der Neigung der Bahn in einem Umfange, wie dieselbe durch unsere Störungstheorien als ausgeschlossen bezeichnet werden muß, die Eiszeiten und ihre Schwankungen zu erklären vermöchte, so bliebe noch immer die Frage zu erwägen, ob eine derartige Konfiguration nicht eben durch eine fremde Sonne erzeugt worden sein konnte, und dann würden die Eiszeiten als erstes Denkmal einer solchen vergangenen Einwirkung zu betrachten und damit ein Anstoß zu Untersuchungen in dieser Richtung gegeben sein.

Plötzliche fremde Strahlung durch Zusammenstöße von Sonnen können ebenfalls nicht gelegnet werden. So oft zwei Sonnen zusammenstoßen, auch

¹⁾ Hierher würde auch der Durchgang des Sonnensystems durch einen planetarischen (nicht gasförmigen) Nebel zu rechnen sein.

wenn sie bereits längst erloschen und erstorben sind, ist die Grundlage zur Entstehung neuer Welten gegeben. Stoßen zwei Massen m und m_1 , welche sich mit der der Einfachheit halber als gleich angenommenen Geschwindigkeit v durch den Weltraum bewegen, aufeinander, so wird durch den Stoß eine lebendige Kraft $\frac{1}{2} (m + m_1) v^2$ entstehen. Die dadurch erzeugte Wärmemenge ist $\frac{1}{424} \cdot \frac{1}{2} (m + m_1) v^2$ Cal, wenn m , m_1 in kg und v in Metern ausgedrückt wird. Ist die mittlere spezifische Wärme der Materiale c , so werden die beiden Massen eine Temperaturerhöhung τ erfahren, so daß

$$(m + m_1) c \tau = \frac{1}{424} \cdot \frac{1}{2} (m + m_1) v^2$$

ist. Die Geschwindigkeit von stellaren Massen im Weltraume kann 60 bis 100 km in der Sekunde und auch größer angenommen werden. Nimmt man einen Mittelwert von $v = 80 km$, d. i. $80.000 m$, so würde $\tau = 80.000^2 : 2 \cdot 424 c$. Da c zwischen 0.2 bis 0.5 im Mittel 0.35 angenommen werden kann, so würde $\tau = 22$ Millionen Grade, wodurch die Massen in einen Dampfzustand übergeführt würden, von welchem aus die neue Weltbildung auszugehen hat. Die Strahlung in den Weltraum wird dabei ganz enorm, und planetarische Massen, die sich in der Nähe vorbeibewegen, können daher nicht unbeeinflusst von derselben bleiben. Wenn der Astronom diese Theorie dennoch nicht weiter verfolgt, so ist es, weil alle Anhaltspunkte für eine solche Untersuchung fehlen. In den Jahrmlionen, die seither verflossen sind, mögen sich auch in jenen Welten diejenigen Prozesse abgespielt haben, die unsere Erde hier veränderten und, erloschen für unseren Blick, entrückt unseren Beobachtungshilfsmitteln, blieben als die einzigen Reste jener Katastrophen dunkle Begleiter, die wir nur vermuten können. Aber mit diesen Hypothesen gibt es keine Erklärung und so kehrt der Geist aus jenen fernen Regionen zurück zu unserem Sonnensystem; und so wie dereinst das Leben auf der Erde völlig erlöschen wird, wenn die Sonne uns nicht mehr Licht und Wärme spenden wird, so muß es auch einstmalig gewesen sein, wenn kosmische Ursachen innerhalb dieses Bereiches veränderte Lebensbedingungen schuf.

Plötzlicher Wechsel der von der Sonne ausgestrahlten Wärmemenge wurde von Balford als Ursache der Eiszeiten angegeben. Auch Brückner¹⁾ hält diese Ursache nicht für ganz unmöglich, und E. Dubois²⁾ widmet dieser Anschauung, die er durch bekannte Tatsachen stützt, einen großen Teil seiner Untersuchungen. Da die Sonne sich im Stadium der Abkühlung der gelben Sterne befindet, und nach dem Übergange aus dem weißen Zustande in den gelben merklich weniger Wärme ausstrahlen kann, so ist anzunehmen, daß sie in der Tertiärzeit, in welcher sich das Übergangsklima, die Abkühlung der Erdoberfläche vollzog, aus den weißen in den gelben Zustand überging und, „daß sie gegenwärtig $\frac{2}{3}$ ihres Lebens als leuchtender und erwärmender Stern hinter sich und noch $\frac{2}{3}$ vor sich hat.“ Weiter gibt er als Maximum für die verflossene Dauer der Sonnenstrahlung im gelben Stadium zehn Millionen Jahre und für die Strahlung im verflossenen weißen Stadium rund doppelt so viel als die

¹⁾ Klimaschwankungen S. 315.

²⁾ l. c. S. 58.

gegenwärtige¹⁾); er meint aber, daß infolge der damit verbundenen erhöhten Verdampfung nicht die hieraus möglicherweise zu folgernde starke Temperaturerniedrigung, sondern nur eine geringere stattfand, und dieses umsomehr, als die kurzwelligen Strahlen der weißen Sonne eine stärkere Absorption erführen.

Diese ganze Theorie scheidet aber an der einfachen Überlegung, daß ein solcher Übergang aus dem weißen in den gelben Zustand sich nicht plötzlich vollzieht. Denn eine Zeit von selbst 20.000 und 50.000 Jahren selbst gegenüber den zehn Millionen Jahren, welche Dubois als Maximum angibt, die aber jedenfalls in der Entwicklungsgeschichte unserer Welt eher ein Minimum der Entwicklungszeit bedeuten, kann doch nur als ein fast plötzlicher Wechsel angesehen werden. Nur die Erklärung der Interglazialzeiten durch periodische Schwankungen²⁾ wäre nicht ganz von der Hand zu weisen; denn wo Veränderungen stattfinden, müssen dieselben nicht gerade gleichmäßig auftreten, sondern gerade jene Prozesse spielen sich im großen und ganzen am gleichförmigsten und stabilsten ab, bei denen sich um eine mittlere, gleichmäßig fortschreitende Abwicklung der Erscheinungen wellenförmige Kurven überlagern.

Periodische Änderungen in der Sonnenstrahlung können ja in geringem Maße auch gegenwärtig auftreten und es ist noch durchaus nicht abzuweisen, daß die Sonnenfleckenperiode mit der Periode der Klimaschwankungen irgendwie verknüpft ist. Woeikoff meint, daß „wenn Differenzen in der Wärmemenge, welche die Erde von der Sonne empfängt, existieren, sich solche Differenzen vor allem in der tropischen Zone zeigen müßten, weil sie mehr Wärme von der Sonne empfängt und eine größere Ausdehnung hat“³⁾. Dieser Schluß ist jedoch nicht völlig zutreffend, da wegen der Akkomodationsbreite und Anpassungsfähigkeit der Fauna und Flora in allen Klimaten mäßige Schwankungen gleich gut ertragen werden und das Verhältnis der Schwankungen größerer Epochen in historischen Zeiten (z. B. der 11jährigen Sonnenfleckenperiode oder der 35jährigen Periode) zu den Amplituden der jährlichen Schwankungen doch nur ein mäßiges ist und gerade in den Tropen mit vorherrschender Wasseroberfläche vielleicht geringer als in den mittleren Breiten. Auch Woeikoff sagt unmittelbar darauf⁴⁾, „über 75⁰/₁₀ der Tropen sind mit Wasser bedeckt und diese tropischen Meere sind in vieler Hinsicht als Regulatoren der Klimate zu bezeichnen“.

Es ist von vornherein klar, daß die Sonne, welche durch ihre Kontraktion eine beständige Quelle der Wärme bietet, und durch Ausstrahlung in den Welt-raum die erzeugte Wärme wieder verliert, sich erwärmen oder abkühlen wird, je nachdem die eine oder andere der Wärmemengen überwiegt: ist die ausgestrahlte Wärme im Überschuß, so findet Abkühlung statt, ist die durch Kontraktion gewonnene im Überschuß, so muß Erwärmung platzgreifen. Welcher der beiden Fälle eintritt, ist aber nicht sofort angebar und muß erst genauer untersucht werden.

¹⁾ l. c. S. 61.

²⁾ l. c. S. 66.

³⁾ „Die Klimate der Erde“, I. Bd. S. 304.

⁴⁾ Ibid. S. 328.

Untersuchungen dieser Art hat A. Ritter in einer Reihe von Abhandlungen¹⁾ veröffentlicht; die wichtigsten für die vorliegende Frage wesentlichen Resultate wurden von O. Biermann²⁾ in übersichtlicher Form zusammengestellt, dessen Darstellung dem folgenden zur Grundlage diene.

Wird die Sonne als ein vollkommen gasförmiger Körper von Kugelgestalt angesehen, in dessen Innerem Konvektionsströmungen stattfinden, so werden sich Gasmassen, die sich nach außen bewegen, ausdehnen, wobei die Teilchen stets die Temperatur der jeweiligen Umgebung annehmen, und diese Temperaturänderungen ohne Wärmezufuhr oder Abgabe (adiabatisch) stattfinden.

Für die vorliegenden Untersuchungen mögen vorerst die Beziehungen zwischen Druck, Volumen und Temperatur in Form des Boyle-Charles'schen Gesetzes angenommen werden. Es ist also (s. S. 173):

$$p v = R \vartheta$$

$$dQ = c_v d\vartheta + A p dv = c_p d\vartheta - A R \vartheta \frac{d\rho}{p} = \frac{1}{R} (c_v v dp + c_p p dv),$$

daher für den adiabatischen Zustand ($dQ = 0$):

$$c_p \frac{d\vartheta}{\vartheta} = A R \frac{d\rho}{p} = c_v (k - 1) \frac{d\rho}{p}; \quad k = \frac{c_p}{c_v}$$

$$c_v \frac{d\rho}{\rho} + c_p \frac{dv}{v} = 0$$

und daraus durch Integration

$$\rho v^k = \rho_0 v_0^k = C_1; \quad \vartheta^k p^{1-k} = \vartheta_0^k p_0^{1-k} = C_2; \quad \vartheta v^{k-1} = \vartheta_0 v_0^{k-1} = C_3. \quad (1)$$

Nun ist die Arbeit für eine Erhebung von der Entfernung ρ auf $\rho + d\rho$ im Innern der Gaskugel, wenn die Fallbeschleunigung daselbst G , diejenige auf der Eidoberfläche mit g bezeichnet wird,³⁾ — $(G : g) d\rho$ und ist dabei die Temperaturerniedrigung $d\vartheta$, also die zugehörige Arbeit $(c_p d\vartheta) : A$, so folgt

$$c_p d\vartheta = - A \frac{G}{g} d\rho. \quad (2)$$

Da hiebei G als veränderlich angesehen werden muß, so wird, wenn ϑ_0 die Temperatur im Mittelpunkt des Gasballes, ϑ_1 die Temperatur an der Oberfläche desselben und r der Halbmesser des Gasballes ist:

$$c_p (\vartheta_0 - \vartheta_1) = A \int_0^r \frac{G}{g} d\rho.$$

Ist die Beschleunigung der Schwere an der Oberfläche des Gasballes G_1 , so wird sich durch Ausführung des hier auftretenden Integrales

$$\int_0^r \frac{G}{g} d\rho = \alpha \frac{G_1}{g} r$$

1) Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie, „Neue Folge“, Bd. 5 bis 20.

2) „Zur Frage nach der Ursache der Eiszeiten“, Programm des Staats-Obergymnasiums Klagenfurt 1889/90.

3) Es ist das Verhältnis der Kräfte $\frac{m}{r^2} : \frac{m_e}{r_e^2} = G : g$.

ergeben, wo α eine von der Massenlagerung, dem Gesetze der Dichte nach dem Innern zu u. s. w. abhängige Konstante bedeutet. Dann wird

$$c_p (\vartheta_0 - \vartheta_1) = A \frac{G_1}{g} \alpha r. \quad (3)$$

Weiter ist im Innern und an der Oberfläche der Gaskugel:

$$\frac{d\vartheta}{d\rho} = -\frac{A}{c_p} \frac{G}{g}; \quad \left(\frac{d\vartheta}{d\rho}\right)_1 = -\frac{A}{c_p} \frac{G_1}{g} = -\frac{\vartheta_0 - \vartheta_1}{\alpha r}. \quad (4)$$

Die Gleichungen (1), (3) und (4) gelten für einen momentanen Gleichgewichtszustand des ganzen Gasballes. Für einen anderen Zustand wird:

$$c_p (\vartheta_0' - \vartheta_1') = \frac{A G_1'}{g} \alpha r'$$

und damit

$$\frac{\vartheta_0 - \vartheta_1}{\vartheta_0' - \vartheta_1'} = \frac{G_1 r}{G_1' r'}$$

oder weil

$$G_1 : G_1' = r'^2 : r^2$$

ist:

$$(\vartheta_0 - \vartheta_1) r = (\vartheta_0' - \vartheta_1') r'. \quad (5)$$

Der Unterschied der Temperaturen zwischen Mittelpunkt und Oberfläche des Gasballes wird daher umgekehrt proportional den Halbmessern desselben in den beiden Zuständen. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn in jedem Punkte die Temperatur $\vartheta' = n \vartheta$ ist, sobald $r' = (r : n)$ ist. Dann wird aber $v' = v : n^3$ und wegen $p' v' = R \vartheta' : p' = n^4 p$; also

$$\vartheta' = n \vartheta; \quad v' = v : n^3; \quad p' = n^4 p. \quad (6)$$

Substituiert man diese Ausdrücke in die Gleichungen (1), so folgt

$$p' v'^k = \frac{C_1}{n^{3k-4}}; \quad \vartheta'^k p'^{1-k} = \frac{C_2}{n^{3k-4}}; \quad \vartheta' v'^{k-1} = \frac{C_3}{n^{3k-4}} \quad (7)$$

woraus folgt, daß die neue Gaskugel sich wieder in einem adiabatischen Zustand befindet. Zwischen den auf den neuen Zustand und den ursprünglichen Zustand bezogenen Größen hat man nun aber

$$n = \frac{\vartheta'}{\vartheta} = \left(\frac{v}{v'}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{1}{4}}$$

demnach

$$p v^{\frac{4}{3}} = p' v'^{\frac{4}{3}} = C_1'; \quad \frac{\vartheta^4}{p} = \frac{\vartheta'^4}{p'} = C_2'; \quad \vartheta^3 v = \vartheta'^3 v' = C_3'. \quad (8)$$

Die Gleichungen (1) und (7) geben Beziehungen zwischen Druck, Volumen und Temperatur der verschiedenen Punkte innerhalb eines herausgegriffenen Zustandes des Gasballes; die Gleichungen (8) hingegen Beziehungen zwischen Druck, Volumen und Temperatur desselben Punktes in verschiedenen Zuständen des Gasballes.

Durch Konvektionsströme innerhalb eines Zustandes wird keine Wärme nach außen frei, weil die innerhalb des Gasballes vorgehenden Veränderungen adiabatisch vor sich gehen (wenn auf die Ausstrahlung zunächst nicht Rücksicht genommen wird). Hingegen wird durch Kontraktion Wärme frei, welche aber teilweise zur Temperaturerhöhung aufgewendet wird. Ist die durch Kontraktion erzeugte Wärme Q_+ , so ist

$$Q_+ = A \int_{v'}^v p \, dv,$$

und da bei diesem Übergange p und v durch die Gleichungen (8) verbunden sind, so ist

$$Q_+ = A \int_{v'}^v C_1' v^{-\frac{4}{3}} \, dv = -3 A C_1' v^{-\frac{1}{3}} = 3 A (C_1' : C_3'^{\frac{1}{3}}) (\vartheta' - \vartheta);$$

da aber

$$\frac{C_1'}{C_3'^{\frac{1}{3}}} = \frac{p' v'}{\vartheta'} = R$$

ist, so wird

$$Q_+ = 3(c_p - c_v)(n - 1)\vartheta.$$

Diese Wärme verteilt sich nun teilweise zur Temperaturerhöhung, teilweise zur Ausstrahlung; ist die ausgestrahlte Wärme Q_- , so ist

$$dQ_- = c_v d\vartheta + A p \, dv$$

demnach

$$A \int_{v'}^v p \, dv = Q_- - c_v \int_{\vartheta'}^{\vartheta} d\vartheta,$$

folglich

$$Q_- = Q_+ - c_v(\vartheta' - \vartheta) = (3c_p - 4c_v)(n - 1)\vartheta$$

$$\frac{Q_-}{Q_+} = \frac{3c_p - 4c_v}{3c_p - 3c_v} = \frac{k - \frac{4}{3}}{k - 1}. \quad (9)$$

Für $k = \frac{4}{3}$ würde $Q_- = 0$, d. h. die durch Kontraktion erzeugte Wärme würde völlig zur Temperaturerhöhung im Innern verbraucht. Für $k = 1.41$ jedoch wird $Q_- = 0.2 Q_+$, d. h. es würde etwa $\frac{1}{5}$ der durch Kontraktion erzeugten Wärme zur innern Temperaturerhöhung verwendet und nur $\frac{4}{5}$ derselben ausgestrahlt, so daß unter diesen Voraussetzungen die Sonne von einem kälteren in einen wärmeren Zustand übergehen würde, „so daß sie zum Schluß in einen Punkt mit unendlich hoher Temperatur zusammenschrumpfen würde“.¹⁾

Für $k = \frac{5}{3}$ würde noch $Q_- = \frac{1}{2} Q_+$.

¹⁾ Biermann, l. c. S. 16. In etwas anderer Weise leitet J. J. See (Astron. Nachrichten Bd. 169, S. 359) diese Beziehung ab. Die Arbeit beim Falle eines Teilchens m aus der Unendlichkeit in die Entfernung r ist

$$Q = - \int_{\infty}^r \frac{m}{r^2} \, dr = \frac{m}{r}; \text{ daher } \frac{Q}{r} = \frac{m}{r^2} = mg.$$

Für das Innere der Gaskugel wäre nun die durch Kontraktion erzeugte Wärme:

$$Q_+ = \int_0^a dM g r = 4\pi \int_0^a \sigma g r^3 \, dr$$

und da $dp = -\sigma g \, dr$ ist:

$$Q_+ = -4\pi \int_0^a r^3 \, dp.$$

Da an der Sonnenoberfläche p und im Zentrum $r = 0$ ist, so folgt durch partielle Integration:

$$Q_+ = -4\pi [(r^3 p) - 3 \int_0^a p r^2 \, dr] = 12\pi \int_0^a p r^2 \, dr.$$

Allerdings ziehen die Gleichungen (5) nicht notwendig die Gleichungen (6) nach sich; denn die Bedingungen (5) erfordern nur, daß für $r' = r : n$

$$(\vartheta_0' - \vartheta_1') = n (\vartheta_0 - \vartheta_1)$$

sei. Ist z. B. $\vartheta_0' = m \vartheta_0$, so müßte $\vartheta_1' = n \vartheta_1 + (m - n) \vartheta_0$ sein, doch wird, wie man sich sofort überzeugt, die neue Gaskugel nicht mehr im adiabatischen Zustande sein.

Sieht man nun aber von den Zustandsänderungen der Sonne im Innern ab und untersucht nur die von der Sonne nach außen abgegebene Wärmemenge, wobei jedoch gleich von vornherein zu berücksichtigen ist, daß nur eine mäßig dicke Oberflächenschicht als die wärmespendende Schicht angesehen werden kann, weil von einer gewissen Tiefe an infolge der erlangten Dichtigkeit die Sonnenstrahlen durch die Oberflächenschicht nicht mehr durchdringen, von ihr absorbiert werden, so erhält man, da jetzt die Oberflächentemperatur ϑ_1 durch die Ausstrahlung als sehr klein betrachtet werden muß, aus (4), wenn z die Tiefe unter der Oberfläche, also $dz = -dr$ ist:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right)_1 = \frac{\vartheta_0}{\alpha r} \quad (10)$$

und daher für genügend kleine Werte von z , wie dieselben dem gegenwärtigen Zustand der Sonne entsprechen würden, durch Integration

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{\alpha r} z.$$

Da nun für zwei Volumina v , v_0 in der Tiefe z und an der Oberfläche nach (1) oder (7):

$$\frac{v}{v_0} = \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (11)$$

ist, so folgt für die Dichteänderungen nach dem Innern

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{v_0}{v} = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{z}{\alpha r}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

oder wenn $\frac{1}{k-1} = m$ gesetzt wird

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \left(\frac{z}{\alpha r}\right)^m. \quad (12)$$

Die innere Wärme, welche das Gas entwickelt, ist

$$U = \frac{c_v}{A} \int dM \cdot g \vartheta = \frac{4\pi c_v}{A} \int_0^a \sigma g \vartheta r^2 dr$$

und da $p v = R \vartheta$ und $v \sigma g = 1$ ist, so wird

$$U = \frac{4\pi c_v}{A R} \int_0^a p r^2 dr,$$

und wegen $A R = c_p - c_v = (k-1) c_v$ endlich

$$\frac{U}{Q_+} = \frac{1}{3(k-1)} = \begin{matrix} 0.500 & \text{für } k = 1\frac{2}{3} \\ 0.813 & \text{für } k = 1.41 \end{matrix}$$

und

$$\frac{Q_-}{Q_+} = \frac{Q_+ - U}{Q_+} = \frac{3k-4}{3k-3}$$

Hieraus folgt für die Masse einer Säule vom Querschnitt gleich 1 und der Tiefe z , wenn für die Integration r als konstant angesehen wird (zweite Potenzen von z vernachlässigt werden):

$$\mu = \int_0^z \delta \cdot dz = \frac{\delta_0}{(\alpha r)^m} \frac{z^{m+1}}{m+1}.$$

Für einen neuen Zustand, in welchem der Radius $r' = (r:n)$, die Temperatur im Mittelpunkte $n\vartheta_0$, die Dichte daselbst $n^3\delta_0$ und die ausstrahlende Schicht z_1 geworden, ist:

$$\mu = \frac{\delta_0}{(\alpha r)^m} n^{m+3} \frac{z_1^{m+1}}{m+1}.$$

Unter der Voraussetzung, daß die ausstrahlende Masse m dieselbe geblieben ist, wird daher

$$n^{m+3} z_1^{m+1} = z^{m+1};$$

$$z_1 = z \cdot n^{\frac{2-3k}{k}}; \quad \frac{\vartheta_1}{\vartheta} = n^2 \frac{z_1}{z} = n^{\frac{2-k}{k}}.$$

Da nach dem Stefan'schen Gesetze die Ausstrahlungen proportional

$$s = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta}\right)^4 = n^{\frac{8-4k}{k}} \quad (13)$$

die ausstrahlenden Flächen aber in dem Verhältnis n^{-2} kleiner geworden sind, so wird das Verhältnis S der vor und nach der Kontraktion stattfindenden Gesamtstrahlungen

$$S = n^{\frac{8-6k}{k}}. \quad (13 a)$$

Da nun $k > \frac{4}{3}$ ist, so wird $S < 1$, d. h. die Ausstrahlung nach der Zustandsänderung wird kleiner, als vor derselben.

Das Resultat Biermann's ist daher: „Da die Sonne heute bereits eine große Dichtigkeit erlangt hat und die Wärme aussendende Oberflächenschicht zuversichtlich eine geringe Dicke besitzt, ist die von der Sonne jährlich ausgestrahlte Wärmemenge im Abnehmen begriffen, gleichgültig ob die mittlere Temperatur derselben noch wächst oder nicht. . . . Zu einer Zeit, als die Temperatur der Sonne bedeutend geringer, aber die Eigenwärme der Erde noch groß war, entstand auf der Erde organisches Leben; es folgte tropische Vegetation. Die Eigenwärme der Erde nahm aber ab und weil die Sonnenwärme nicht entsprechend stieg, spielte sich hierauf das Glazialphänomen in langen Zwischenräumen (auf beiden Hemisphären gleichzeitig) ab. Die Schwankungen in der Vereisung wurden durch die mit der verschiedenen Stellung der Erdachse gegenüber der Erdbahnachse verbundenen klimatischen Veränderungen hervorgebracht.¹⁾ Die Eiszeit fand ihr Ende, als die Sonnenwärme entsprechend gewachsen war, und darnach kam und kommt keine Eiszeit mehr zustande, bis bei dem allmählichen Verlöschen der Sonne endlich jene Vereisung beginnt, auf welche kein Leben mehr folgen wird.“²⁾

1) S. hierüber das 10. Kapitel.

2) l. c. S. 18.

Die Schlüsse erfordern noch eine kleine Korrektur. Innerhalb der Schicht von der Dicke z findet nämlich die Zustandsänderung nicht mehr adiabatisch statt, und es ist daher die Ableitung der Dichte δ mittels der Gleichung (6) nicht mehr gestattet.

Wird auf die ausgestrahlte Wärmemenge Rücksicht genommen, so würden die Zustandsgleichungen aus der Beziehung hervorgehen:

$$c_v d \vartheta + A p d v = d Q,$$

welche auf alle jene Schichten anzuwenden ist, in denen Ausstrahlung stattfindet. Aus dieser Gleichung folgt

$$c_p \frac{d \vartheta}{\vartheta} - (c_p - c_v) \frac{d p}{p} = \frac{d Q}{\vartheta}$$

$$c_v \frac{d p}{p} + c_p \frac{d v}{v} = \frac{R}{p v} d Q = \frac{d Q}{\vartheta}.$$

Die Integration dieser Gleichungen liefert:

$$k \log_n \vartheta - (k - 1) \log_n p = \frac{1}{c_v} \int \frac{d Q}{\vartheta} + \log_n C_2$$

$$\log_n p + k \log_n v = \frac{1}{c_v} \int \frac{d Q}{\vartheta} + \log_n C_1$$

$$\log_n \vartheta + (k - 1) \log_n v = \frac{1}{c_v} \int \frac{d Q}{\vartheta} + \log_n C_3$$

wobei in jeder der drei Gleichungen die Integrationskonstante eine andere ist. Demnach wird

$$p v^k = C_1 f(\vartheta); \quad \vartheta^k p^{1-k} = C_2 f(\vartheta); \quad \vartheta v^{k-1} = C_3 f(\vartheta) \quad (14)$$

$$f(\vartheta) = e^{\frac{1}{c_v} \int \frac{d Q}{\vartheta}}$$

Damit tritt an Stelle der Gleichungen (6):

$$\frac{v}{v_0} = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^m \left(\frac{f(\vartheta)}{f(\vartheta_0)}\right)^m; \quad \frac{\delta}{\delta_0} = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^m \left(\frac{f(\vartheta_0)}{f(\vartheta)}\right)^m. \quad (15)$$

Ist nun nach dem Stefan'schen Gesetze

$$Q = N c_v \vartheta^4,$$

wobei der Proportionalfaktor in der Form $N c_v$ angenommen wurde, so wird

$$d Q = 4 N c_v \vartheta^3 d \vartheta$$

$$\int \frac{d Q}{\vartheta} = \frac{4}{3} N c_v \vartheta^3; \quad f(\vartheta) = e^{\frac{4}{3} N \vartheta^3}$$

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^m e^{\kappa \left[1 - \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^3\right]}, \quad (16)$$

wobei $\frac{4}{3} m N \vartheta_0^3 = \kappa$ gesetzt wurde. Setzt man hier $\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{z}{\alpha r}$ ein, so wird

$$\delta = \delta_0 e^{\kappa} \frac{z^m}{(\alpha r)^m} e^{-\frac{\kappa z^3}{(\alpha r)^3}}. \quad (16a)$$

Wird hier mit Rücksicht auf die Kleinheit von z die Exponentialfunktion gleich 1 gesetzt, so wird

$$\mu = \int_0^z \delta \, d. z = \frac{\delta_0 e^x}{(\alpha r)^m} \frac{z^{m+1}}{m+1}.$$

Unter den gleichen Voraussetzungen wie früher ($r = r' n$, $\vartheta_1 = n \vartheta_0$, strahlende Schicht z_1) würde bei gleichbleibender ausstrahlender Masse (welche Voraussetzung jedoch auch durchaus nicht zutreffen muß):

$$\mu = \frac{\delta_0 e^{\alpha_1} z_1^{m+1}}{(\alpha r)^m m+1} n^{m+3}$$

folglich

$$e^x z^{m+1} = e^{\alpha_1} z_1^{m+1} n^{m+3}$$

$$z_1 = z \cdot e^{\frac{x-\alpha_1}{m+1}} n^{\frac{m+3}{m+1}}$$

und da $\alpha_1 = \frac{4}{3} m N \vartheta_1^3 = \frac{4}{3} m N n^3 \vartheta_0^3 = n^3 \alpha$ ist, so wird

$$z_1 = z e^{-\frac{(n^3-1)\alpha}{m+1}} n^{-\frac{3k-2}{k}}$$

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} = n^2 \frac{z_1}{z} = n^{\frac{2-k}{k}} e^{-\frac{(n^3-1)\alpha}{k}} n^{\frac{k-1}{k}}. \quad (17)$$

Es wird daher jetzt das Verhältnis der Strahlungen s für die Flächeneinheit und das Verhältnis S der Gesamtstrahlungen:

$$s = n^{\frac{8-4k}{k}} e^{-4(n^3-1)\alpha \frac{k-1}{k}}; \quad S = n^{\frac{8-6k}{k}} e^{-4(n^3-1)\alpha \frac{k-1}{k}}. \quad (18)$$

Da nun $n > 1$, $m > 1$ und $N \vartheta_0^3$ stets positiv ist, so ist der Exponent von e negativ, daher die weitere Wärmeausstrahlung vermindert.

Trotzdem sind die Schlüsse nicht in allen Punkten zuzugeben. Lord Kelvin hat gezeigt,¹⁾ daß die irdischen Klimate schon seit langer Zeit von der Temperatur der Erde nicht beeinflusst werden können, so daß hiebei also die Beziehungen zwischen Sonnenwärme und Eigenwärme der Erde wohl kaum eine Rolle spielen.

Würde man die Temperaturen oder auch den Wärmehalt der Erde als Funktionen der Zeit darstellen, so erhielte man eine Erdwärmekurve E , die von der Ordinatenachse mit wachsenden Abszissen rasch abnimmt und sich asymptotisch der Abszissenachse nähert. In derselben Weise würde man für die von der Sonne der Erde gependete Wärme eine Sonnenwärmekurve S nach Biermann erhalten, die, von der Nähe des Koordinatenanfanges ausgehend, erst langsamer, dann immer rascher ansteigt. Ist E_2 der Schnittpunkt der beiden Kurven, ϑ_2 dessen Abszisse, so würde für eine Zeit, für welche $\vartheta_1 < \vartheta_2$ ist, der Beginn des organischen Lebens zu verlegen sein, und zur Zeit ϑ_2 fiele das Glazialphänomen, worauf dann die Sonnenwärme anstieg. Es ist jedoch anzunehmen, daß organisches Leben erst entstand, nachdem lange vorher bereits die Erdkruste gebildet war, und da kann von einem Sinken der Oberflächentemperatur als Folge der Abkühlung der Kruste keine Rede mehr sein, so daß die Wirkung der Erdwärme völlig auszuschalten ist.

Die Sonnenstrahlung selbst hängt nun aber jedenfalls von ihrer Temperatur ab, welche in direkter Beziehung zu dem Grade ihrer Kontraktion, also ihrer Dichte steht.

¹⁾ S. Seite 18.

Untersuchungen, welche hierüber angestellt wurden, führten zu sehr verschiedenen Resultaten, je nach den der Rechnung zugrunde gelegten Voraussetzungen. So viel kann wohl jetzt als sichergestellt angesehen werden, daß die Sonne eine Gaskugel ist. Hierbei allerdings ist es schon fraglich, ob bei den großen Gasdrucken im Innern das Boyle-Charles'sche Gesetz ausreicht und nicht vielmehr das Gesetz von van der Waals zugrunde gelegt werden sollte. Sieht man zunächst hievon ab, so wird, wenn an Stelle des Volumens v das spezifische Gewicht σ durch $v \sigma g = 1$ eingeführt wird, und $Rg = S = 287 \cdot 0988$ gesetzt wird:

$$p = S \sigma \vartheta. \quad (19)$$

Eine Gassäule vom Querschnitt 1, der Höhe h und dem spezifischen Gewicht σ hat auf der Erde das Gewicht $h \sigma$; innerhalb der Sonnenmasse in den Abstand r vom Sonnenmittelpunkt wird, wenn m die Masse dieser Gaskugel vom Halbmesser r bedeutet und M die Erdmasse, R der Erdhalbmesser ist, ihr Gewicht gleich

$$h \sigma \frac{m}{r^2} : \frac{M}{R^2}.$$

Für eine Höhenabnahme $h = dr$ ist daher die Druckabnahme

$$dp = - \frac{m}{M} \frac{R^2}{r^2} \sigma dr. \quad (20)$$

Finden nun Dichten-, Druck- und Temperaturänderungen innerhalb der Sonne adiabatisch statt, so ist $\vartheta = \vartheta_0 \sigma^{k-1}$, demnach

$$d(S \sigma \vartheta) = d(S \vartheta_0 \sigma^k) = - \frac{m}{M} \frac{R^2}{r^2} \sigma dr$$

folglich

$$S \vartheta_0 k \sigma^{k-2} d\sigma = - \frac{m}{M} \frac{R^2}{r^2} dr. \quad (21)$$

Dabei drückt sich die Masse m aus durch

$$m = 4 \pi \int_0^r \sigma r^2 dr = 4 \pi \sigma_0 \int_0^r \frac{\sigma}{\sigma_0} r^2 dr, \quad (21a)$$

wobei σ_0 die Dichte im Zentrum ist. Um von den Konstanten freie Integrale zu erhalten, führt J. H. Lane¹⁾ zwei Größen μ und x durch die Bestimmungen ein:

$$r = x \sqrt{\frac{k S M \vartheta_0}{4 (k-1) R^2 \pi \sigma_0^{2-k}}}$$

$$m = 4 \pi \sigma_0 \left(\frac{k S M \vartheta_0}{4 (k-1) R^2 \pi \sigma_0^{2-k}} \right)^{3/2} \cdot \mu;$$

dann wird der Wert von μ aus (21a) und der Wert von σ aus (21) zu den beiden Gleichungen führen:

¹⁾ „On the Theoretical Temperature of the Sun, under the Hypothesis of a Gaseous Mass maintaining its Volume by its internal Heat and depending on the Laws of Gases as known to Terrestrial Experiments“ by J. Homer Lane; The American Journal of Science and Arts, II Series Vol 50, p. 57.

$$\mu = \int_0^x \frac{\sigma}{\sigma_0} x^2 dx; \quad 1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{k-1} = \int_0^x \mu \frac{dx}{x^2}. \quad (22)$$

Diese beiden Gleichungen, in denen die obere Grenze x von den Konstanten, in erster Linie von k , S , ϑ_0 abhängt, hat Lane durch sukzessive Näherungen ausgeführt, und zwar für $k = 1.4$ und für $k = 1\frac{2}{3}$. Als ersten Näherungswert σ_0 für σ nehmend, folgt für μ der Wert $\frac{1}{3} x^3$ und hiemit

$$\left. \begin{aligned} &\text{für } k = 1.4: \\ &\mu = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{12} x^5 + \frac{5}{336} x^7 - \frac{125}{54432} x^9 + \dots \\ &1 - (\sigma : \sigma_0)^{k-1} = \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{48} x^4 + \frac{5}{2016} x^6 - \frac{125}{435456} x^8 + \dots \\ &\text{für } k = 1\frac{2}{3}: \\ &\mu = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{20} x^5 + \frac{1}{240} x^7 - \frac{1}{3988} x^9 + \dots \\ &1 - (\sigma : \sigma_0)^{k-1} = \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{80} x^4 + \frac{1}{1440} x^6 - \frac{1}{31104} x^8 + \dots \end{aligned} \right\} (23)$$

Da

$$\frac{r^3}{m} = \frac{x^3}{4 \pi \sigma_0 \mu} \quad \text{und} \quad S \vartheta_0 = \frac{4(k-1) R^2 \pi \sigma_0^{3-k} r^2}{k M x^2} \quad (24)$$

ist, so wird

$$S \vartheta = \frac{4(k-1) R^2}{k} \frac{R^2}{M} \pi \frac{r^2}{x^2} \sigma_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{k-1} \quad (24 a)$$

Für $\sigma = 0$ ergeben sich hieraus die Werte x' , μ' , welche der oberen Grenze der Sonnenatmosphäre entsprechen. Diese Werte findet Lane für $k = 1.4$, $x' = 5.355$, $\mu' = 2.188$.¹⁾ Ist die Dichte der Sonne $\frac{1}{4}$ der mittleren Dichte der Erde, die letztere $5\frac{1}{2}$ angenommen, so folgt für σ_0 aus der ersten Gleichung (24): $\sigma_0 = \frac{11}{24} \frac{x'^3}{\mu'}$. Mit einem wegen der Chromosphäre um $\frac{1}{22}$ seines Wertes korrigierten Werte $x' = 5.123$ erhält Lane für die Dichte im Sonnenmittelpunkte $\sigma_0 = 28.16$.

Für $k = 1\frac{2}{3}$ erhält er $x' = 3.656$, $\mu' = 2.741$ und wieder mit dem gleicherweiser korrigierten Werte $x' = 3.490$; $\sigma_0 = 7.11$ — d. i. ein ganz wesentlicher Unterschied in der Dichtenverteilung.²⁾

Nachdem Kundt und Warburg³⁾ und neuerdings Ramsay⁴⁾ die Frage über den Wert von k neuerdings in Angriff genommen hatten, und es als wahrscheinlich bezeichneten, daß für einatomige Gase $k = 1\frac{2}{3}$, hingegen k um so kleiner wird, je komplizierter die Formel des Gases ist (z. B. für Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff, Luft 1.41; Ammoniak und Schwefelwasserstoff 1.33; Kohlensäure 1.31; Schwefelkohlenstoff 1.24; Chloroform 1.15; Aethylen 1.25; Methylchlorid 1.22; Methylacetat 1.14 u. s. w.), hatte Boltzmann für den Wert von k die Formel aufgestellt

1) l. c. S. 63.

2) A. Ritter erhielt, von anderen Voraussetzungen ausgehend, $\sigma_0 = 23$.

3) Poggendorfs Annalen. Bd. 157.

4) Philosophic. Transact. 1895.

$$k = 1 + \frac{2}{3(1 + \beta)}, \quad (25)$$

wobei β eine Funktion der molekularen Zusammensetzung ist.

T. J. J. See hatte nun die Formeln von Lane neu aufgenommen ¹⁾ und zwar nur für den Fall $k = 1\frac{2}{3}$, d. h. er setzt voraus, daß die ganze innere Sonne sich wie ein einatomiges Gas verhalte und führt unter dieser Voraussetzung die Integration der Gleichungen (22) bis zu den Gliedern mit x^{21} , beziehungsweise x^{51} (die ersten Glieder identisch mit Lane). Für die Grenze der Sonne, $\sigma = 0$, erhält er daraus:

$$x' = 3.653962, \quad \mu' = 2.709691$$

und damit, wenn die mittlere Dichte der Sonne σ_0 ist:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_1 \frac{x'^3}{\mu'} = 6.001377 \sigma_1$$

und mit dem Werte $\sigma_1 = 1.4026$ den Wert $\sigma_0 = 8.417531$, bezogen auf Wasser als Einheit. Aus der hieraus folgenden Reihe der σ kann dann auch ϑ und p aus den adiabatischen Zustandsgleichungen bestimmt werden. See gibt eine Tafel der Werte in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte der Sonne mit gewissen angenommenen Werten für den Oberflächendruck und die Oberflächentemperatur: $p = 0.03388$ Atmosphären, $\vartheta_0 = 6000$ und 12000° , womit sich im Zentrum der Sonne $p_0 = 14437000000$ Atmosphären, $\vartheta_0 = 9714000^\circ$, beziehungsweise 90178.000° ergibt. See rechnet dann noch die Gesamtwärmemenge, die in der Sonne enthalten ist, indem nach Schalen von gleicher Dichte und Temperatur geordnet wird. Die Masse einer Schale in der Entfernung x vom Mittelpunkte ist $dm = 4\pi\sigma x^2 dx$; deren Temperatur ist ϑ ; ist ihre spezifische Wärme c , so wird die in ihr aufgespeicherte Wärmemenge

$$dQ = 4\pi c \sigma x^2 \vartheta dx$$

daher die Gesamtwärme in der Sonne

$$Q = 4\pi \sigma_0 \vartheta_0 \int c \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) x^2 \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{2/3} dx.$$

c ist nun jedenfalls auch eine Funktion der Temperatur, über welche wir aber nichts aussagen können, so daß man einen Mittelwert c_0 anzunehmen gezwungen ist; dann wird

$$Q = 4\pi \sigma_0 c_0 \vartheta_0 U_1; \quad U_1 = \int \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{5/2} x^2 dx. \quad (26)$$

Wird hier für σ wieder die Reihe eingeführt, so findet sich $U_1 = 1.438226$. Für eine homogene Kugel von der mittleren Dichte σ_1 und der mittleren Temperatur ϑ_1 wäre

$$Q_0 = \frac{4}{3} \pi \sigma_1 c_0 \vartheta_1 x_1^3,$$

daher das Verhältnis

$$\frac{Q}{Q_0} = 3 \frac{\sigma_0 \vartheta_0}{\sigma_1 \vartheta_1} \frac{U_1}{x_1^3}.$$

¹⁾ „Researches on the physical constitution of the heavenly bodies“, Astronom. Nachrichten Nr. 4053, Bd. 169, S. 321.

See folgert hieraus, daß die Sonne ausreichend Wärme aufgespeichert enthält, um durch ihre bloße Ausstrahlung die Erde für die nächsten zehn Millionen Jahre mit Wärme zu versehen. Die Kontraktion liefert aber neue Wärmemengen, welche durch das Selbstpotential der Kugel (s. S. 21)

$$J = 16 \pi^2 \sigma_0^2 U; \quad U = \int_0^a \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) x dx \int_0^x \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) x^2 dx$$

bestimmt wird. ¹⁾ Die Integration liefert hier mit der von See für σ abgeleiteten Reihe für U den Wert 1·725720.

Wichtig ist jedoch noch die Berücksichtigung der Sonnenschrumpfung. Sei die Schwere an der Sonnenoberfläche G_0 , in einer gewissen Tiefe, in der Entfernung x vom Sonnenmittelpunkte G ; dann ist

$$\frac{G}{G_0} = v = \left(\frac{4 \pi \sigma_0}{x^2} \int_0^x \frac{\sigma}{\sigma_0} x^2 dx \right) : \frac{M}{x'^2} = \frac{3 \sigma_0}{\sigma_1 x'^2} \int_0^x \frac{\sigma}{\sigma_0} x^2 dx.$$

Ist o die Schrumpfung an der Oberfläche, so wird dieselbe in der Tiefe x gleich $\frac{x}{x'}$ o sein; die zugehörige Arbeit ist

$$dA = dm \cdot G_0 \frac{x}{x'} o \cdot v$$

und wenn $G_0 = ng$ gesetzt wird, wobei g die Schwerkraft an der Erdoberfläche ist, so wird

$$dA = 4 \pi n g o \cdot \frac{3 \sigma_0^2}{\sigma_1 x'^2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) x dx \int_0^x \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) x^2 dx,$$

demnach die Gesamtarbeit

$$A = 9 \frac{M n g o}{x'^5} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right)^2 U$$

und die dadurch erzeugte Wärme $W = \frac{1}{424} A$. Die zugehörige Strahlung zu 50% angenommen, ergibt sich die verfügbare Wärmemenge gleich $\frac{1}{2} W$. Da nun nach Langley's Untersuchungen die von der Sonne jährlich verlorene Wärmemenge das gleiche Quantum Wasser um 2° erhöhen kann, so ist $\frac{1}{2} W = 2 Mg$ und daraus folgt $o = 70 \cdot 9 m$. ²⁾ Dieses gäbe in 2000 Jahren 141·8 km = $\frac{1}{5000} x'$; daher würde in 10000 Jahren die Schrumpfung 0·001 x' betragen und da der scheinbare Sonnendurchmesser 1920" beträgt, so würde dies in 10000 Jahren 1"·92 und in 1,000.000 Jahren 192" gleich $\frac{1}{10}$ des Sonnendurchmessers betragen.

Daraus folgt auch, daß die größte Wärmeentwicklung nicht zur Zeit des Anfangsstadiums der Kontraktion geliefert wurde, sondern in einem späteren Zeitpunkte: Nearly all the heat is developed at a late stage of contraction, when the force of gravity is large, ³⁾ auch in Übereinstimmung mit A. Ritter und Biermann.

¹⁾ Dieses Selbstpotential liefert jedoch die gesamte, bis zu dem betrachteten Zeitpunkte durch Kontraktion entstandene Wärme.

²⁾ l. c. S. 344.

³⁾ Anmerkung auf S. 358. See hat auch für die oberen Planeten unter der Voraussetzung, daß sie sich wie einatomige Gase verhalten, Dichten und Drucke an der Oberfläche und im Mittelpunkte berechnet; die Oberflächentemperaturen sind dabei alle so niedrig (für Jupiter 62·7°, Saturn 22·7°, Uranus 12·0°, Neptun 10·2°), daß die Körper fest sein müßten.

So verdienstlich aber die Arbeit See's ist, welche die Bildung von Produkten von Reihen zu hunderten von Gliedern erforderte, so erscheint es doch fraglich, ob den Resultaten eine praktische Bedeutung zukommt, da die hier erhaltenen Drucke kaum als reell anzusehen sind. Schreibt man die Gleichung (21)

$$k r^2 \sigma^{k-2} \frac{d\sigma}{dr} = \frac{k r^2}{k-1} \frac{d(\sigma^{k-1})}{dr} = -l \int_0^r \sigma r^2 dr; \quad l = \frac{4\pi R^2}{M S \vartheta_0} = \frac{3}{R S \vartheta_0 \sigma_m}$$

und setzt versuchsweise

$$\sigma = A r^\alpha$$

so erhält man die Gleichung

$$l A^{k-1} \alpha (\alpha + 3) r^{\alpha k - \alpha + 1} = -l A r^{\alpha + 3}$$

woraus

$$\alpha = -\frac{2}{2-k}, \quad A = \left(\frac{2k(4-3k)}{(2-k)^2 l} \right)^{\frac{1}{2-k}}$$

demnach A negativ oder selbst imaginär folgt. Setzt man

$$\sigma = \sigma_0 (1 + A r^\alpha)$$

so wird ebenso

$$\sigma_0^{k-2} \left[k \alpha A r^{\alpha+1} + k \frac{k-2}{1 \cdot 2} A^2 2 \alpha r^{2\alpha+1} + \dots \right] = -l \left(\frac{1}{3} r^3 + \frac{1}{\alpha+3} A r^{\alpha+3} \dots \right)$$

$$\alpha = 2, \quad A = -\frac{l}{6k\sigma_0^{k-2}};$$

jedoch ergibt sich wegen des unendlichen Fortschreitens der Reihe die Notwendigkeit der Einführung einer Reihe für σ , für welche unmittelbar die Form

$$\sigma = \sigma_0 [1 + A_1 r^2 + A_2 r^4 + \dots]$$

ersichtlich ist. Es ist nun von Interesse zu untersuchen, inwieweit diese Resultate beeinflusst werden, wenn man an Stelle des Boyle-Charles'schen Gesetzes die Zustandsgleichung für die Gase nach van der Waals zugrunde legt, wie dies für so niedrige und hohe Drucke vielleicht geboten erscheint.

Die Gleichung

$$(p + a v^{-2})(v - b) = R \vartheta \quad \text{oder} \quad (p + a \sigma^2)(1 - b \sigma) = R \vartheta \sigma \quad (27)$$

gibt durch Differentiation

$$(1 - b \sigma) dp = R \sigma d\vartheta + [R \vartheta - 2 a \sigma (1 - b \sigma) + (p + a \sigma^2) b] d\sigma$$

oder da

$$R \vartheta + (p + a \sigma^2) b = R \vartheta \left(1 + \frac{p + a \sigma^2}{R \vartheta} b \right) = R \vartheta \left(1 + \frac{\sigma}{1 - b \sigma} b \right) = \frac{R \vartheta}{1 - b \sigma}$$

ist:

$$(1 - b \sigma) dp = R \sigma d\vartheta + \left[\frac{R \vartheta}{1 - b \sigma} - 2 a \sigma (1 - b \sigma) \right] d\sigma. \quad (28)$$

Die zu einer Zustandsänderung nötige Wärme wird

$$\begin{aligned} dQ &= c_v d\vartheta + A p dv = \\ &= c_v d\vartheta - A \left(\frac{R \vartheta \sigma}{1 - b \sigma} - a \sigma^2 \right) \frac{d\sigma}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Die Werte im Mittelpunkte haben jedoch enorme Größen (Temperaturen: 478529°, 173404°, 91483°, 78105°; Drucke: 132848290, 25307590, 32873590, 38958930 Atm.), woraus See schließt, daß die Körper nicht aus einatomigen Gasen bestehen können.

$$dQ = c_v d\vartheta - A \left(\frac{R\vartheta}{\sigma(1-b\sigma)} - a \right) d\sigma. \quad (29)$$

Führt man hier für $d\sigma$ den Wert aus (28) ein, so erhält man

$$dQ = \left\{ c_v + \frac{AR [R\vartheta - a\sigma(1-b\sigma)]}{R\vartheta - 2a\sigma(1-b\sigma)^2} \right\} d\vartheta - \frac{A [R\vartheta - a\sigma(1-b\sigma)] (1-b\sigma)}{\sigma [R\vartheta - 2a\sigma(1-b\sigma)^2]} dp.$$

Für $dp = 0$ folgt hieraus

$$c_p = c_v + AR \frac{R\vartheta - a\sigma(1-b\sigma)}{R\vartheta - 2a\sigma(1-b\sigma)^2}$$

oder wegen der Kleinheit von a

$$c_p = c_v + AR \left(1 + \frac{a\sigma}{R\vartheta} \right). \quad (30)$$

Es kann nun schon c_v veränderlich sein; die Abhängigkeit von der Temperatur kann ersetzt werden durch eine Beziehung zwischen c_v und σ^1); sei

$$c_v = c_0 (1 + \gamma\sigma) \quad (31)$$

oder, wie es sich für die folgenden Integrationen als praktischer erweist

$$c_v = \frac{c_0}{1 - \gamma\sigma} \quad (31a)$$

so wird

$$c_p = c_0 + AR \left(1 + \frac{a\sigma}{R\vartheta} + \frac{c_0\gamma\sigma}{AR} \right). \quad (30a)$$

Für den adiabatischen Zustand wäre $dQ = 0$. Wird nun aber auf Ausstrahlung Rücksicht genommen, so wird Q beizubehalten sein. Man könnte Q von der Entfernung r abhängig ansehen; denn die Ausstrahlung reicht nur bis zu einer gewissen Tiefe und es könnte die Ausstrahlung einer negativen Potenz von r proportional gesetzt werden, so daß die Ausstrahlung mit der Annäherung an das Zentrum abnimmt; dadurch würde in die Gleichungen (28), (29) noch die Unbekannte r eingeführt und man müßte eine Beziehung zwischen r und σ von vornherein hinzufügen, die jedoch erst nachträglich bekannt wird. Es genügt aber

$$Q = N c_v \vartheta^{\lambda} \sigma^{\mu}$$

anzunehmen (wobei der Proportionalitätsfaktor wieder mit $N c_v$ bezeichnet wird). λ müßte nach dem Stefan'schen Gesetze gleich 4 angenommen werden; mit Rücksicht auf das frühere Gesagte, wird man, um die Absorption durch die darüberliegenden Schichten zu berücksichtigen, auch hier $\lambda = 1$ annehmen²⁾. Eine Entscheidung über μ zu treffen, ist noch viel schwerer; die dichteren Schichten sind auch die stärker strahlenden; nimmt man darauf Rücksicht, daß die Strahlung von der Masse jeder Schicht ausgeht, so wäre Q proportional der Masse der Schicht, also $4\pi r^2 dr \sigma$, und da σ gegen das Innere zu wächst, mindestens $\mu = 1$ zu setzen. Es soll vorerst μ unbestimmt gelassen werden, also mit

$$Q = N c_v \vartheta \sigma^{\mu} \quad (32)$$

gerechnet werden. Durch logarithmische Differenziation folgt:

¹⁾ Durch die Gleichung zwischen ϑ und σ , wenn dieselbe auch zunächst nicht bekannt ist, kann jederzeit σ durch ϑ ersetzt werden.

²⁾ Die Gleichungen werden übrigens nur für diesen Fall integrierbar.

$$dQ = Q \frac{d\vartheta}{\vartheta} + \mu Q \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Wird hier Q aus (32), und dann dQ in (29) substituiert, so folgt die Differentialgleichung:

$$\frac{d\vartheta}{d\sigma} = \left\{ \frac{AR}{c_v \sigma (1 - b\sigma) (1 - N\sigma^\mu)} + \mu N \frac{\sigma^{\mu-1}}{1 - N\sigma^\mu} \right\} \vartheta - \frac{Aa}{c_v (1 - N\sigma^\mu)} \quad (33)$$

Für den adiabatischen Zustand ist $N = 0$ zu setzen.

Die Integration dieser Gleichung liefert die Beziehung zwischen ϑ und σ , worauf dann die Gleichung (28) die Beziehung zwischen p , ϑ und σ kennen lehrt; die Gleichung (21) führt dann zur Bestimmung der Werte von p , ϑ , σ in einer gewissen Entfernung r vom Mittelpunkt.

Die Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx} = Xy - X_1,$$

deren Integral bekanntlich

$$y = Ce^J + J_1; \quad J = \int X dx; \quad J_1 = -e^J \int X_1 e^{-J} dx \quad (34)$$

ist. In denjenigen Fällen, in denen sich die Quadraturen nicht ausführen lassen, kann man leicht allgemeine Reihenentwicklungen ableiten. Sei $X = M X_2$ so wird man zu unterscheiden haben, ob $M \geq 1$ ist (für $M = 1$ werden die Reihen unbrauchbar).

1) $M > 1$; Setzt man¹⁾

$$e^{-J} = z; \quad dz = -e^{-J} X dx$$

so wird

$$J_1 = e^J \int \frac{X_1}{X} dz = e^J \left[z \frac{X_1}{X} - \int z \frac{d}{dx} \left(\frac{X_1}{X} \right) dx \right] = \frac{X_1}{X} - e^J \int \frac{d}{dx} \left(\frac{X_1}{X} \right) e^{-J} dx.$$

Da das zweite Integral dieselbe Form hat, so wird

$$J_1 = \frac{X_1}{M X_2} + \frac{1}{M^2} \frac{1}{X_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{X_1}{X_2} \right) + \frac{1}{M^3} \frac{1}{X_2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{X_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{X_1}{X_2} \right) \right] + \dots \quad (34a)$$

2) $M < 1$; Setzt man

$$\int X_1 dx = U$$

so wird

$$J_1 = -e^J \int e^{-J} dU = -e^J [e^{-J} U + \int U e^{-J} dJ] = -U - e^J \int (UX) e^{-J} dx.$$

Da das zweite Integral wieder dieselbe Form hat, so wird jetzt

$$\int X_1 dx = U; \quad \int UX dx = U_1; \quad \int U_1 X dx = U_2 \dots \dots \quad (34b)$$

$$J_1 = - (U + U_1 + U_2 \dots).$$

Wie man sieht, ist U_i von der Ordnung M^i . Sei nun

$$X_1 = H (1 + hx + h_1 x^\mu); \quad X = \frac{K}{x} (1 + kx + k_1 x^\mu); \quad K < 1 \quad (35)$$

und h, h_1, k, k_1 sehr kleine Größen, deren Produkte und zweite Potenzen zu vernachlässigen sind, so wird, wie man leicht findet:

$$U = Hx \left(1 + \frac{1}{2} hx + \frac{1}{\mu + 1} h_1 x^\mu \right)$$

$$U_i = HK^i x \left[1 + (\alpha_i k + \beta_i h) x + (\gamma_i k_1 + \delta_i h_1) x^\mu \right].$$

¹⁾ Die Integrationskonstanten sind Null, da J_1 mit X_1 verschwindet.

Benützt man diesen Wert von U_i zur Bestimmung von U_{i+1} , so folgt

$$U_{i+1} = H K^{i+1} x \left[1 + \frac{1}{2} (\alpha_i k + \beta_i h + k) x + \frac{1}{\mu + 1} (\gamma_i k_1 + \delta_i h_1 + k_1) x^\mu \right]$$

woraus sich leicht ergibt:

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{1}{2} (\alpha_i + 1); \quad \alpha_0 = 0; \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}; \quad \alpha_2 = \frac{3}{4}; \quad \alpha_3 = \frac{7}{8} \dots \\ \beta_{i+1} &= \frac{1}{2} \beta_i; \quad \beta_0 = \frac{1}{2}; \quad \beta_1 = \frac{1}{4}; \quad \beta_2 = \frac{1}{8}; \quad \beta_3 = \frac{1}{16} \dots \\ \gamma_{i+1} &= \frac{\gamma_i + 1}{\mu + 1}; \quad \gamma_0 = 0; \quad \gamma_1 = \frac{1}{\mu + 1}; \quad \gamma_2 = \frac{\mu + 2}{(\mu + 1)^2}; \dots \\ \delta_{i+1} &= \frac{\delta_i}{\mu + 1}; \quad \delta_0 = \frac{1}{\mu + 1}; \quad \delta_1 = \frac{1}{(\mu + 1)^2}; \quad \delta_2 = \frac{1}{(\mu + 1)^3}; \dots \\ \alpha_i &= \frac{2^i - 1}{2^i}; \quad \beta_i = \frac{1}{2^{i+1}}; \end{aligned}$$

$$\gamma_i = \frac{(\mu + 1)^i - 1}{\mu (\mu + 1)^i} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu (\mu + 1)^i}; \quad \delta_i = \frac{1}{(\mu + 1)^{i+1}}$$

$$\Sigma U_i = H x \left\{ \frac{1}{1 - K} + \frac{h x}{2 - K} + \frac{K k x}{(1 - K)(2 - K)} + \frac{h_1 x^\mu}{\mu + 1 - K} + \frac{K k_1 x^\mu}{(1 - K)(\mu + 1 - K)} \right\}. \quad (35 a)$$

Ist $k = h + l$, $k_1 = h_1 + l_1$, so wird noch

$$J_1 = - H x \left\{ \frac{1}{1 - K} + \frac{(h + K l) x}{(1 - K)(2 - K)} + \frac{(h_1 + K l_1) x^\mu}{(1 - K)(\mu + 1 - K)} \right\}. \quad (35 b)$$

Hier ist

$$X = \frac{f(1 - \gamma \sigma)}{\sigma(1 - b \sigma)(1 - N \sigma^\mu)} + \mu N \frac{\sigma^{\mu-1}}{1 - N \sigma^\mu}; \quad X_1 = \frac{g(1 - \gamma \sigma)}{(1 - N \sigma^\mu)}$$

oder zur Berechnung der Ergänzungsglieder in J_1 :

$$\begin{aligned} X &= \frac{f}{\sigma} \left(1 - \gamma \sigma + b \sigma + N \sigma^\mu + \frac{\mu}{f} N \sigma^\mu \right); \quad X_1 = g(1 - \gamma \sigma + N \sigma^\mu) \\ H &= g; \quad h = -\gamma; \quad h_1 = +N \\ K &= f; \quad l = +b; \quad l_1 = +\frac{\mu N}{f} \end{aligned}$$

wobei

$$\frac{A R}{c_0} = f; \quad \frac{A a}{c_0} = g$$

gesetzt ist. Das Integral J läßt sich aber für jedes μ durch Partialbruchzerlegung in geschlossener Form angeben. Es ist für:

1. $\mu = 0$, wenn $f = f_0(1 - N)$, $g = g_0(1 - N)$ gesetzt wird:

$$J = f_0 \int \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{b - \gamma}{1 - b \sigma} \right) d\sigma; \quad e^J = \left[\frac{\sigma}{(1 - b \sigma)^{1 - \frac{1}{b}}} \right]^{f_0} \quad (36)$$

$$J_1 = -g_0 \sigma \left[\frac{1}{1 - f_0} + \frac{(f_0 b - \gamma) \sigma}{(1 - f_0)(2 - f_0)} \right].$$

Dieses sind die Formeln für den adiabatischen Zustand, wobei $N = 0$, also $f_0 = f$, $g_0 = g$ zu setzen ist.

2. $\mu = 1$:

$$X = \frac{f}{\sigma} + \frac{f(\gamma - b)}{N - b} \frac{b}{1 - b\sigma} + \left(1 + f \frac{N - \gamma}{N - b}\right) \frac{N}{1 - N\sigma}$$

$$e^J = \frac{\sigma^f}{(1 - b\sigma)^f \frac{\gamma - b}{N - b} (1 - N\sigma)^{1+f} \frac{N - \gamma}{N - b}}$$

3. $\mu = 2$:

$$X = \frac{f}{\sigma} + \frac{f(\gamma - b)}{n^2 - b^2} \frac{b^2}{1 - b\sigma} + \left(1 + f \frac{n - \gamma}{n - b}\right) \frac{n}{1 - n\sigma} - \left(1 + f \frac{n + \gamma}{n + b}\right) \frac{n}{1 + n\sigma}$$

$$e^J = \frac{\sigma^f}{(1 - b\sigma)^f \frac{\gamma - b}{n^2 - b^2} (1 - n\sigma)^{1+f} \frac{n - \gamma}{n - b} (1 + n\sigma)^{1+f} \frac{n + \gamma}{n + b}}; \quad n^2 = N$$

4. $\mu = -1$:

$$X = \frac{1}{\sigma} + \frac{f(b - \gamma)}{1 + Nb} \frac{1}{1 - b\sigma} - \left[1 - f \frac{1 + N\gamma}{1 + Nb}\right] \frac{1}{\sigma - N}$$

$$e^J = \frac{\sigma}{\sigma - N} \cdot \frac{(\sigma - N)^{f \frac{1 + N\gamma}{1 + Nb}}}{(1 - b\sigma)^f \frac{b - \gamma}{b(1 + Nb)}}$$

5. $\mu = -2$:

$$X = \frac{2}{\sigma} + \frac{f(b - \gamma)}{1 - b^2 n^2} \frac{1}{1 - b\sigma} - \left[1 - f \frac{1 - n\gamma}{1 - nb}\right] \frac{1}{\sigma - n} - \left[1 - f \frac{1 + n\gamma}{1 + nb}\right] \frac{1}{\sigma + n}$$

$$e^J = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - N} \cdot \frac{(\sigma - n)^f \frac{1 - n\gamma}{1 - nb} (\sigma + n)^f \frac{1 + n\gamma}{1 + nb}}{(1 - b\sigma)^f \frac{b - \gamma}{b(1 - b^2 n^2)}}; \quad n^2 = N.$$

Will man, so wie die Ergänzungsglieder, auch e^J allgemein mit Rücksicht auf die ersten Potenzen der kleinen Größen a, b, γ, N entwickeln, so folgt

$$e^J = \sigma^f \left[1 + f(b - \gamma)\sigma + N\sigma^\mu \left(1 + \frac{f}{\mu}\right)\right], \quad (37)$$

welche Formel für $\mu = 0$ unbrauchbar wird. Vergleicht man aber diesen Wert mit (36), so sieht man, daß er auch für diesen Fall anwendbar ist, wenn nur in (37) wie auch in (37 a) $N = 0$, und f_0, g_0 an Stelle von f, g verwendet werden. Die Zusatzglieder aus X_1 werden:

$$J_1 = -g\sigma \left[\frac{1}{1 - f} + \frac{\sigma(bf - \gamma)}{(1 - f)(2 - f)} + \frac{N(1 + \mu)\sigma^\mu}{(1 - f)(\mu + 1 - f)} \right] \quad (37 a)$$

$$\mathfrak{D} = C e^J + J_1.$$

J_1 kann man ausreichend genau $-\frac{g\sigma}{1 - f}$ setzen, da g von der Ordnung a ist.

Führt man in (28) den Wert für $d\mathfrak{D}$ ein, so wird:

$$(1 - b\sigma) \frac{dp}{d\sigma} = R\mathfrak{D} \left[\frac{f(1 - \gamma\sigma)}{(1 - b\sigma)(1 - N\sigma^\mu)} + \frac{1}{1 - b\sigma} + \frac{\mu N\sigma^\mu}{1 - N\sigma^\mu} \right] -$$

$$- \left[2(1 - b\sigma) + \frac{f(1 - \gamma\sigma)}{1 - N\sigma^\mu} \right] a\sigma.$$

Diese Gleichung läßt sich überhaupt nur durch Näherungen integrieren; führt man daher sofort für ϑ seinen Wert aus (37), (37 a) ein, und berücksichtigt, daß $Rg = af$ ist, so erhält man:

$$\frac{d p}{d \sigma} = R C (1+f) \sigma' + R C \sigma' \left[\{ (1+f)^2 b - f(f+2) \gamma \} \sigma + \left(1 + \frac{f}{\mu} \right) (\mu + f + 1) N \sigma^\mu \right] - \frac{2 a \sigma}{1-f} \tag{38}$$

$$p = R C \sigma'^{f+1} \left\{ 1 + \left(\frac{(1+f)^2 b - f \gamma}{2+f} \right) \sigma + \left(1 + \frac{f}{\mu} \right) N \sigma^\mu - \frac{g \sigma^{1-f}}{C f (1-f)} \right\}$$

$$\vartheta = C \sigma' \left\{ 1 + f (b - \gamma) \sigma + \left(1 + \frac{f}{\mu} \right) N \sigma^\mu - \frac{g \sigma^{1-f}}{C (1-f)} \right\} \tag{39}$$

Dividiert man ϑ'^{f+1} durch p' , so folgt noch:

$$\frac{\vartheta'^{f+1}}{p'} = \frac{C}{R'} \left\{ 1 + f [(1+f) b - f \gamma] \sigma + \left(1 + \frac{f}{\mu} \right) N \sigma^\mu + \frac{g f \sigma^{1-f}}{C (1-f)} \right\},$$

welche Gleichungen für $N=0$ an Stelle der Gleichungen (1) treten. Da f sehr nahe gleich $k-1$ ist, so folgt daraus, daß abgesehen von Zusatzgliedern von der Ordnung der a, b, N die Dichteverteilung nahe dieselbe sein wird.

Will man nun σ in eine Potenzreihe entwickeln, so kann dieselbe sofort in der Form

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x^4 + \dots)$$

vorausgesetzt werden; es wird dann einerseits

$$\int_0^x \sigma x^2 dx = \sigma_0 x^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \sigma_1 x^2 + \frac{1}{7} \sigma_2 x^4 + \dots \right)$$

und

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \frac{d p}{d \sigma} = R C (1+f) \sigma'^{f-1} \left\{ 1 + \kappa_1 \sigma + \kappa_2 \sigma^\mu + \kappa_3 \sigma^{1-f} \right\}$$

$$x^2 \frac{d \sigma}{d x} = \sigma_0 x^3 (2 \sigma_1 + 4 \sigma_2 x^2 + \dots);$$

und die Gleichung

$$x^2 \psi(\sigma) \frac{d \sigma}{d x} = - \frac{4 \pi a^2}{M} \int \sigma x^2 dx$$

führt sofort zur Bestimmung der Koeffizienten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots$ wobei auch die Koeffizienten $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ berücksichtigt werden können.¹⁾

Diese Ableitungen setzen jedoch voraus, daß die Temperatur der Sonne jeden noch so hohen Wert annehmen könne, so daß die ganze Masse als ein Gas von derjenigen Temperatur angesehen werden kann, welche ihr durch den Prozeß, der die Vergasung bestimmte (Zusammenstoß), erteilt wurde. Dem ist nun nicht so; es war gefunden worden, daß bei dem Zusammenstoße zweier Himmelskörper sich je nach der Geschwindigkeit eine Temperatur entwickeln kann, die über 20 Millionen Grade steigen kann. Ein Teil der entwickelten

¹⁾ Durch Differentiation des obigen Ausdruckes folgt die Differentialgleichung:

$$\psi(\sigma) \frac{d^2 \sigma}{d x^2} + \psi'(\sigma) \left(\frac{d \sigma}{d x} \right)^2 + \frac{2}{x} \psi(\sigma) \frac{d \sigma}{d x} = l \sigma,$$

die aber für die hier auftretende Funktion $\psi(\sigma)$ nicht in geschlossener Form lösbar ist.

Wärme wird aber sofort zur Vergasung verwendet; ist c die spezifische Wärme der Materialien im festen, c' im flüssigen Zustande, ϑ_s die Schmelztemperatur, ϑ_v die Verdampfungstemperatur, S die Schmelzwärme, V die Verdampfungswärme, so ist die zur Verdampfung nötige Wärmemenge für jedes Kilogramm

$$c\vartheta_s + S + c'(\vartheta_v - \vartheta_s) + V,$$

daher mit $c = 0.2$, $c' = 0.5$, $\vartheta_s = 1000^\circ$, $\vartheta_v = 5000^\circ$, $S = 50$ Cal., $V = 150$ Cal. etwa 2400 Cal; weit größer noch ist die zur Ausdehnung verwendete Wärmemenge

$$- A \int p \, dv,$$

welche je nach dem Volumen, bis zu welchem sich der Gasball ausdehnte, sehr beträchtlich werden kann. Es kann also angenommen werden, daß die Temperatur, welche der Gasball dabei annimmt, etwa $1,000.000^\circ$ C, oder doch wenigstens von dieser Größenordnung — vielleicht $2,000.000^\circ$ C wäre.

Bei dem weiteren Abkühlen wird sich noch lange vor der Verfestigung im Innern eine Kugel abheben, innerhalb deren nicht mehr die Gesetze der Gase angewendet werden können. Es entspricht dies der Voraussetzung, daß sich die Masse in einem dem flüssigen ähnlichen Zustande befindet, bei welchem die Dichte mit dem weiteren Drucke nicht mehr nach dem für die Gase gültigen Gesetze wächst. Ob hier die Masse noch sonstige Eigenschaften der Gase zeigt, ist uns unbekannt; die kritische Temperatur ist jedenfalls weit überschritten, aber es herrschen auch Drucke, die herzustellen uns unmöglich ist — vielleicht gibt es für diese Drucke überhaupt keine kritische Temperatur, oder besser gesagt, es kann sein, daß mit steigender Temperatur die Drucke, welche zur Verflüssigung nötig sind, außerordentlich rasch wachsen, daß es aber doch stets einen, aber für steigende Temperaturen unverhältnismäßig stärkeren, mit unseren Hilfsmitteln nicht herstellbaren Druck gibt, der noch die Verflüssigung bewirkt. Möglicherweise aber handelt es sich um eine Modifikation des gasförmigen Zustandes, einen Übergang in einen flüssigen, bei welchem noch der gasförmige Zustand für das Auge — wenn dieses denselben sehen würde — vorhanden ist ohne daß dabei die Expansivkraft wachsen und ohne daß das Gas weiter zusammengedrückt werden könnte, einen Zustand, den man den latent-flüssigen nennen könnte.

Die ganze Masse teilt sich also in zwei Teile; an der Grenze, d. i. der „Basis“ B der Gashülle herrsche der Druck p_0 , und es seien die Temperatur ϑ_0 , die Dichte σ_0 ; der innere Teil, vom Halbmesser A sei im latent-flüssigen Zustande, und die Temperatur im Mittelpunkte Θ , nimmt man an, daß in diesem inneren Bereiche die Temperatur von außen nach innen nach dem Gesetze, welches der Wärmeleitung entspricht, zunimmt, so wird

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Theta \Phi(A - z)$$

wobei z die Tiefe des betrachteten Punktes unter der Basis bedeutet. Die Dunsthülle ist gegenüber dem Kern von einer relativ geringen Höhe¹⁾ und man kann annehmen, daß die Anziehungskraft der Dunsthülle gegenüber derjenigen des Kernes vernachlässigt werden kann. Dann kann man für ein Teilchen in

¹⁾ Der Kern wird für die Sonne die glühende Kugel, die Hülle ist die Photosphäre, Chromosphäre und Corona.

der Entfernung x vom Mittelpunkte (Höhe y über der Basis: $x = A + y$) in welcher p, σ, ϑ , Druck, Dichte und absolute Temperatur sind

$$dp = -\sigma \frac{A^2}{x^2} dx$$

setzen. Substituiert man hier für dp seinen Wert aus (38) und dividiert durch σ , so folgt:

$$\left\{ RC (1+f) \sigma^{f-1} + RC \sigma^f [(1+f)^2 b - f(f+2)\gamma] + \left(1 + \frac{f}{\mu}\right) (\mu + f + 1) N \sigma^{\mu-1} - \frac{2a}{1-f} \right\} d\sigma = -\frac{A^2}{x^2} dx$$

und integriert:

$$RC \frac{1+f}{f} \sigma^f + RC \sigma^f \left\{ \left[(1+f) b - \frac{f(f+2)}{f+1} \gamma \right] \sigma + \left(1 + \frac{f+1}{\mu}\right) N \sigma^\mu \right\} - \frac{2a\sigma}{1-f} = \frac{A^2}{x} + \mathfrak{C}.$$

Da nun für $x = A$, $\sigma = \sigma_0$ wird, so hat man zur Bestimmung von \mathfrak{C} :

$$RC \frac{1+f}{f} \sigma_0^f + RC \sigma_0^f \left\{ \left[(1+f) b - \frac{f(f+2)}{f+1} \gamma \right] \sigma_0 + \left(1 + \frac{f+1}{\mu}\right) N \sigma_0^\mu \right\} - \frac{2a\sigma_0}{1-f} = A + \mathfrak{C}$$

und durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen, wegen $x - A = y$

$$\frac{Ay}{x} = RC \frac{1+f}{f} \sigma_0^f \left[1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^f \right] + RC \sigma_0^f \left\{ \left[(1+f) b - \frac{f(f+2)}{f+1} \gamma \right] \sigma_0 \left[1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{f+1} \right] + \left(1 + \frac{f+1}{\mu}\right) N \sigma_0^\mu \left[1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{f+\mu} \right] \right\} - 2a \frac{\sigma_0}{1-f} \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_0}\right).$$

Nun ist aber nach (39):

$$C \sigma_0^f = \vartheta_0 \left\{ 1 - f(b - \gamma) \sigma_0 - \left(1 + \frac{f}{\mu}\right) N \sigma_0^\mu + \frac{g \sigma_0}{\vartheta_0 (1-f)} \right\}$$

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^f \left\{ 1 - f(b - \gamma) (\sigma_0 - \sigma) - \left(1 + \frac{f}{\mu}\right) N (\sigma_0^\mu - \sigma^\mu) + \frac{g}{1-f} \left(\frac{\sigma_0}{\vartheta_0} - \frac{\sigma}{\vartheta}\right) \right\} \quad (39 a)$$

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^f = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \left\{ 1 + f(b - \gamma) (\sigma_0 - \sigma) + \left(1 + \frac{f}{\mu}\right) N \sigma_0^\mu \left[1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^\mu \right] - \frac{g}{1-f} \left(\frac{\sigma_0}{\vartheta_0} - \frac{\sigma}{\vartheta}\right) \right\}.$$

In den mit b, γ, g, N multiplizierten Gliedern kann nun in erster Näherung gesetzt werden:

$$y = R \frac{1+f}{f} \vartheta_0 \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right) \quad \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{\frac{1}{f}}$$

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = 1 - \frac{yf}{R \vartheta_0 (1+f)} \quad 1 - \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{1}{f} \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{y}{R \vartheta_0 (1+f)} \quad \frac{\vartheta \sigma}{\vartheta_0 \sigma_0} = 1 - \frac{y}{R \vartheta_0}$$

$$\frac{\vartheta \sigma^\mu}{\vartheta_0 \sigma_0^\mu} = 1 - \frac{y(\mu+f)}{R \vartheta_0 (1+f)};$$

damit wird nach einigen leichten Reduktionen, wenn in dem Koeffizienten von y noch $x = A$ gesetzt wird: ¹⁾

$$y = R (\vartheta_0 - \vartheta) \left\{ \frac{1+f}{f} + \frac{\gamma \sigma_0}{f} - \frac{N(\mu+f)}{f^2} \sigma_0^\mu - \frac{g \sigma_0}{f^2 \vartheta_0} \right\}. \quad (40)$$

Schreibt man diese Formel:

$$y = R \vartheta_0 \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right) \frac{1+f}{f} \left[1 + \frac{\gamma \sigma_0}{1+f} - \frac{N(\mu+f)}{f(1+f)} \sigma_0^\mu - \frac{g \sigma_0}{f(1+f) \vartheta_0} \right]$$

und substituiert den hieraus folgenden Wert von ϑ in die aus (39 a) folgende Gleichung

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)^{\frac{1}{f}} \left\{ 1 + (b - \gamma) \sigma_0 \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_0} \right) + \frac{\mu+f}{\mu f} N \sigma_0^\mu \left[1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^\mu \right] - \frac{g}{f(1+f)} \frac{\sigma_0}{\vartheta_0} \left(1 - \frac{\sigma \vartheta_0}{\sigma_0 \vartheta} \right) \right\}$$

so erhält man nach entsprechender Reduktion

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{y}{R \vartheta_0 (1+f)} \left[1 - \left(b - \frac{f}{1+f} \gamma \right) \sigma_0 - \frac{\mu+f}{1+f} N \sigma_0^\mu + \frac{2+f g \sigma_0}{1+f f \vartheta_0} \right] \quad (41)$$

Wäre die Ausstrahlung beträchtlich, wie dies für die Sonne der Fall ist, so wird es allerdings fraglich, ob N von derselben Größenordnung ist, wie b , g , γ ; immerhin geben diese Formeln wenigstens genähert den Einfluß der Ausstrahlung. Je größer N und μ desto kleiner wird der in (40) und (41) rechts stehende Klammerausdruck; mit wachsender Ausstrahlung wird daher der zu einem bestimmten Werte von $\vartheta_0 - \vartheta$ gehörige Wert von y kleiner, die Temperaturabnahme mit der Höhe ist stärker, trotzdem die Ausstrahlung vorwiegend von den unteren, dichteren und heißeren Teilen ausgeht; dementsprechend ist auch, wie auch aus Formel (41) folgt, das spezifische Gewicht in einer gewissen Höhe größer, als ohne Ausstrahlung.

Die von der ganzen Hülle ausgestrahlte Wärmemenge erhält man, indem man in den Ausdruck

$$dQ = Q \frac{d\vartheta}{\vartheta} + \mu Q \frac{d\sigma}{\sigma}$$

für $d\vartheta$ und $d\sigma$ ihre Werte einführt und nach σ von 0 (obere Grenze der Hülle) bis σ_0 (Basis derselben) integriert. Man erhält, wenn man nur die Ausstrahlung berücksichtigt, also $b = \gamma = g = 0$ setzt, aus (32) und (33):

$$\begin{aligned} dQ &= N c_v \vartheta \sigma^\mu \left\{ \frac{f}{\sigma(1-N\sigma^\mu)} + \frac{\mu N \sigma^{\mu-1}}{1+N\sigma^\mu} + \frac{\mu}{\sigma} \right\} d\sigma \\ &= C N c_v \sigma^{\mu+f-1} \left[1 + \frac{f+\mu}{\mu} N \sigma^\mu \right] \frac{f+\mu}{1-N\sigma^\mu} d\sigma \\ &= C N c_v \sigma^{\mu+f-1} (f+\mu) \left[1 + \frac{f+2\mu}{\mu} N \sigma^\mu \right] d\sigma, \end{aligned}$$

und daher integriert

$$Q = C N c_v \sigma^{\mu+f} \left[1 + \frac{f+\mu}{\mu} N \sigma^\mu \right]. \quad (42)$$

¹⁾ Die Konstante b aus dem van der Waals'schen Gesetze fällt hier heraus.

Für $\mu = 0$ würde

$$dQ = Q \frac{f_0}{\sigma} d\sigma = CNc_v f_0 \sigma^{\mu-1} d\sigma \quad (42 a)$$

$$Q = CNc_v \sigma^{\mu}.$$

Es folgt aber auch hieraus, daß selbst für $\mu = 0$ und in noch viel stärkerem Maße, wenn man dem μ einen positiven Wert, wie erwähnt mindestens 1, beilegt, daß die Gesamtausstrahlung mit wachsender Dichte wächst, gleichgültig, ob dabei die Sonnentemperatur zu- oder abnimmt und daß, so lange überhaupt die Kontraktion der Sonne anhält, die ausgestrahlte Wärmemenge zunimmt. Dieses Resultat wird auch nicht geändert, wenn man die Teile des Sonnenkernes, an welche die Hülle grenzt, also die eigentliche Sonnenoberfläche zur strahlenden Schicht mitrechnet; in der Tat werden für diese Betrachtungen die Sonnenoberfläche mit der angrenzenden Schicht der Photosphäre als ein zusammenhängendes Kontinuum aufzufassen sein. Doch kann die Zunahme der Ausstrahlung nicht unbegrenzt andauern; eine Grenze für das Wachstum derselben ist in der zunehmenden Verfestigung des Sonnenkörpers gelegen, wobei die Tiefe der strahlenden Schicht abnehmen muß; und wenn auch die Dichte nach dem Inneren zu immer mehr und mehr zunimmt, so wird die Grenzfläche, von der aus noch Ausstrahlung stattfindet, schließlich eine konstante Dichte erhalten, womit Q einen maximalen Grenzwert erhält. Im weiteren schließlichen Endstadium, wenn die Strahlung nicht mehr von der erkalteten Kruste aber auch nicht direkt von dem Sonneninneren ausgehen wird, für welche ja nicht mehr die Gesetze der Gase anzuwenden sind, wird die Strahlung von der durch Leitung aus dem Sonneninneren erwärmten Hülle stattfinden, daher immer schwächer werden müssen, bis die Sonne als Wärmequelle versiegen muß. Doch bleibt auch hier der Einfluß auf die Klimate der Erde aus dem bereits angeführten Grunde (s. S. 211), daß die innere Erdwärme völlig auszuschalten ist, aufrecht, und es kann daher die von Biermann angegebene Ursache für die Eiszeiten nicht als die maßgebende angesehen werden.

IX. Kapitel.

Astronomische Ursachen.

b) Die Verteilung der Wärme auf der Erdoberfläche.

Die Erwärmung der Erdoberfläche hängt im wesentlichen von der Stärke der von der Sonne gesendeten Wärme ab. Dieselbe ist aber veränderlich und die nächste Aufgabe ist daher die Bestimmung der Wärmemenge, welche ein Punkt im Laufe einer gewissen Zeit von der Sonne erhält, und sodann derjenigen Wärmemenge, welche größere Teile der Erdoberfläche in verschiedenen Zeiträumen erhalten.

Im allgemeinen nun hat man allerdings die Wärmemengen zu vergleichen, welche die Horizonte, d. i. horizontale Flächen in den verschiedenen Punkten erhalten; unter Umständen kann aber auch die Frage in Betracht kommen, den Einfluß zu ermitteln, oder doch abzuschätzen, welcher die Neigung einer Fläche gegen den Horizont auf die Erwärmung hat und daher soll die Aufgabe von diesem allgemeineren Standpunkte betrachtet werden.

Es falle ein Strahl gegen eine um i gegen den Horizont geneigte Fläche auf, für welche die Flächennormale das Azimut a habe. Ist Z das Zenit, ZS die Südrichtung, N der Treffpunkt der Flächennormale, so ist $ZN = i$, $NZS = a$. Ein Strahl der in der Richtung von Σ in der Zenitdistanz Z und im Azimut A gegen den Punkt kommt, schließt mit der Flächennormale den Winkel $N\Sigma = J$ ein, so daß

$$\begin{aligned} \cos J &= \cos Z \cos i + \sin Z \sin i \cos (A - a) = \\ &= \cos Z \cos i + \sin Z \cos A \sin i \cos a + \sin Z \sin A \sin i \sin a. \end{aligned} \quad (1)$$

Ist nun die Richtung von Σ durch Deklination δ und Stundenwinkel t gegeben, so kann man Z , A durch dieselben ausdrücken, und es folgt wenn φ die geographische Breite des Ortes ist:

$$\begin{aligned} \cos J &= \cos i (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t) \\ &+ \sin i \cos a (-\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t) \\ &+ \sin i \sin a (\cos \delta \sin t). \end{aligned} \quad (2)$$

Sei Σ die Sonne und fallen Sonnenstrahlen auf eine horizontale Ebene ($i = 0$; $J = Z$) so ist die in diesem Momente stattfindende Insolation $m_0 \cos J$, wenn m_0 die pro Minute von einem cm^2 der Erdoberfläche erhaltene Wärme-

menge, die Solarkonstante¹⁾ ist. Da aber der Strahl in der Atmosphäre eine Schwächung erfährt, so ist, wenn $K_{h,z}$ der Schwächungskoeffizient für die Zenitdistanz z ist, die auffallende Lichtmenge $K_{h,z} m_0 \cos J$. Setzt man zunächst $K_{h,z} = 1$, so wird die in der Zeit dt auffallende Lichtmenge $m_0 \cos J dt$. Die im Verlaufe eines Tages (des Tagebogens von Σ) auffallende Lichtmenge erhält man durch Integration nach t zwischen den Grenzen des Tagebogens, welche bestimmt sind durch

$$\cos t_0 = -\tan \varphi \tan \delta. \quad (3)$$

Die Integration ist daher verschieden auszuführen für Punkte, für welche Σ zirkumpolar ist, für solche, für welche Σ auf- und untergeht, und für welche Σ stets unter dem Horizonte bleibt.

1) Von $\varphi = 90^\circ$ bis $\varphi = 90^\circ - \delta$ ist nach t zwischen $-\pi$ und $+\pi$ zu integrieren, und man erhält

$$m_1 = 2 \pi m_0 \sin \delta \sin \varphi. \quad (4)$$

2) Von $\varphi = 90^\circ - \delta$ bis $\varphi = -(90^\circ - \delta)$ sind die Grenzen für die Integration nach t gleich $\pm t_0$; es wird daher

$$m_2 = m_0 (2 t_0 \sin \varphi \sin \delta + 2 \cos \varphi \cos \delta \sin t_0) \quad (5)$$

demnach:

$$m_2 = 2 m_0 \sin \varphi \sin \delta (t_0 - \tan t_0).$$

In der Nähe von $\delta = 0$ und $\varphi = 0$ ist die Formel zu verwenden:

$$m_2 = 2 m_0 (\sin \varphi \sin \delta t_0 + \cos \varphi \cos \delta \sin t_0)$$

3) Von $\varphi = -(90^\circ - \delta)$ bis $\varphi = -90^\circ$ ist $m_3 = 0$

Auf die Veränderlichkeit von δ braucht dabei nicht Rücksicht genommen zu werden, so lange die Deklinationsänderung proportional der Zeit stattfindet, was für die Sonne stets angenommen werden kann. (Im Solstitium ist dies allerdings nicht der Fall, dann ist aber die Änderung selbst verschwindend klein.) Denn sei $\delta = \delta_0 + \delta' t$, so treten noch die Integrale auf

$$\int_{-t_0}^{+t_0} t dt \quad \text{und} \quad \int_{-t_0}^{+t_0} t \cos t dt,$$

welche beide verschwinden.²⁾

¹⁾ Die Zahl ist noch beträchtlichen Unsicherheiten unterworfen; die Resultate schwanken zwischen 1.5 cal. (Quetelet) und 3.0 cal. (Langley).

²⁾ Der Einwand von Friedr. Hopfner („Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erde“, Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, Bd. 114 II. a, S. 1315) ist also ungerechtfertigt. Was aber seine Zerlegung anbetrifft, so bringt dieseibe nichts neues; denn alle hier vorzunehmenden Integrationen enthalten, solange man sich auf ein gegebenes φ beschränkt, die beiden von ihm gesondert behandelten Integrale ebenfalls getrennt, und zwar das eine in dem Faktor von $\cos \varphi$, das andere in dem Faktor von $\sin \varphi$. Hingegen darf nicht unerwähnt bleiben, daß seine Integration der Formel

$$W_a = \frac{C}{c} \int_{\omega_1}^{\omega_2} (\cos \odot \cos \theta + \cos \epsilon \sin \odot \sin \theta) d \odot$$

(S. 1330) unrichtig ist, denn es darf nicht $\theta =$ mittlere Länge der Sonne gesetzt werden, weil die Rotation ja nicht gleichmäßig in der Ekliptik stattfindet. Alle seine Rechnungen, so sehr sie auch dem Nichtastronomen imponieren, da sie selbst höhere Potenzen der Exzentrizitäten zu berücksichtigen gestatten, und alle seine Folgerungen sind daher bedeutungslos. Dasselbe gilt auch von seiner Kritik der Angot'schen Arbeiten (ebenda Bd. 116, II a, SS. 220/1).

Hieraus erhält man im Äquator ($\varphi = 0$): $m_2 = 2 m_0 \cos \delta$; für $\varphi = 90^\circ - \delta$: $m'_2 = 2 \pi m_0 \cos \delta \sin \delta$; für $\varphi > 90^\circ - \delta$: $m_1 = 2 \pi m_0 \sin \delta \sin \varphi$ und für den Pol ($\varphi = 90^\circ$): $m'_1 = 2 \pi m_0 \sin \delta$. Es ist also das Verhältnis der auf den Pol und auf irgend einen Punkt des Äquators auffallenden Strahlung

$$v = \frac{m'_1}{m_2} = \pi \tan \delta \quad (6)$$

also für die Solstitien ($\delta = 23^\circ 27'$): $v = 1.363$. Die Werte von m_1 sind jedoch so zu verteilen, daß die Zeit der Zirkumpolarität halbiert wird, da die andere Hälfte auf den Zeitraum der kalten Polarnacht übertragen wird. L. W. Meech¹⁾ hat die Werte m_1 und m_2 für jeden zehnten Grad der Breite und für jeden 15. des Monates berechnet, und in einer Tabelle zusammengestellt. Ebenso gibt Chr. Wiener²⁾ eine solche Tabelle, überdies aber auch sehr gute graphische Darstellungen, wobei m einerseits als Funktion von φ und andererseits als Funktion von δ aufgefaßt wird. Eine andere Tafel von Angot, welche sowohl die größte, als auch die kleinste an einem Tage von der Sonne empfangene Wärme, weiters das Jahresmittel der täglichen Wärme für verschiedene Wärmedurchlässigkeit der Luft (1, 0.8 und 0.6 Diathermansien) enthält, gibt Woeikoff.³⁾

Hier handelt es sich zunächst darum, die Menge des Wärmeniederschlages auf der ganzen Erde während eines Tages zu bestimmen. Eine Zone in der Breite φ von der Breite $d\varphi$ hat die Fläche $2 \pi r^2 \cos \varphi d\varphi$; jeder Punkt des Parallels erhält dieselbe Menge, folglich ist die Gesamtmenge:

$$M = \int_{-(90-\delta)}^{+(90-\delta)} m_2 \cdot 2 \pi r^2 \cos \varphi d\varphi + \int_{+(90-\delta)}^{90} m_1 \cdot 2 \pi r^2 \cos \varphi d\varphi.$$

Das zweite Integral gibt sofort

$$J_2 = 4 \pi^2 r^2 m_0 \sin \delta \int_{90-\delta}^{90} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 2 \pi^2 r^2 m \sin \delta^3.$$

Das erste Integral wird:

$$J_1 = 4 \pi r^2 m_0 \sin \delta \int_{-(90-\delta)}^{+(90-\delta)} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi (t_0 - \tan t_0).$$

Hiefür ist nun $\cos t_0 = -\tan \varphi \tan \delta$ und es wird für $\varphi = -(90^\circ - \delta)$: $t_0 = 0$; für $\varphi = +(90^\circ - \delta)$: $t_0 = \pi$; durch partielle Integration folgt daher

$$\begin{aligned} J_1' &= 4 \pi r^2 m_0 \sin \delta \int_{-(90-\delta)}^{+(90-\delta)} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi t_0 = \\ &= \pi r^2 m_0 \sin \delta \left[-t_0 \cos 2\varphi + \int \cos 2\varphi d t_0 \right]_{-(90-\delta)}^{+(90-\delta)} \end{aligned}$$

¹⁾ Meech, „On the relative intensity of the Heat and Light of the Sun upon different latitudes of the Earth.“ Smithsonian Contributions to knowledge. Vol IX (1857).

²⁾ „Über die Stärke der Bestrahlung der Erde durch die Sonne in ihren verschiedenen Breiten und Jahreszeiten“, Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik, 21. Jahrg. 1877. S. 346.

³⁾ Die Klimate der Erde. S. 321.

Da nun

$$\begin{aligned} \int_{-(90-\delta)}^{+(90-\delta)} \cos 2\varphi \, dt_0 &= \int_0^\pi \frac{1 - \operatorname{tang} \varphi^2}{1 + \operatorname{tang} \varphi^2} \, dt_0 = \int_0^\pi \frac{\operatorname{tang} \delta^2 - \cos t_0^2}{\operatorname{tang} \delta^2 + \cos t_0^2} \, dt_0 = \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{2 \operatorname{tang} \delta^2}{\operatorname{tang} \delta^2 + \cos t_0^2} - 1 \right) \, dt_0 = -\pi + \int_0^\pi \frac{2 \operatorname{tang} \delta^2}{\operatorname{tang} \delta^2 + \cos t_0^2} \, dt_0 \end{aligned}$$

und das letzte Integral wegen

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 \cos x^2 + b^2 \sin x^2} &= \int \frac{dx}{(a^2 - b^2) \cos x^2 + b^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left(\frac{b}{a} x \right) \\ \int_0^\pi \frac{dt_0}{\operatorname{tang} \delta^2 + \cos t_0^2} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt_0}{\operatorname{tang} \delta^2 + \cos t_0^2} = \frac{\pi}{\operatorname{tang} \delta \sec \delta} \end{aligned}$$

ist, so wird

$$J_1' = \pi r^2 m_0 \sin \delta [\pi \cos 2\delta - \pi + 2\pi \sin \delta] = 2\pi^2 r^2 m_0 \sin \delta^2 (1 - \sin \delta).$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} J_1'' &= -4\pi r^2 m_0 \sin \delta \int_{-(90-\delta)}^{+(90-\delta)} \sin \varphi \cos \varphi \operatorname{tang} t_0 \, d\varphi = \\ &= -4\pi r^2 m_0 \sin \delta \int_{-(90-\delta)}^{+(90-\delta)} \frac{\operatorname{tang} t_0}{(1 + \operatorname{tang} \varphi^2)^2} \frac{d\varphi}{\cos \varphi^2} = \\ &= -4\pi r^2 m_0 \sin \delta \int_0^\pi \operatorname{tang} t_0 \frac{-\cos t_0 \cot \delta}{(1 + \cos t_0^2 \cot^2 \delta)^2} \cot \delta \sin t_0 \, dt_0 = \\ &= 4\pi r^2 m_0 \sin \delta \operatorname{tang} \delta^2 \sec \delta^2 \int_0^\pi \frac{dt_0}{(\operatorname{tang} \delta^2 + \cos t_0^2)^2} - \\ &\quad - 4\pi r^2 m_0 \sin \delta \operatorname{tang} \delta^2 \int_0^\pi \frac{dt_0}{\operatorname{tang} \delta^2 + \cos t_0^2} = \\ &= 4\pi r^2 m_0 \operatorname{tang} \delta^3 \sec \delta \left[-\frac{1}{2 \operatorname{tang} \delta^2 \sec \delta^2} \frac{\sin t_0 \cos t_0}{\operatorname{tang} \delta^2 + \cos t_0^2} \right]_0^\pi + \\ &+ 4\pi r^2 m_0 \left[\operatorname{tang} \delta^3 \sec \delta \frac{\operatorname{tang} \delta^2 + \sec \delta^2}{2 \operatorname{tang} \delta^2 \sec \delta^2} - \sin \delta \operatorname{tang} \delta^2 \right] \int_0^\pi \frac{dt_0}{\operatorname{tang} \delta^2 + \cos t_0^2} \\ &= 2\pi^2 r^2 m_0 \cos \delta^2, \end{aligned}$$

demnach

$$M = J_1' + J_1'' + J_2 = 2\pi^2 r^2 m_0. \quad (7)$$

Für die Erwärmung ist nun aber die Absorption zu berücksichtigen. Dann wird:

$$dm' = m_0 \cos J K_{hz} \, dt$$

daher

$$dm' = m_0 (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t) e^{-k} \cos(z\sqrt{k}) \, dt.$$

Integriert man hier zwischen $z=0$, $t=0$ und $z=90^\circ$, $t=t_0$, bezw. 180° , so erhält man die Wärmemenge für den halben Tagebogen, die mit 2 multipliziert die Wärmemenge während einer Umdrehung der Erde gibt. Dabei ist zu beachten, daß

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cot t \\ \sin z \, dz &= \cos \varphi \cos \delta \sin t \, dt \\ \cos t &= \frac{\cos z - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \\ \sin t &= \frac{\sqrt{(\cos \varphi^2 \cos \delta^2 - \sin \varphi^2 \sin \delta^2) + 2 \sin \varphi \sin \delta \cos z - \cos z^2}}{\cos \varphi \cos \delta} \\ \cos t_0 &= -\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta \end{aligned} \tag{8}$$

ist. Es treten die Integrale auf:

$$J_c = \int \cos t \cos(z \sqrt{k}) \, dt; \quad J = \int \cos(z \sqrt{k}) \, dt$$

wenn auf die Veränderlichkeit von k (mit der Höhe und dem Feuchtigkeitsgehalte) im Verlaufe einer Rotation der Erde nicht Rücksicht genommen wird. Es sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

a) φ ist zwischen $\pm(90^\circ - \delta)$; $\cos \varphi \cos \delta \geq \sin \varphi \sin \delta$; t_0 ist reell; die Integrationsgrenzen sind $t = 0$, $z_0 = \pm(\varphi - \delta)$; $t = t_0$, $z = 90^\circ$.

Für J_c erhält man durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} J_c &= \sin t \cos(z \sqrt{k}) \Big|_{z_0}^{90} + \int_{z_0}^{90} \sin t \cdot V \bar{k} \sin z \, V \bar{k} \, dz = \sin t_0 \cos\left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}\right) + \frac{V \bar{k}}{\cos \varphi \cos \delta} J_c' \\ J_c' &= \int_0^{u_0} \frac{\sin z \, V \bar{k}}{\sin z} \sqrt{(\cos \varphi^2 \cos \delta^2 - \sin \varphi^2 \sin \delta^2) + 2 \sin \varphi \sin \delta \cdot u - u^2} \, du \end{aligned}$$

wobei $\cos z = u$ substituiert wurde und der Grenze z_0 der Wert $u_0 = \cos z_0$ zugehört. Im Integral J_c' ändert die Quadratwurzel im Verlaufe der Integration das Zeichen nicht, da der Ausdruck stets gleich $\cos \varphi \cos \delta \sin t$ ist; man kann daher für den Koeffizienten $(\sin z \, V \bar{k} : \sin z)$ einen Mittelwert¹⁾ einführen; sei derselbe \mathfrak{M} (s. S. 188), so wird wegen

$$\begin{aligned} \int_0^{u_0} \sqrt{a + 2bu - cu^2} \, du &= \frac{1}{2} \frac{cu - b}{c} \sqrt{a + 2bu - cu^2} \Big|_0^{u_0} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{ac + b^2}{c \sqrt{c}} \arcsin \frac{cu - b}{\sqrt{ac + b^2}} \Big|_0^{u_0} \\ \arcsin \frac{cu_0 - b}{\sqrt{ac + b^2}} + \arcsin \frac{b}{\sqrt{ac + b^2}} &= \arcsin \frac{(cu_0 - b) \sqrt{ac}}{ac + b^2} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{a + 2bu - cu^2} &= \cos \varphi \cos \delta \sin t \\ J_c' &= \mathfrak{M} \left[+ \frac{1}{2} \sin \varphi \sin \delta \cos \varphi \cos \delta \sin t_0 + \frac{1}{2} \cos \varphi^2 \cos \delta^2 t_0 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \mathfrak{M} \cos \varphi^2 \cos \delta^2 (t_0 - \sin t_0 \cos t_0) \end{aligned}$$

¹⁾ Es ist dies vorteilhafter, als die Einführung eines Mittelwertes für $\cos z \sqrt{k}$, weil J_c' mit $V \bar{k}$ multipliziert ist; würde in J_c ein Mittelwert eingeführt worden sein, so wäre das Integral \mathfrak{M}_1 sin t_0 wesentlich unsicherer. In demselben Maße werden auch die Resultate der späteren Integrationen hierdurch beeinflusst.

²⁾ Setzt man

$$\arcsin \frac{cu_0 - b}{\sqrt{ac + b^2}} = x; \quad \arcsin \frac{b}{\sqrt{ac + b^2}} = y,$$

so wird

$$\sin x = \frac{cu_0 - b}{\sqrt{ac + b^2}}; \quad \sin y = \frac{b}{\sqrt{ac + b^2}}; \quad \sin(x + y) = \frac{(cu_0 - b) \sqrt{ac}}{ac + b^2}.$$

und daher

$$J_c = \sin t_0 \cos \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k} \right) + \frac{1}{2} \mathfrak{M} \sqrt{k} \cos \varphi \cos \delta (t_0 - \sin t_0 \cos t_0).$$

Endlich wird ebenfalls durch partielle Integration

$$\begin{aligned} J &= t \cos (z \sqrt{k})_0^{t_0} + \sqrt{k} \int_0^{t_0} t \sin (z \sqrt{k}) dz = \\ &= t_0 \cos \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k} \right) + \mathfrak{M} \sqrt{k} \cos \varphi \cos \delta \int_0^{t_0} t \sin t dt \\ J &= t_0 \cos \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k} \right) + \mathfrak{M} \sqrt{k} \cos \varphi \cos \delta (\sin t_0 - t_0 \cos t_0). \end{aligned}$$

Es wird somit für diesen Fall die Gesamtwärme :

$$\begin{aligned} m_2 &= 2 m_0 \sin \varphi \sin \delta e^{-k} [t_0 \cos \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k} \right) + \\ &+ \mathfrak{M} \sqrt{k} \cos \varphi \cos \delta (\sin t_0 - t_0 \cos t_0)] + \\ &+ 2 m_0 \cos \varphi \cos \delta e^{-k} [\sin t_0 \cos \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \mathfrak{M} \sqrt{k} \cos \varphi \cos \delta (t_0 - \sin t_0 \cos t_0)] \end{aligned} \quad (10)$$

b) Es ist φ zwischen $90^\circ - \delta$ und 90° ; die Entwicklung der Integrale bleibt dieselbe; die Grenzen sind

$$\begin{aligned} t_0 &= 0; \quad z_0 = \pm (\varphi - \delta); \quad u_0 = \cos z_0 \\ t_1 &= 2\pi; \quad z_1 = 180^\circ - (\varphi + \delta); \quad u_1 = \cos z_1. \end{aligned}$$

In J_c verschwindet der erste, integrierte Teil und es bleibt

$$J_c = \frac{\sqrt{k}}{\cos \varphi \cos \delta} J_c'.$$

Für das Integral J_c' erreicht die zu integrierende Funktion einen Maximalwert für $u_2 = b : c$ und das Integral wäre in zwei Teile zu zerlegen

$$J_c' = \int_{u_0}^{u_1} = \int_{u_0}^{u_2} + \int_{u_2}^{u_1};$$

da nun für die Grenze u_2 in dem ersten Teile $c u_2 - b$, für u_0 und u_1 aber der Wurzelausdruck verschwindet, so bleibt:

$$J_c' = \frac{1}{2} \mathfrak{M} \frac{a c + b^2}{c} \left[\frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{c u - b}{\sqrt{a c + b^2}} \right]_{u_0}^{u_2} + \frac{1}{2} \mathfrak{M} \frac{a c + b^2}{c} \left[\frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{c u - b}{\sqrt{a c + b^2}} \right]_{u_2}^{u_1}$$

welche für u_2 ebenfalls verschwinden, so daß

$$J_c' = \frac{1}{2} \mathfrak{M} (a + b^2) \left[\arcsin \frac{u_1 - b}{\sqrt{a + b^2}} - \arcsin \frac{u_0 - b}{\sqrt{a + b^2}} \right] = 0 \quad 1)$$

wird, und da

$$J = \pi [\cos (z_1 \sqrt{k}) + \mathfrak{M} \sqrt{k} \cos \varphi \cos \delta]$$

ist, so wird ²⁾

$$m_1 = 2 m_0 \sin \varphi \sin \delta e^{-k} \pi [\cos (z_1 \sqrt{k}) + \mathfrak{M} \sqrt{k} \cos \varphi \cos \delta] \quad (11)$$

Im weiteren sind nun zu bestimmen: A) Die von jeder Hemisphäre von der Sonne α) während eines Tages, β) während einzelner Jahreszeiten, γ) während

1) Es ist wieder $\sin x = \frac{u_1 - b}{\sqrt{a + b^2}}$; $\sin y = \frac{u_1 - b}{\sqrt{a + b^2}}$; $\sin (y - x) = 0$.

2) Für das Verhältnis der Wärmemengen am Pol und am Äquator erhält man hier

$$\text{für den Pol } m_1' = 2 m_0 \sin \delta e^{-k} \pi \cos (z_1 \sqrt{k}),$$

$$\text{für den Äquator } m_2 = 2 m_0 \cos \delta e^{-k} [\cos \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k} \right) + \frac{1}{2} \pi \mathfrak{M} \sqrt{k} \cos \delta]$$

$$v = \frac{m_1'}{m_2} = \pi \tan \delta \frac{\cos (z_1 \sqrt{k})}{\cos \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k} \right) + \frac{1}{2} \pi \mathfrak{M} \sqrt{k} \cos \delta};$$

daher im Solstitium mit $\sqrt{k} = 0.5$, $\mathfrak{M} = 0.5$, $v = 0.94 \pi \tan \delta$, also nahe derselbe Wert,

des ganzen Jahres erhaltene Wärmemenge und B) die von jedem Punkte α) während einzelner Teile des Jahres, β) während des ganzen Jahres erhaltene Wärmemenge.

A) Handelt es sich um die Gesamtwärmemenge großer Teile der Erde, so verschwinden die Unregelmäßigkeiten der Neigung und man kann die Ausdrücke (10) und (11) in aller Strenge verwenden.

Multipliziert man hier wieder mit $2\pi r^2 \cos \varphi d\varphi$ und integriert m_2 zwischen den Grenzen $-(90^\circ - \delta)$ und 0 einerseits und zwischen 0° und $+(90^\circ - \delta)$ andererseits, ferner m_1 von $(90^\circ - \delta)$ bis 90° , so erhält man die gesuchten Wärmemengen. Dabei ist

$$\begin{aligned} \cos t_0 &= -\tan \varphi \tan \delta \\ \sin t_0 d t_0 &= \tan \delta \sec \varphi^2 d \varphi \end{aligned} \quad (12)$$

Hier treten die Integrale auf:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int_{90-\delta}^{90} \sin \varphi \cos \varphi^2 d \varphi = -\frac{1}{3} \cos \varphi^3 \Big|_{90-\delta}^{90} = +\frac{1}{3} \sin^3 \delta \\ 2. \quad & \int_{90-\delta}^{90} \sin \varphi \cos \varphi \cos [180 - (\varphi + \delta)] V k \cdot d \varphi = \\ &= \int_{90-\delta}^{90} \sin \varphi \cos \varphi [\cos(\pi V k - \delta V k) \cos(\varphi V k) + \sin(\pi V k - \delta V k) \sin(\varphi V k)] d \varphi = \\ &= \frac{1}{2} \cos(\pi V k - \delta V k) \int_{90-\delta}^{90} \left\{ \sin(2\varphi + \varphi V k) + \sin(2\varphi - \varphi V k) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sin(\pi V k - \delta V k) \int_{90-\delta}^{90} \left\{ \cos(2\varphi - \varphi V k) - \cos(2\varphi + \varphi V k) \right\} d \varphi = \right. \\ &= \frac{1}{4} \frac{\cos(\frac{1}{2} \pi V k - \delta V k)}{2 - V k} + \frac{1}{4} \frac{\cos(\frac{1}{2} \pi V k - \delta V k)}{2 + V k} - \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{\cos(2\delta + \frac{1}{2} \pi V k)}{2 + V k} - \frac{1}{4} \frac{\cos(2\delta - \frac{1}{2} \pi V k)}{2 - V k} = \\ &= \frac{1}{4 - k} \left\{ \cos(\frac{1}{2} \pi V k - \delta V k) - \cos 2\delta \cos \frac{1}{2} \pi V k - \frac{1}{2} V k \sin 2\delta \sin \frac{1}{2} \pi V k \right\}. \end{aligned}$$

Für die folgenden Integrale sind die Grenzen für die

Südhemisphäre	Nordhemisphäre
$\varphi = -(90^\circ - \delta) \dots 0$	$\varphi = 0 \dots + (90^\circ - \delta)$
$t_0 = 0 \dots 90^\circ$	$t_0 = 90^\circ \dots 180^\circ$

$$\begin{aligned} 3. \quad & \int \sin \varphi d t_0 = \int \tan \varphi \cos \varphi d t_0 = -\cot \delta \int \cos t_0 \cos \varphi d t_0 = \\ &= -\cot \delta \left[\sin t_0 \cos \varphi + \int \sin t_0 \sin \varphi d \varphi \right] \end{aligned}$$

wie ohne Absorption. Dieses Resultat ist aus dem Grund interessant, weil Meech (l. c. S. 44) meint, daß das von ihm erhaltene, für den ersten Augenblick sehr frappierende Resultat nur für die obere Luftgrenze gilt, weil in der Erdatmosphäre viel Wärme absorbiert werden müsse. Daß das Resultat ganz natürlich ist, wird leicht ersichtlich, wenn man es mit den Werten für andere kosmische Niederschläge vergleicht.

$$\int \sin t_0 \sin \varphi d\varphi = \int \sqrt{1 - \operatorname{tang} \delta^2 \operatorname{tang} \varphi^2} \sin \varphi d\varphi,$$

und wenn $\operatorname{tang} \delta = \tau$, $\sec \delta = \sigma$, $\cos \varphi = x$, $\cos \varphi \sin t_0 = \sqrt{x^2 \sigma^2 - \tau^2}$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \int \sin t_0 \sin \varphi d\varphi &= - \int \sqrt{x^2 \sigma^2 - \tau^2} \frac{dx}{x} = - \sqrt{x^2 \sigma^2 - \tau^2} + \tau^2 \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 \sigma^2 - \tau^2}} = \\ &= - \sqrt{x^2 \sigma^2 - \tau^2} - \tau \operatorname{arcsin} \frac{2 \tau^2}{2 \sigma \tau x} = \\ &= - \sqrt{\cos \varphi^2 - \operatorname{tang} \delta^2 \sin \varphi^2} - \operatorname{tang} \delta \operatorname{arc} \sin (\sin \delta \sec \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin \varphi dt_0 &= - \cot \delta \cos \varphi \sin t_0 + \\ &+ \cot \delta \sqrt{\cos \varphi^2 - \operatorname{tang} \delta^2 \sin \varphi^2} + \operatorname{arc} \sin (\sin \delta \sec \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \int_0^{90} \sin \varphi dt_0 = - (\frac{1}{2} \pi - \delta) \\ \int_{90}^{180} \sin \varphi dt_0 = + (\frac{1}{2} \pi - \delta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4. \int \sin \varphi^3 dt_0 &= \int \sin \varphi^2 \cos \varphi \operatorname{tang} \varphi dt_0 = \\ &= - \cot \delta [\sin \varphi^2 \cos \varphi \sin t_0 - \int \sin t_0 (3 \sin \varphi \cos \varphi^2 - \sin \varphi) d\varphi] \end{aligned}$$

$$\int \sin \varphi \cos \varphi^2 \sin t_0 d\varphi = - \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2 \sigma^2 - \tau^2} d(x^2) = - \frac{1}{3 \sigma^2} \sqrt{(x^2 \sigma^2 - \tau^2)^3}$$

$$\begin{aligned} \int \sin \varphi^3 dt_0 &= - \cot \delta \sin \varphi^3 \cos \varphi \sin t_0 - \cot \delta \cos \delta^2 \cos \varphi^3 \sin t_0^3 + \\ &+ \cot \delta \cos \varphi \sin t_0 + \operatorname{arc} \sin (\sin \delta \sec \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \int_0^{90} \sin \varphi^3 dt_0 = + \sin \delta \cos \delta - (\frac{1}{2} \pi - \delta) \\ \int_{90}^{180} \sin \varphi^3 dt_0 = - \sin \delta \cos \delta + (\frac{1}{2} \pi - \delta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5. \int \cos \varphi^3 t_0 d\varphi &= \int t_0 (1 - \sin \varphi^2) d \sin \varphi = \\ &= t_0 (\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin \varphi^3) - \int (\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin \varphi^3) dt_0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \int_0^{90} \cos \varphi^3 t_0 d\varphi = + \frac{1}{3} \sin \delta \cos \delta + \frac{2}{3} (\frac{1}{2} \pi - \delta) \\ \int_{90}^{180} \cos \varphi^3 t_0 d\varphi = \pi (\cos \delta - \frac{1}{3} \cos \delta^3) - \frac{1}{3} \sin \delta \cos \delta - \frac{2}{3} (\frac{1}{2} \pi - \delta) \end{cases}$$

$$6. \int \sin \varphi \cos \varphi^2 \sin t_0 d\varphi = - \frac{1}{3} \cos \delta^2 \cos \varphi^3 \sin t_0^3 \quad (\text{S. Nr. 4})$$

$$\begin{cases} \int_0^{90} \sin \varphi \cos \varphi^2 \sin t_0 d\varphi = - \frac{1}{3} \cos \delta^2 \\ \int_{90}^{180} \sin \varphi \cos \varphi^2 \sin t_0 d\varphi = + \frac{1}{3} \cos \delta^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad & \int \sin \varphi \cos \varphi^2 t_0 \cos t_0 d\varphi = -\operatorname{tang} \delta \int \sin \varphi^2 \cos \varphi t_0 d\varphi = \\
 & = -\operatorname{tang} \delta \left[\frac{1}{3} \sin \varphi^3 t_0 - \frac{1}{3} \int \sin \varphi^3 d t_0 \right] \\
 & \quad \left\{ \int_0^{90} \sin \varphi \cos \varphi^2 t_0 \cos t_0 d\varphi = +\frac{1}{3} \sin \delta^2 - \frac{1}{3} (\frac{1}{2} \pi - \delta) \operatorname{tang} \delta \right. \\
 & \quad \left. \int_{90}^{180} \sin \varphi \cos \varphi^2 t_0 \cos t_0 d\varphi = -\frac{1}{3} \pi \sin \delta \cos \delta^2 - \frac{1}{3} \sin \delta^2 + \frac{1}{3} (\frac{1}{2} \pi - \delta) \operatorname{tang} \delta \right. \\
 8. \quad & \int \cos \varphi^3 \sin t_0 \cos t_0 d\varphi = -\operatorname{tang} \delta \int \sin \varphi \cos \varphi^2 \sin t_0 d\varphi \quad (\text{S. Nr. 6}). \\
 & \quad \left\{ \int_0^{90} \cos \varphi^3 \sin t_0 \cos t_0 d\varphi = +\frac{1}{3} \sin \delta \cos \delta \right. \\
 & \quad \left. \int_{90}^{180} \cos \varphi^3 \sin t_0 \cos t_0 d\varphi = -\frac{1}{3} \sin \delta \cos \delta \right. \\
 9. \quad & \int \sin \varphi \cos \varphi t_0 d\varphi = \frac{1}{2} t_0 \sin \varphi^2 - \frac{1}{2} \int \sin \varphi^2 d t_0 \\
 & \quad \int \sin \varphi^2 d t_0 = \int \frac{\operatorname{tang} \varphi^2}{1 + \operatorname{tang} \varphi^2} d t_0 = \int \left(1 - \frac{\tau^2}{\tau^2 + \cos t_0^2} \right) d t_0 = \\
 & = t_0 - \operatorname{tang} \delta^2 \int \frac{d t_0}{\tau^2 + \cos t_0^2} = t_0 - \sin \delta \operatorname{arc} \operatorname{tang} (\sin \delta \operatorname{tang} t_0) \quad (\text{S. Seite 229}) \\
 & \quad \int \sin \varphi \cos \varphi t_0 d\varphi = \frac{1}{2} t_0 \sin \varphi^2 - \frac{1}{2} t_0 + \frac{1}{2} \sin \delta \operatorname{arc} \operatorname{tang} (\sin \delta \operatorname{tang} t_0) \\
 & \quad \left\{ \int_0^{90} \sin \varphi \cos \varphi t_0 d\varphi = -\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{4} \pi \sin \delta \right. \\
 & \quad \left. \int_{90}^{180} \sin \varphi \cos \varphi t_0 d\varphi = \frac{1}{2} \pi \cos \delta^2 - \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{4} \pi \sin \delta \right. \\
 10. \quad & \int \cos \varphi^2 \sin t_0 d\varphi = \int \cos \varphi \sqrt{\cos \varphi^2 - \sin \varphi^2 \operatorname{tang} \delta^2} d\varphi. \\
 & \quad \text{Setzt man hier } \sin \varphi = y, \text{ so wird} \\
 & \int \cos \varphi^2 \sin t_0 d\varphi = \int \sqrt{1 - y^2 \sec \delta^2} dy = \frac{1}{2} y \sqrt{1 - y^2 \sec \delta^2} + \frac{1}{2} \cos \delta \operatorname{arc} \sin (y \sec \delta) \\
 & \quad \left\{ \int_0^{90} \cos \varphi^2 \sin t_0 d\varphi = \frac{1}{4} \pi \cos \delta \right. \\
 & \quad \left. \int_{90}^{180} \cos \varphi^2 \sin t_0 d\varphi = \frac{1}{4} \pi \cos \delta. \right.
 \end{aligned}$$

Substituiert man diese Integrale, so erhält man nach einigen leichten Reduktionen:

a) für die polare Erdhälfte, d. i. für jene Erdhälfte deren Pol von der Sonne beleuchtet ist:

$$\begin{aligned}
 M_p &= \int_0^{90-\delta} m_2 \cdot 2 \pi r^2 \cos \varphi d\varphi + \int_{90-\delta}^{90} m_1 \cdot 2 \pi r^2 \cos \varphi d\varphi = \\
 &= \pi^2 r^2 m_0 e^{-k} [2 Q^* + \cos(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}) (1 + \sin \delta - 2 \sin \delta^3)] + \\
 & \quad + \frac{1}{3} \pi r^2 m_0 e^{-k} \mathfrak{M} \sqrt{k} [- (\frac{1}{2} \pi - \delta) + \sin \delta \cos \delta + \\
 & \quad + \pi \cos \delta^3 (1 + \frac{3}{2} \sin \delta^3) + \pi \sin \delta^4 \cos \delta^*],
 \end{aligned}$$

wobei die mit * bezeichneten Glieder der polaren Kalotte angehören. Die letzten beiden Glieder lassen sich noch zusammenziehen und es folgt

$$M_p = \pi^2 r^2 m_0 e^{-k} [2 Q + \cos(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}) (1 + \sin \delta - 2 \sin \delta^3)] + \\ + \frac{4}{3} \pi r^2 m_0 e^{-k} \mathfrak{M} \sqrt{k} [- (\frac{1}{2} \pi - \delta) + \sin \delta \cos \delta + \\ + \pi \cos \delta (1 + \frac{1}{2} \sin \delta^2 \cos \delta^2)]; \quad (13)$$

b) für die antipolare Erdhälfte: $M_a = \int_{-(90-\delta)}^0 m_0 \cdot 2 \pi r^2 \cos \varphi d \varphi$

$$M_a = \pi^2 r^2 m_0 e^{-k} \cos(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}) (1 - \sin \delta) + \\ + \frac{4}{3} \pi r^2 m_0 e^{-k} \mathfrak{M} \sqrt{k} [(\frac{1}{2} \pi - \delta) - \sin \delta \cos \delta]; \quad (14)$$

c) für die ganze Erde: $M_e = M_a + M_p$

$$M_e = 2 \pi^2 r^2 m_0 e^{-k} [Q + \cos(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}) (1 - \sin \delta^3)] + \\ + \frac{4}{3} \pi^2 r^2 m_0 e^{-k} \mathfrak{M} \sqrt{k} \cos \delta (1 + \frac{1}{2} \sin \delta^2 \cos \delta^2) \quad (15)$$

$$Q = \frac{2 \sin \delta}{4 - k} [\cos(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k} - \delta \sqrt{k}) - \cos 2 \delta \cos(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}) - \\ - \frac{1}{2} \sqrt{k} \sin 2 \delta \sin(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k})]. \quad (16)$$

Für $k=0$ wird $Q = \sin \delta^3$.

Die Konstante m_0 bestimmt sich aus der von der Sonne auf die ganze Erde ohne Rücksicht auf Absorption gestrahlten Wärmemenge. Für $k=0$ folgt $M_e = 2 \pi^2 r^2 m_0$ (wie Formel 7). Da nun im Mittel bei normalem Einfall pro cm^2 und Minute $w = 2 \cdot 5 \text{ cal}$ ist, so ist $M_e = r^2 \pi \cdot 24 \cdot 60 \cdot w = 2 \pi^2 r^2 m_0$; demnach $m_0 = 24 \cdot 60 w : 2 \pi$. Würde bei der Integration im vollen Kreise an Stelle von 2π der in Minuten ausgedrückte Wert $24 \cdot 60 = 1440$ Minuten gesetzt werden, so wäre daher überall an Stelle von $\pi^2 r^2 m_0$ der Wert $720 \pi r^2 m_0 = 720 \pi r^2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ cal}$ zu setzen. Drückt man jedoch den Tagebogen durch 2π aus, so ist $m_0 = 720 \cdot 2 \cdot 5 : \pi \text{ cal}$ zu setzen; das Resultat ist, wie man sieht, dasselbe. Da jedoch in den mit \mathfrak{M} multiplizierten Gliedern an Stelle von π eben der Mittelwert \mathfrak{M} getreten ist, so ist es besser, die Formeln (14), (15), (16) beizubehalten und m_0 hiernach zu verwenden. Es ist also

$$m_0 = 572 \cdot 96 \text{ cal.}; \quad \log m_0 = 2 \cdot 75812.$$

Der Wert von Q läßt sich noch in eine andere Form bringen. Es ist:

$$(4 - k) Q = 2 \sin \delta [\cos(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}) [\cos(\delta \sqrt{k}) - \cos 2 \delta] + \\ + \sin(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}) [\sin(\delta \sqrt{k}) - \frac{1}{2} \sqrt{k} \sin 2 \delta]] = \\ = 2 \sin \delta \cos(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}) [(1 - \cos 2 \delta) - (1 - \cos \delta \sqrt{k}) + \\ + \text{tang}(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}) [\sin(\delta \sqrt{k}) - \frac{1}{2} \sqrt{k} \sin 2 \delta]] \\ Q = \frac{\sin \delta}{1 - \frac{1}{4} k} \cos(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}) \left[\sin \delta^2 - \left(\sin \frac{\delta}{2} \sqrt{k} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \text{tang}(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}) \left\{ \sin(\delta \sqrt{k}) - \frac{1}{2} \sqrt{k} \sin 2 \delta \right\} \right]. \quad (16 a)$$

Um die während eines Teiles des Jahres oder während des ganzen Jahres auf bestimmte Teile der Erde auffallende Wärmemengen zu erhalten, hat man

die für einen Tag geltenden Werte mit $(dT:n)$ zu multiplizieren, wenn T die Zeit und n die mittlere tägliche siderische Bewegung bedeutet; oder mit $d\lambda$, wenn λ die wahre Länge der Sonne ist, und dann zu integrieren. Die Frage, ob mit dT oder mit $d\lambda$ zu multiplizieren ist, hat F. Hopfner ¹⁾ in einer Abhandlung, in welcher ein großer Teil des in den früheren Abhandlungen desselben Verfassers gesagten wiederholt wird, einer eingehenden Erörterung unterziehen zu müssen geglaubt und hat dadurch eine Schwierigkeit hineininterpretiert, die gar nicht darin liegt und ein Resultat gefunden, das der Wahrheit nicht entspricht. Die Sache ist ja außerordentlich einfach. Multipliziert man mit dT , so setzt man voraus, daß die auffallende Wärmemenge ceteris paribus (d. h. bei gleichen Entfernungen, normalem Auffallen. gleicher absoluten Strahlungsintensität) proportional der Zeit ist; multipliziert man mit $d\lambda$, so setzt dies voraus, daß, wieder unter sonst gleichen Prämissen, die aufgefallene Wärmemenge proportional den im Bahnzentrum zurückgelegten Winkeln wären, was nicht richtig ist. Da die Sonne in der Ekliptik im Mittel täglich $(360^\circ:365\cdot2422) = 0\cdot9856^\circ$ zurücklegt, im Juni aber $0\cdot9550^\circ$, im Dezember $1\cdot0189^\circ$ täglich, so würde bei der Integration nach Multiplikation mit $d\lambda$ vorausgesetzt, daß die Erde in der Einheit der Entfernung ($R=a$) im Juni für je $1\cdot0321$ Tage, im Dezember für je $0\cdot9673$ Tage gleiche Wärmemengen erhielte. ²⁾ Hopfner scheint eine Schwierigkeit darin gesehen zu haben, daß zum Schlusse die Strahlungsmenge ebenfalls von der Differenz der λ abhängig erscheint. Da diese Schwierigkeit manchem Anfänger ebenfalls entgegnetreten könnte, so möge an einem einfachen Beispiel die Sache klargelegt werden. Sei $\delta = 0$, d. h. die Bewegung der Sonne im Äquator, dann ist $t_0 = 90^\circ$, und es wird

$$dm_2 = \frac{2m_0 a^2}{R^2} \cos \varphi dT \text{ wenn die Strahlungsmenge proportional der Zeit ist, und}$$

$$dm_2' = \frac{2m a^2}{R^2} \cos \varphi dv \text{ wenn sie proportional dem zurückgelegten Winkel angenommen wird.}$$

Es folgt sofort wegen

$$\frac{dT}{R^2} = C dv = C d(\lambda - \Pi); \quad \frac{a}{R} = 1 + e \cos 2M$$

wenn M die mittlere Anomalie und Π die Länge des Perihels der Sonne ist, daher, wenn von den zweiten Potenzen der Exzentrizität e abgesehen wird $a = R(1 + e \cos 2v) = R[1 + e \cos 2(\lambda - \Pi)]$:

$$dm_2 = C' m_0 \cos \varphi dv; \quad m_2 = C' m_0 \cos \varphi (\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$dm_2' = C' m_0 \cos \varphi [1 - 2e \cos 2(\lambda - \Pi)] d\lambda;$$

$$m_2' = C' m_0 \cos \varphi (\lambda_2 - \lambda_1) - C' m_0 \cos \varphi \cdot e \sin 2(\lambda - \Pi).$$

¹⁾ „Untersuchungen über die Bestrahlung der Erde durch die Sonne mit Berücksichtigung der Absorption der Wärmestrahlen durch die atmosphärische Luft nach dem Lambert'schen Gesetz.“ Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, Bd. 116, II a, S. 167.

²⁾ Zenker, „Die Verteilung der Wärme auf der Erdoberfläche“, S. 20, multipliziert mit $d\lambda$, vernachlässigt aber die Veränderlichkeit von R , wodurch die Resultate natürlich dieselben werden, wie bei der Multiplikation mit dT .

m_2 ist die Wärmemenge, welche die Erde bei der Zurücklegung des Weges $\lambda_2 - \lambda_1$ erhält, wenn die Strahlung proportional der Zeit ist; m_2' ist die Wärmemenge, welche erhalten wird, wenn in derselben Entfernung die Strahlung proportional dem zurückgelegten Winkel in der Ekliptik ist.

Für die ganze Erde war, ohne Rücksicht auf Absorption die Wärmemenge

$$M_e = 2 \pi^2 r^2 m_0$$

gefunden worden. Da m_0 sich auf die Zeiteinheit in der Entfernung 1 bezieht, die Entfernung R der Erde von der Sonne aber veränderlich ist, so wird in der Entfernung R

$$M_e = 2 \pi^2 r^2 \frac{m_0}{R^2}$$

sein, wobei R in Einheiten der Erdbahnhalfachse auszudrücken ist. Multipliziert man dieses mit dT so folgt wegen

$$\frac{dT}{R^2} = \frac{dv}{k_0 \sqrt{p}} \quad (17)$$

wenn $p = a(1 - e^2)$ der Parameter der Bahnellipse, und k_0 die Konstante des Sonnensystems ist

$$\begin{aligned} dM &= \frac{2 \pi^2 r^2 m_0}{k_0 \sqrt{p}} dv = \frac{2 \pi^2 r^2 m_0}{k_0 \sqrt{p}} d(\lambda - \Pi) \\ M &= \frac{2 \pi^2 r^2 m_0}{k \sqrt{p}} (\lambda_2 - \lambda_1). \end{aligned} \quad (18)$$

Dieses gibt die Wärmemenge, welche in derjenigen Anzahl von Tagen von der Sonne gesendet wird, welche zur Zurücklegung des Winkels $W = \lambda_2 - \lambda_1$ erforderlich ist. Für gleiche Winkelbewegungen in der Ekliptik erhält die Erde daher gleiche Wärmemengen. Die Veränderlichkeit der Entfernung ist durch die verschieden rasche Bewegung kompensiert.

Diesen Satz hatte bereits Lambert gefunden. Man schließt daraus gewöhnlich, daß die Erde in den vier Jahreszeiten je gleiche Wärmemengen von der Sonne erhält. Dieses gilt aber nur für die übliche Form der astronomischen Jahreszeiten, d. i. den Zwischenzeiten zwischen Äquinoktien und Solstitien, denen je eine Winkelbewegung von 90° entspricht, da die Richtungen nach den Solstitien und Äquinoktien aufeinander senkrecht stehen. Sieht man diese gewöhnlich als Trennungspunkte angesehenen Zeitpunkte als die Mitte der Jahreszeiten an oder verschiebt den meteorologischen Mittsommer und Mittwinter nach erfahrungsgemäß zu fixierenden Daten, so daß die Jahreszeiten nicht mehr vier Zeiträume umfassen, in denen die Winkelbewegung der Erde je 90° ist, so gilt auch der obige Satz nicht mehr.

Derselbe bezieht sich auch nur auf die Erde als Ganzes, nicht aber auf Teile derselben, z. B. jede der beiden Hemisphären. Von der Absorption abgesehen ($k = 0$) würde sich ergeben

$$\text{für die polare Hälfte} \quad M_p = \frac{\pi^2 r^2 m_0}{R^2} (1 + \sin \delta)$$

$$\text{für die antipolare Hälfte} \quad M_a = \frac{\pi^2 r^2 m_0}{R^2} (1 - \sin \delta)$$

Setzt man hier $\sin \delta = \sin \epsilon \sin \lambda$, multipliziert mit $d T$, und berücksichtigt Formel (17), so folgt

$$M_p^\lambda = \frac{\pi^2 r^2 m_0}{k_0 \sqrt{p}} \int (1 + \sin \epsilon \sin \lambda) d \lambda = \frac{\pi^2 r^2 m_0}{k_0 \sqrt{p}} [(\lambda_2 - \lambda_1) - \sin \epsilon (\cos \lambda_2 - \cos \lambda_1)]$$

$$M_a^\lambda = \frac{\pi^2 r^2 m_0}{k_0 \sqrt{p}} \int (1 - \sin \epsilon \sin \lambda) d \lambda = \frac{\pi^2 r^2 m_0}{k_0 \sqrt{p}} [(\lambda_2 - \lambda_1) + \sin \epsilon (\cos \lambda_2 - \cos \lambda_1)].$$

Auf der nördlichen Halbkugel ist die Sonne für $\lambda_1 = 0$ bis $\lambda_2 = 180^\circ$, für diese Zeit wird die von der nördlichen Halbkugel empfangene Wärmemenge

$$W_p = \frac{\pi^2 r^2 m_0}{k_0 \sqrt{p}} [\pi + 2 \sin \epsilon] \quad (19 a)$$

und die von der südlichen Halbkugel in derselben Zeit empfangene Wärmemenge ist

$$W_a = \frac{\pi^2 r^2 m_0}{k_0 \sqrt{p}} [\pi - 2 \sin \epsilon] \quad (19 b)$$

und umgekehrt ist es für südliche Deklinationen der Sonne.

Für die Berücksichtigung der Absorption kommen die folgenden Integrale in Betracht:

1. $\int \sin \delta d \lambda = \sin \epsilon \int \sin \lambda d \lambda = -\sin \epsilon \cos \lambda$
2. $\int \sin \delta^3 d \lambda = \sin \epsilon^3 \int \sin \lambda (1 - \cos \lambda^2) d \lambda = -\sin \epsilon^3 (\cos \lambda - \frac{1}{3} \cos \lambda^3)$
3. $\int \sin \delta \cos \delta d \lambda = \sin \epsilon \int \sin \lambda d \lambda \sqrt{\cos \epsilon^2 + \sin \epsilon^2 \cos \lambda^2}$; daher wenn $\cos \lambda = z$ gesetzt wird:

$$\int \sin \delta \cos \delta d \lambda = -\sin \epsilon \int \sqrt{\cos \epsilon^2 + \sin \epsilon^2 \cdot z^2} dz =$$

$$= -\sin \epsilon \left\{ \frac{1}{2} z \sqrt{\cos \epsilon^2 + \sin \epsilon^2 \cdot z^2} + \frac{\cos \epsilon^2}{\sin \epsilon} \log_n (\sin \epsilon \cdot z + \sqrt{\cos \epsilon^2 + \sin \epsilon^2 z^2}) \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \sin \epsilon \cos \delta \cos \lambda + \cos \epsilon^2 \log_n (\sin \epsilon \cos \lambda + \cos \delta) \right\}.$$

Die folgenden drei Integrale führen auf elliptische Integrale, in denen kürzshalber

$$\sin \epsilon = \kappa, \quad \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda} = \Delta \lambda,$$

$$\int_0^\lambda \Delta \lambda d \lambda = E(\lambda), \quad \int_0^\lambda \frac{d \lambda}{\Delta \lambda} = F(\lambda).$$

gesetzt werden soll. Dann wird:

4. $\int \cos \delta d \lambda = E(\lambda)$
5. $\int \sin \delta \sin 2 \delta d \lambda = 2 \int \sin \delta^2 \cos \delta d \lambda = 2 \kappa^2 \int \sin \lambda^2 \Delta \lambda d \lambda$
6. $\int \sin \delta^2 \cos \delta^3 d \lambda = \kappa^2 \int \sin \lambda^2 \Delta \lambda^3 d \lambda$

Ohne auf die allgemeinen Reduktionsformeln für die elliptischen Integrale überzugehen, erhält man für die hier vorliegenden Integrale 5 und 6 leicht Reduktionen auf die Integrale erster und zweiter Gattung $F(\lambda)$ und $E(\lambda)$ folgendermaßen. Es ist

$$\frac{d \Delta \lambda}{d \lambda} = -\frac{\kappa^2 \sin \lambda \cos \lambda}{\Delta \lambda}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (\sin \lambda \cos \lambda \Delta \lambda) &= - \frac{\kappa^2 \sin \lambda^2 \cos \lambda^2}{\Delta \lambda} + (1 - 2 \sin \lambda^2) \Delta \lambda = \\ &= \frac{\cot \epsilon^2}{\Delta \lambda} - (\cot \epsilon^2 - 1) \Delta \lambda - 3 \sin \lambda^2 \Delta \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (\sin \lambda \cos \lambda \Delta \lambda^3) &= - 3 \kappa^2 \sin \lambda^2 \cos \lambda^2 \Delta \lambda + (1 - 2 \sin \lambda^2) \Delta \lambda^3 = \\ &= - 3 \Delta \lambda \kappa^2 \sin \lambda^2 (- \cot \epsilon^2 + \Delta \lambda^2 \operatorname{cosec} \epsilon^2) + \Delta \lambda^3 (1 - 2 \sin \lambda^2) = \\ &= 3 \Delta \lambda (\cos \epsilon^2 \sin \lambda^2 - \Delta \lambda^2 \sin \lambda^2) + \Delta \lambda - \kappa^2 \sin \lambda^2 \Delta \lambda - 2 \Delta \lambda^3 \sin \lambda^2 = \\ &= - 5 \sin \lambda^2 \Delta \lambda^3 + (3 \cos \epsilon^2 - \sin \epsilon^2) \sin \lambda^2 \Delta \lambda + \Delta \lambda \end{aligned}$$

demnach

$$5. \int \sin \delta \sin 2 \delta d\lambda = - \frac{2}{3} \kappa^2 \sin \lambda \cos \lambda \Delta \lambda + \frac{2}{3} (1 - \kappa^2) F(\lambda) - \frac{2}{3} (1 - 2 \kappa^2) E(\lambda)$$

$$\begin{aligned} 6. \int \sin \delta^2 \cos \delta^3 d\lambda &= - \frac{1}{3} \kappa^2 \sin \lambda \cos \lambda \Delta \lambda^3 + \frac{1}{3} \kappa^2 E(\lambda) + \\ + \frac{1}{3} (3 - 4 \kappa^2) \kappa^2 \int \sin \lambda^2 \Delta \lambda d\lambda &= - \frac{1}{3} \kappa^2 \sin \lambda \cos \lambda \Delta \lambda^3 - \frac{1}{15} \kappa^2 (3 - 4 \kappa^2) \sin \lambda \cos \lambda \Delta \lambda + \\ + \frac{1}{15} (3 - 4 \kappa^2) (1 - \kappa^2) F(\lambda) &- \left[\frac{1}{15} (3 - 4 \kappa^2) (1 - 2 \kappa^2) - \frac{1}{3} \kappa^2 \right] E(\lambda). \end{aligned}$$

Endlich treten noch die folgenden drei nur durch Reihen zu bestimmenden Integrale auf:

$$\begin{aligned} \int \delta d\lambda &= \int \left[\sin \delta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sin \delta^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \sin \delta^5 + \dots + \right. \\ &\left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{1}{2n+1} \sin \delta^{2n+1} \dots \right] d\lambda. \end{aligned}$$

Da nun

$$\begin{aligned} \int \sin \delta^{2n+1} d\lambda &= \kappa^{2n+1} \int \sin \lambda^{2n+1} d\lambda = \\ &= - \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} \frac{\kappa^{2n+1}}{2n+1} \cos \lambda \left[1 + \frac{1}{2} \sin \lambda^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin \lambda^4 + \dots + \right. \\ &\left. + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \sin \lambda^{2n} \right] \end{aligned}$$

ist, so wird

$$7. \int \delta d\lambda = - \kappa \cos \lambda [\gamma_0 + \gamma_1 \kappa^2 \sin \lambda^2 + \gamma_2 \kappa^4 \sin \lambda^4 + \dots]$$

$$\gamma_0 = 1 + \frac{1}{3^2} \kappa^2 + \frac{1}{5^2} \kappa^4 + \frac{1}{7^2} \kappa^6 + \dots$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \kappa^2 + \frac{1}{7^2} \kappa^4 + \dots \right)$$

$$\gamma_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \kappa^2 + \frac{1}{9^2} \kappa^4 + \dots \right)$$

$$\gamma_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} \kappa^2 + \dots \right)$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned} \cos(\delta \sqrt{k}) &= \cos \delta^{\sqrt{k}} \left[1 - \binom{\sqrt{k}}{2} \operatorname{tang} \delta^2 + \binom{\sqrt{k}}{4} \operatorname{tang} \delta^4 + \dots \right] \\ \sin(\delta \sqrt{k}) &= \cos \delta^{\sqrt{k}} \left[\binom{\sqrt{k}}{1} \operatorname{tang} \delta - \binom{\sqrt{k}}{3} \operatorname{tang} \delta^3 + \binom{\sqrt{k}}{5} \operatorname{tang} \delta^5 \dots \right] \end{aligned} \quad (20)$$

und da

$$\int \sin \delta \cos \delta \sqrt{k} \operatorname{tang} \delta^n d\lambda = \int \frac{\sin \delta^{n+1}}{\cos \delta^{n-\sqrt{k}}} d\lambda = \int \frac{\kappa^{n+1} \sin \lambda^{n+1} d\lambda}{(V1 - \kappa^2 \sin \lambda^2)^{n-\sqrt{k}}} =$$

$$= -\kappa^{n+1} \left\{ \frac{\cos \lambda}{n+1} \left[\sin \lambda^n + \frac{n}{n+1} \sin \lambda^{n-2} + \frac{n(n-2)}{(n-1)(n-3)} \sin \lambda^{n-4} + \dots \right] - \right.$$

$$- \left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{k}-n)}{1} \right) \sin \varepsilon^2 \frac{\cos \lambda}{n+3} \left[\sin \lambda^{n+2} + \frac{n+2}{n+1} \sin \lambda^n + \frac{(n+2)n}{(n+1)(n-1)} \sin \lambda^{n-2} + \dots \right] +$$

$$\left. + \left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{k}-n)}{2} \right) \sin \varepsilon^4 \frac{\cos \lambda}{n+5} \left[\sin \lambda^{n+4} + \frac{n+4}{n+3} \sin \lambda^{n+2} + \frac{(n+4)(n+2)}{(n+3)(n+1)} \sin \lambda^{n+2} + \dots \right] \right\}$$

ist, so wird:

$$8. \int \sin \delta \cos (\delta \sqrt{k}) d\lambda = -\kappa \cos \lambda \left\{ \left[1 - \left(\frac{\frac{1}{2} \sqrt{k}}{1} \right) \frac{\kappa^2}{3} R_2 + \left(\frac{\frac{1}{2} \sqrt{k}}{2} \right) \frac{\kappa^4}{5} R_4 \dots \right] \right.$$

$$- \kappa^2 \left(\frac{\sqrt{k}}{2} \right) \frac{1}{3} R_2 - \left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{k}-2)}{1} \right) \frac{\kappa^2}{5} R_4 + \left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{k}-2)}{2} \right) \frac{\kappa^4}{7} R_6 - \dots \left. \right\}$$

$$+ \kappa^4 \left(\frac{\sqrt{k}}{4} \right) \left[\frac{1}{5} R_4 - \left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{k}-4)}{1} \right) \frac{\kappa^2}{7} R_6 + \left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{k}-4)}{2} \right) \frac{\kappa^4}{9} R_8 - \dots \right]$$

$$9. \int \sin \delta \sin (\delta \sqrt{k}) d\lambda = -\kappa^2 \cos \lambda \left\{ \left(\frac{\sqrt{k}}{1} \right) \left[\frac{1}{2} R_1 - \left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{k}-1)}{1} \right) \frac{\kappa^2}{4} R_3 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{k}-1)}{2} \right) \frac{\kappa^4}{6} R_5 \dots \right] \right. \tag{21}$$

$$- \kappa^2 \left(\frac{\sqrt{k}}{3} \right) \left[\frac{1}{4} R_3 - \left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{k}-3)}{1} \right) \frac{\kappa^2}{6} R_5 + \left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{k}-3)}{2} \right) \frac{\kappa^4}{8} R_7 \dots \right]$$

$$+ \kappa^4 \left(\frac{\sqrt{k}}{5} \right) \left[\frac{1}{6} R_5 - \left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{k}-5)}{1} \right) \frac{\kappa^2}{8} R_7 + \left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{k}-5)}{2} \right) \frac{\kappa^4}{10} R_9 \dots \right]$$

...

$$+ \lambda \left\{ \left(\frac{\sqrt{k}}{1} \right) \left[\frac{1}{2} \kappa^2 - \left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{k}-1)}{1} \right) \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \kappa^4 + \left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{k}-1)}{2} \right) \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \kappa^6 \dots \right] - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\sqrt{k}}{3} \right) \left[\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \kappa^4 - \left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{k}-3)}{1} \right) \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \kappa^6 \dots \right] + \left(\frac{\sqrt{k}}{4} \right) \left[\frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \kappa^6 \dots \right] \right\}$$

$$R_n = \sin \lambda^n + \frac{n}{n-1} \sin \lambda^{n-2} + \frac{n(n-2)}{(n-1)(n-3)} \sin \lambda^{n-4} + \dots$$

$$+ \frac{n(n-2) \dots \dots 4 \cdot 2}{(n-1)(n-3) \dots 3 \cdot 1} (\text{für gerade } n); + \frac{n(n-2) \dots \dots 5 \cdot 3}{(n-1)(n-3) \dots 4 \cdot 2} \sin \lambda (\text{für ungeraden}).$$

Damit erhält man die folgenden Verbindungen, wenn I_0, II_0, \dots die zwischen den Grenzen 0 und π genommenen Integrale I, II ... sind und die vollständigen elliptischen Integrale mit $F(\frac{1}{2} \pi) = F_0, E(\frac{1}{2} \pi) = E_0$, bezeichnet werden:

$$I = \int (1 - \sin \delta) d\lambda = \lambda + \kappa \cos \lambda; \quad I_0 = \int_0^\pi (1 - \sin \delta) d\lambda = \pi - 2 \kappa$$

$$II = \int (1 + \sin \delta) d\lambda = \lambda - \kappa \cos \lambda; \quad II_0 = \pi + 2 \kappa$$

$$III = \int \sin \delta^3 d\lambda = -\kappa^3 (\cos \lambda - \frac{1}{3} \cos \lambda^3); \quad III_0 = \frac{4}{3} \kappa^3$$

$$\begin{aligned} \pi \cdot IV &= \int \left(\frac{1}{2} \pi - \delta - \sin \delta \cos \delta \right) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \pi \lambda + \kappa \cos \lambda (\gamma_0 + \gamma_1 \kappa^2 \sin \lambda^2 + \gamma_2 \kappa^4 \sin \lambda^4 + \dots) + \\ &\quad + \frac{1}{2} [\kappa \cos \delta \cos \lambda + (1 - \kappa^2) \log_n (\kappa \cos \lambda + \cos \delta)] \\ \pi \cdot IV_0 &= \frac{1}{2} \pi^2 - 2 \kappa \gamma_0 - \kappa + \frac{1}{2} (1 - \kappa^2) [\log_n (1 - \kappa) - \log_n (1 + \kappa)] = \\ &= \frac{1}{2} \pi^2 - (2 \gamma_0 + 1) \kappa - \frac{1}{2} (1 - \kappa^2) (2 \kappa) \left(1 + \frac{1}{3} \kappa^2 + \frac{1}{5} \kappa^4 + \dots \right) \\ IV_0 &= \frac{1}{2} \pi - 4 \frac{\kappa}{\pi} J; \quad J = 1 - \frac{1}{1 \cdot 3^2} \kappa^2 - \frac{1}{3 \cdot 5^2} \kappa^4 - \frac{1}{5 \cdot 7^2} \kappa^6 - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int \cos \delta \left(1 + \frac{1}{2} \sin \delta^2 \cos \delta^2 \right) d\lambda = \\ &= E(\lambda) - \frac{1}{10} \kappa^2 \sin \lambda \cos \lambda \Delta \lambda^3 - \frac{1}{10} \kappa^2 \left(1 - \frac{4}{3} \kappa^2 \right) \sin \lambda \cos \lambda \Delta \lambda + \\ &\quad + \frac{1}{10} \left(1 - \frac{4}{3} \kappa^2 \right) (1 - \kappa^2) F(\lambda) - \frac{1}{10} \left[\left(1 - \frac{4}{3} \kappa^2 \right) (1 - 2 \kappa^2) - \kappa^2 \right] E(\lambda). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{2} \pi \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \kappa^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \kappa^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \kappa^6 + \dots \right] \\ E_0 &= \frac{1}{2} \pi \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \kappa^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \kappa^4 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \kappa^6 - \dots \right] \end{aligned}$$

Entwickelt man daher den Ausdruck V_0 nach Potenzen von κ , so erhält man, da $F(\pi) = 2 F_0$, $E(\pi) = 2 E_0$ ist:

$$\begin{aligned} V_0 &= 2 E_0 + \frac{1}{5} \left[\left(1 - \frac{7}{3} \kappa^2 + \frac{4}{3} \kappa^4 \right) F_0 - \left(1 - \frac{13}{3} \kappa^2 + \frac{8}{3} \kappa^4 \right) E_0 \right] = \\ &= \pi \left(1 - \frac{21}{64} \kappa^4 + \frac{5}{128} \kappa^6 \right) \end{aligned}$$

$$VI = \int \sin \delta \sin 2\delta d\lambda = -\frac{2}{3} \kappa^2 \sin \lambda \cos \lambda \Delta \lambda + \frac{2}{3} (1 - \kappa^2) F(\lambda) - \frac{2}{3} (1 - 2\kappa^2) E(\lambda)$$

$$VI_0 = \frac{4}{3} \left[(1 - \kappa^2) F_0 - (1 - 2\kappa^2) E_0 \right] = \pi \left(\kappa^2 - \frac{3}{8} \kappa^4 - \frac{5}{64} \kappa^6 \right)$$

$$VII = \int \left[1 - \cos(\delta \sqrt{k}) \right] \sin \delta d\lambda = \kappa \cos \lambda \left\{ - \left(\frac{1}{2} \sqrt{k} \right) \frac{\kappa^2}{3} R_2 - \dots - \kappa^2 \left(\frac{\sqrt{k}}{2} \right) \left(\frac{1}{3} R_2 - \dots \right) \right\}$$

$$VII_0 = \frac{2}{3} \kappa^3 k \left(1 + \frac{4}{15} \kappa^2 - \frac{1}{15} \kappa^4 k \right)$$

$$VIII = \int \sin \delta \sin(\delta \sqrt{k}) d\lambda \quad (\text{s. S. 240}).$$

$$VIII_0 = \frac{1}{2} \pi \cdot \kappa^2 \sqrt{k} \left[1 - \frac{1}{3} (\sqrt{k} - 1)(\sqrt{k} + 4) \kappa^2 \right]$$

Setzt man

$$\frac{\pi^2 r^2 m_0}{k_0 V^p} e^{-k} \cos \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k} \right) = N_1; \quad \frac{4}{3} \frac{\pi^2 r^2 m_0}{k_0 V^p} e^{-k} \mathfrak{M} \sqrt{k} = N_2.$$

so wird mit Rücksicht auf Absorption, mit den früheren Bezeichnungen

1) Die Werte von F_0 , E_0 und J für die Werte $\epsilon = 22^\circ 30'$ bis $24^\circ 30'$ sind (auf 8 Dez. gerechnet und auf 6 Dez. abgekürzt):

	$\frac{2}{\pi} F_0$	$\frac{2}{\pi} E_0$	J
22° 30'	1·039973	0·962316	0·983428
23° 0'	1·041839	0·960664	0·982710
23° 30'	1·043753	0·958979	0·981979
24° 0'	1·045714	0·957261	0·981234
24° 30'	1·047724	0·955511	0·980475

$$M_a^{(\lambda)} = N_1 \cdot I + N_2 \cdot IV$$

$$M_p^{(\lambda)} = N_1 II + \frac{1}{2} N_1 k \cdot \frac{III}{1 - \frac{1}{4} k} - \frac{1}{2} N_1 V \sqrt{k} \tan\left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}\right) \frac{VI}{1 - \frac{1}{4} k} - N_1 \frac{VII}{1 - \frac{1}{4} k} + N_1 \tan\left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}\right) \frac{VIII}{1 - \frac{1}{4} k} - N_2 \cdot IV + N_2 \cdot V$$

Die Integrale I bis VIII können, wenn nötig, zwischen den Grenzen λ_1 und λ_2 leicht erhalten werden; für die Werte W_p , W_a ergibt sich nach leichter Reduktion bis zu den Größen sechster Ordnung:

$$W_a = N_1 (\pi - 2 \kappa) + N_2 \left(\frac{1}{2} \pi - 4 \frac{\kappa}{\pi} J \right) \quad (22)$$

$$W_p = N_1 (\pi + 2 \kappa) + N_2 \left(\frac{1}{2} \pi + 4 \frac{\kappa}{\pi} J \right) - \text{Erg.}$$

$$\text{Erg} = + N_1 \left[\frac{1}{4} \pi^2 \kappa^2 k \left(\frac{3}{8} \kappa^2 \sqrt{k} - \frac{1}{24} \pi^2 k - \frac{7}{8} \kappa^2 + \frac{1}{96} \pi^2 k^2 + \frac{1}{32} \kappa^2 k - \frac{1}{64} \pi^2 \kappa^2 k \right) - \frac{8}{45} \kappa^5 k \right] + N_2 \pi \kappa^4 \left(\frac{21}{64} - \frac{5}{128} \kappa^2 \right).$$

Die letzten Ergänzungsglieder wurden nur angeschrieben, um den Fehler abzuschätzen, wenn in jedem der Ausdrücke nur die beiden ersten Hauptglieder berücksichtigt werden; dabei wird man sich für J ebenfalls auf die zweite Potenz von κ beschränken können und erhält $J = 1 - \frac{1}{9} \kappa^2$.

Die Formeln (20) können noch geschrieben werden:

$$W_a = (N_1 + \frac{1}{2} N_2) \pi - \left(N_1 + 2 \frac{N_2}{\pi} J \right) \cdot 2 \kappa$$

$$W_p = (N_1 + \frac{1}{2} N_2) \pi + \left(N_1 + 2 \frac{N_2}{\pi} J \right) \cdot 2 \kappa$$

Setzt man, um das Verhältnis der von den beiden Halbkugeln erhaltenen Wärmemengen zu finden, $(2J : \pi) = \frac{2}{3}$, und $(\frac{1}{2} N_2 : N_1) = \nu$, so erhält man

$$\nu = \frac{W_p}{W_a} = \frac{(1 + \nu) \pi + (1 + \frac{2}{3} \nu) 2 \kappa}{(1 + \nu) \pi - (1 + \frac{2}{3} \nu) 2 \kappa} = \frac{\pi + (1 + \frac{1}{3} \nu) 2 \kappa}{\pi - (1 + \frac{1}{3} \nu) 2 \kappa} \quad (23)$$

Wie man sieht, wird durch die Absorption der Einfluß der Neigung der Ekliptik etwas erheblicher. Allerdings wurde der Transmissionskoeffizient $K_{h,x}$ bei dieser Ableitung als konstant angenommen, während er für die verschiedenen Tages- und Jahreszeiten verschieden ist; allein, da im Sommer die Erwärmung eine stärkere, die Absorption wegen des größeren absoluten Feuchtigkeitsgehaltes eine größere, im Winter hingegen der Einfluß der Wolken bedeutender sein dürfte, so wird man annehmen können, daß im Mittel der Einfluß herausfällt.

Da

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{N_2}{N_1} = \frac{2}{3} \frac{\mathfrak{M} \sqrt{k}}{\cos(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k})}$$

ist, so erhält man für $\sqrt{k} = 0.2$ und 0.5 , welchen Zahlen der Transmissionskoeffizient $K_h = 0.96$ und 0.78 entspricht mit den S. 188 gegebenen Zahlen für $\mathfrak{M} : \nu = 0.096$, bzw. 0.267 und damit für $\epsilon = 23^\circ 27'$ das Verhältnis $\nu = 1.708$, bzw. 1.762 , während es für $k = 0$ gleich 1.679 wäre. Die Vergrößerung von k , welche (entsprechend einer Verminderung des Transmissionskoeffizienten K) einer Zunahme der Absorption entspricht, wird daher den Unterschied der von den beiden Hemisphären erhaltenen Wärmemengen erhöhen; je größer die

Absorption, desto weniger Wärme erhält die apolare Hälfte. Da für das zweite Halbjahr die Verhältnisse die umgekehrten sind, so folgt daraus: daß die Zunahme des Wasserdampfes, ebenso aber auch die Zunahme des Kohlen-säuregehaltes die Unterschiede der im Sommer und Winter von der Sonne erhaltenen Wärmemenge, die Amplitude der Wärmeschwankung vergrößern wird. Ob eine Vergrößerung oder eine Verkleinerung der Amplitude der Wärmeschwankung die Vorbedingungen für eine Vereisung geben, ist verschiedentlich beantwortet worden. Für die durch die Absorption bedingte Veränderung des hier auftretenden Verhältnisses v ist dies allerdings von geringer Wichtigkeit, da der Einfluß der geänderten Absorption, der sich in dem Koeffizienten L (Formel 29, S. 187) zeigt, wesentlich überwiegt. Da dieser Umstand aber gerade für die Beurteilung der Verhältnisse bei einer Änderung der Schiefe der Ekliptik von besonderer Wichtigkeit ist, so wird im nächsten Kapitel hierauf näher eingegangen. ¹⁾

B. Die Aufgabe, für irgend einen Punkt die im Verlaufe gewisser Zeiträume erhaltenen Wärmemengen zu finden, kann in derselben Weise gelöst werden. Hiebei muß man wieder die Punkte innerhalb der Zone des beständigen Auf- und Unterganges von denjenigen trennen, in denen die Sonne zirkumpolar werden kann. Es ist zunächst ohne Rücksicht auf Absorption:

$$d m_1 = 2 \pi m_0 \frac{a^2}{R^2} \sin \delta \sin \varphi d T$$

$$d m_2 = 2 m_0 \frac{a^2}{R^2} \sin \delta \sin \varphi (t_0 - \tan g t_0) d T = 2 m_0 \frac{a^2}{R^2} (\sin \delta \sin \varphi t_0 + \cos \delta \cos \varphi \sin t_0) d T$$

und da wegen: $\sin \delta = \sin \epsilon \sin \lambda$; $\cos t_0 = - \tan g \varphi \tan g \delta$

$$\sin t_0^2 = \frac{\cos \varphi^2 \cos \delta^2 - \sin \varphi^2 \sin \delta^2}{\cos \varphi^2 \cos \delta^2}$$

$$\cos \delta^2 \sin t_0^2 = \frac{1}{\cos \varphi^2} (\cos \varphi^2 - \sin \delta^2) = 1 - \frac{\sin \epsilon^2}{\cos \varphi^2} \sin \lambda^2$$

ist, so wird

$$d m_1 = C \pi \sin \delta \sin \varphi d \lambda = C \pi \sin \varphi \sin \epsilon \sin \lambda d \lambda$$

$$d m_2 = C [\sin \varphi \sin \epsilon \sin \lambda t_0 + \cos \varphi \sqrt{1 - \kappa^2 \sin \lambda^2}] d \lambda$$

$$C = \frac{2 m_0 a^2}{k_0 \sqrt{\rho}}; \quad \kappa = \frac{\sin \epsilon}{\cos \varphi}$$

Der Ausdruck für m_1 läßt sich sofort integrieren und gibt, wenn $\lambda_2 - \lambda_1$ irgend eine Winkelbewegung innerhalb der Zeit der Mitternachtssonne darstellt:

$$m_1 = C \pi \sin \varphi \sin \epsilon [\cos \lambda_2 - \cos \lambda_1].$$

Der erste Ausdruck in m_2 gibt durch partielle Integration

$$\int \sin \lambda t_0 d \lambda = - t_0 \cos \lambda + \int \cos \lambda d t_0$$

daher wegen

$$\sin t_0 d t_0 = \tan g \varphi \sec \delta^2 d \delta \quad \text{und} \quad \cos \delta d \delta = \sin \epsilon \cos \lambda d \lambda$$

$$\sin t_0 d t_0 = \tan g \varphi \sin \epsilon \sec \delta^3 \cos \lambda d \lambda$$

¹⁾ S. Seite 267.

$$\begin{aligned} \int \cos \lambda d t_0 &= \operatorname{tang} \varphi \sin \epsilon \int \frac{\cos \lambda^2 d \lambda}{\sin t_0 \cos \delta^3} = \\ &= \sin \varphi \sin \epsilon \int \frac{\cos \lambda^2 d \lambda}{(1 - \sin \epsilon^2 \sin \lambda^2) \sqrt{\cos \varphi^2 - \sin \epsilon^2 \sin \lambda^2}} = \\ &= \sin \varphi \sin \epsilon \left[\int \frac{d \lambda}{\sin \epsilon^2 \sqrt{\cos \varphi^2 - \sin \epsilon^2 \sin \lambda^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \cot \epsilon^2 \int \frac{d \lambda}{(1 - \sin \epsilon^2 \sin \lambda^2) \sqrt{\cos \varphi^2 - \sin \epsilon^2 \sin \lambda^2}} \right]. \end{aligned}$$

Es wird daher jetzt mit dem hier von φ abhängigen Werte von κ , wenn noch das elliptische Integral der dritten Gattung

$$\Pi(\lambda, m) = \int_0^\lambda \frac{d \lambda}{(1 - m^2 \sin^2 \lambda^2) \Delta \lambda}$$

eingeführt wird.

$$\begin{aligned} m_2 &= -C \sin \varphi \sin \epsilon \cos \lambda t_0 + C \sin \varphi \operatorname{tang} \varphi F(\lambda) + C \cos \varphi E(\lambda) - \\ &\quad - C \sin \varphi^2 \cos \epsilon^2 \Pi(\lambda, \sin \epsilon) \end{aligned}$$

Für die Berechnung der elliptischen Transzendenten ist zu bemerken, daß für die Integrale erster und zweiter Gattung, $F(\lambda)$ und $E(\lambda)$, Legendre Tafeln berechnete, ¹⁾ wobei jedoch zu beachten ist, daß der Modul $\kappa < 1$ sein muß. Hier wird dieses solange der Fall sein, als $\sin \epsilon < \cos \varphi$ ist, d. h.

$$\epsilon < 90^\circ - \varphi \text{ oder } \varphi < 90^\circ - \epsilon.$$

Für die ganze heiße und gemäßigte Zone werden also die Formeln unmittelbar anwendbar; für den Grenzfall $\varphi = 90^\circ - \epsilon$ wird $\kappa = 1$ und es wird

$$\begin{aligned} \kappa = 1: \quad F(\lambda) &= \int \sec \lambda d \lambda = \log_n \operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2} \lambda) \\ E(\lambda) &= \int \cos \lambda d \lambda = \sin \lambda. \end{aligned}$$

Das Integral dritter Gattung läßt sich durch die Jacobi'schen Θ -Funktionen ausdrücken. Die Formeln hiefür sollen in Kürze zusammengestellt werden:

Setzt man

$$F(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{d \lambda}{\Delta \lambda} = u; \quad \lambda = \operatorname{am} u,$$

$$n = -\sin \epsilon^2 = -\kappa^2 \sin \operatorname{am} a^2 = -\sin \epsilon^2 \sec \varphi^2 \sin \operatorname{am} a^2$$

daher

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{am} a^2 &= \cos \varphi^2, \quad \sin \operatorname{am} a = \sin (90^\circ - \varphi), \quad \operatorname{am} a = 90^\circ - \varphi = \alpha \\ a &= F(90^\circ - \varphi) \end{aligned}$$

so wird ²⁾

$$J = \int_0^\lambda \frac{d \lambda}{(1 - \sin \epsilon^2 \sin \lambda^2) \Delta \lambda} = \int_0^\lambda \frac{d \lambda}{(1 + n \sin \lambda^2) \Delta \lambda} = u + \frac{\operatorname{tang} \operatorname{am} a}{\Delta \operatorname{am} a} \Pi(u, a)$$

wobei das Jacobi'sche Integral dritter Gattung ³⁾

$$\Pi(u, a) = u Z(a) + \frac{1}{2} \log_n \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

$$Z(u) = E(u) - \frac{E}{K} u$$

¹⁾ Traité des fonctions elliptiques.

²⁾ S. z. B. Durège, Theorie der elliptischen Funktionen S. 288, 1. Fall.

³⁾ Ibid. S. S. 276 und 261.

$$\Theta(u) = 1 - 2q \cos \frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi u}{K} - 2q^9 \cos \frac{3\pi u}{K} + 2q^{16} \cos \frac{4\pi u}{K} - \dots$$

$$\kappa^2 + \kappa'^2 = 1; \quad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}};$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda^2}}; \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \kappa'^2 \sin^2 \lambda^2}}; \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda^2} d\lambda.$$

ist. Da nun hier

$$\frac{\text{tang am } a}{\Delta \text{ am } a} = \frac{\text{tang}(90^\circ - \varphi)}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2(90^\circ - \varphi)}} = \frac{\cot \varphi}{\cos \epsilon}$$

ist, so wird

$$J = F(\lambda) \left\{ 1 + \frac{\cot \varphi}{\cos \epsilon} \left[E(\alpha) - \frac{E}{K} \alpha \right] + \frac{1}{2} \log_a \frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)} \right\}.$$

Da die Werte von q und K durch κ bestimmt sind, aber die zur Berechnung von K zweckmäßigsten Reihen q selbst enthalten, so würde die Berechnung nur auf indirektem Wege möglich sein; es ist¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{2K}{\pi} &= 1 + 4 \left\{ \frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \dots \right\} = \\ &= \{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} \dots\}^2 \\ \kappa &= 4 \sqrt{q} \left(\frac{1+q^2}{1+q} \frac{1+q^4}{1+q^3} \frac{1+q^6}{1+q^5} \frac{1+q^8}{1+q^7} \dots \right)^4. \end{aligned}$$

q ist immer sehr klein; in erster Näherung $\frac{1}{16} \kappa^2$. Um die indirekte Rechnung zu umgehen, hat Bohlin Tafeln für q und $\log K$ mit dem Argumente Θ , bestimmt durch $\sin \Theta = \kappa$, berechnet.²⁾ Zur Benützung derselben hat man also

$$\sin \Theta = \sin \epsilon \sec \varphi;$$

mit dem Argumente Θ aus der Bohlin'schen Tafel q und K , dann wird³⁾

$$\begin{aligned} E &= K - \left(\frac{\pi}{2\kappa}\right)^2 \cdot 8K \left\{ \frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} - \dots \right\} \\ \cos \varphi &= \frac{\pi}{2\kappa K} \left\{ \frac{4\sqrt{q}}{1-q} \sin \frac{\pi a}{2K} + \frac{4\sqrt{q^3}}{1-q^3} \sin \frac{3\pi a}{2K} + \frac{4\sqrt{q^5}}{1-q^5} \sin \frac{5\pi a}{2K} + \dots \right\} \\ \sin \lambda &= \frac{\pi}{2\kappa K} \left\{ \frac{4\sqrt{q}}{1-q} \sin \frac{\pi u}{2K} + \frac{4\sqrt{q^3}}{1-q^3} \sin \frac{3\pi u}{2K} + \frac{4\sqrt{q^5}}{1-q^5} \sin \frac{5\pi u}{2K} + \dots \right\} \end{aligned}$$

(daher statt der strengen Gleichungen $\sin \text{am } a = \cos \varphi$, $\sin \text{am } u = \sin \lambda$ zur Bestimmung von a und u die ersten Näherungen

$$\sin \frac{\pi a}{2K} = \frac{2K}{\pi} \cos \varphi, \quad \sin \frac{\pi u}{2K} = \frac{2K}{\pi} \sin \lambda$$

oder $a = F(90^\circ - \varphi)$, $u = F(\lambda)$ aus den Tafeln von Legendre); dann folgt:

¹⁾ Durège, l. c. S. S. 243, 271 und 235.

²⁾ Astronom. Nachrichten Bd. 138, S. 97.

³⁾ Durège, l. c. S. S. 260 und 252.

$$\Theta(u \mp a) = 1 - 2q \cos \pi \frac{u \mp a}{K} + 2q^4 \cos 2\pi \frac{u \mp a}{K} - 2q^9 \cos 3\pi \frac{u \mp a}{K} \dots$$

$$E(a) - \frac{Ea}{K} = E_0 = \frac{4\pi}{2K} \left\{ \frac{q}{1-q^2} \sin \frac{\pi a}{K} + \frac{q^2}{1-q^4} \sin 2 \frac{\pi a}{K} + \frac{q^3}{1-q^6} \sin 3 \frac{\pi a}{K} \dots \right\}$$

$$J = u \left[1 + E_0 \frac{\cot \varphi}{\cos \varepsilon} \right] + \frac{1}{2} \log_n \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

$$F(\lambda) = u$$

$$E(\lambda) = \frac{E}{K} u + \frac{4\pi}{2K} \left\{ \frac{q}{1-q^2} \sin \frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4} \sin 2 \frac{\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6} \sin 3 \frac{\pi u}{K} \dots \right\}$$

Wegen $m^2 = \sin^2 \varepsilon = 0.158$, $m^4 = 0.025$, $m^6 = 0.004$ läßt sich hier übrigens eine rasch konvergente Reihe für das Integral dritter Gattung aufstellen. Es ist nämlich

$$\Pi(\lambda, m) = \int_0^\lambda \left[1 + m^2 \sin^2 \lambda + m^4 \sin^4 \lambda + m^6 \sin^6 \lambda + \dots \right] \frac{d\lambda}{\Delta \lambda}$$

Um für diese Integrale eine Rekursionsformel zu erhalten, hat man: ¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} [\sin \lambda^n \cos \lambda \Delta \lambda] &= \frac{1}{\Delta \lambda} [n \sin \lambda^{n-1} (1 - \sin^2 \lambda) (1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda) - \\ &\quad - \sin \lambda^{n+1} (1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda) - \kappa^2 \sin \lambda^{n+1} (1 - \sin^2 \lambda)] = \\ &= \frac{1}{\Delta \lambda} [n \sin \lambda^{n-1} - (1 + \kappa^2) (1 + n) \sin \lambda^{n+1} + \kappa^2 (n + 2) \sin \lambda^{n+3}] \end{aligned}$$

und daraus die Rekursionsformel

$$\int \frac{\sin \lambda^n}{\Delta \lambda} d\lambda = \frac{\sin \lambda^{n-3} \cos \lambda \Delta \lambda}{\kappa^2 (n-1)} + \frac{n-2}{n} \frac{1+\kappa^2}{1-\kappa^2} \int \frac{\sin \lambda^{n-2}}{\Delta \lambda} d\lambda - \frac{n-3}{n-1} \frac{1}{\kappa^2} \int \frac{\sin \lambda^{n-4}}{\Delta \lambda} d\lambda$$

Diese Formel ist gültig bis $n=4$ (und $n=3$, welches hier nicht vorkommt) einschließlic; für $n=2$ wird

$$\int \frac{\sin \lambda^2}{\Delta \lambda} d\lambda = \frac{1}{\kappa^2} \int \frac{1 - (1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda)}{\Delta \lambda} d\lambda = \frac{1}{\kappa^2} \int \frac{d\lambda}{\Delta \lambda} - \frac{1}{\kappa^2} \int \Delta \lambda d\lambda$$

Dabei tritt wohl κ^2 im Nenner auf; da aber stets m^2 in den Zähler kommt, so wird der resultierende Faktor

$$\left(\frac{m^2}{\kappa^2} \right)^n = \cos \varphi^{2n};$$

die Formel ist daher für höhere Breiten brauchbar, in der Nähe des Äquators aber zu wenig konvergent. Für die Äquatorialgegenden kann man setzen

$$1 - m^2 \sin^2 \lambda = 1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda + (\kappa^2 - m^2) \sin^2 \lambda = (1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda) \left[1 + \frac{\sin^2 \varepsilon \tan^2 \varphi^2}{\Delta \lambda^2} \right]$$

$$\frac{1}{1 - m^2 \sin^2 \lambda} = \frac{1}{\Delta \lambda^2} \left(1 - \frac{\sin^2 \varepsilon \tan^2 \varphi^2}{\Delta \lambda^2} + \frac{\sin^4 \varepsilon \tan^4 \varphi^4}{\Delta \lambda^4} - \dots \right),$$

und für die hier auftretenden Integrale erhält man eine Rekursionsformel auf folgende Art:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\sin \lambda \cos \lambda}{\Delta \lambda^n} \right] = \frac{\cos \lambda^2 - \sin \lambda^2}{\Delta \lambda^n} + n \kappa^2 \frac{\sin \lambda^2 \cos \lambda^2}{\Delta \lambda^{n+2}},$$

¹⁾ Über die direkte Ermittlung dieser Integrale siehe auch meine Abhandlung „Einige Beziehungen zwischen den Integralen der elliptischen Funktionen“, Archiv für Mathematik von Grunert 1881, S. 343.

und wegen

$$\begin{aligned} \kappa^2 \sin \lambda^2 &= 1 - \Delta \lambda^2; \quad \kappa^2 \cos \lambda^2 = \Delta \lambda^2 - (1 - \kappa^2) \\ \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\sin \lambda \cos \lambda}{\Delta \lambda^n} \right] &= \frac{1}{\Delta \lambda^{n+2}} \left[\frac{2 \Delta \lambda^2 - 2 + \kappa^2}{\kappa^2} + n \frac{(1 - \Delta \lambda^2) [\Delta \lambda^2 - (1 - \kappa^2)]}{\kappa^2} \right] = \\ &= \frac{1}{\kappa^2 \Delta \lambda^{n+2}} [-n(1 - \kappa^2) + (n-1)(2 - \kappa^2) \Delta \lambda^2 - (n-2) \Delta \lambda^4], \end{aligned}$$

demnach, wenn $n = 2n' - 1$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\lambda}{\Delta \lambda^{2n'+1}} &= \int \frac{d\lambda}{(1 - \kappa^2 \sin \lambda^2)^n \sqrt{1 - \kappa^2 \sin \lambda^2}} = - \frac{\kappa^2}{(2n-1)(1-\kappa^2)} \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{\Delta \lambda^{2n-1}} + \\ &+ \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2-\kappa^2}{1-\kappa^2} \int \frac{d\lambda}{\Delta \lambda^{2n-1}} - \frac{2n-3}{2n-1} \frac{1}{1-\kappa^2} \int \frac{d\lambda}{\Delta \lambda^{2n-3}}. \end{aligned}$$

Diese Formel ist auch gültig für $n=1$, wobei:

$$\int \frac{d\lambda}{\Delta \lambda^3} = - \frac{\kappa^2}{1-\kappa^2} \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{\Delta \lambda} + \frac{1}{1-\kappa^2} \int \Delta \lambda d\lambda$$

wie man sich durch unmittelbares Differenzieren überzeugt; und diese Formeln können bis etwa $\varphi = 45^\circ$ Verwendung finden.

Für $\varphi > 90^\circ - \varepsilon$, d. h. für Punkte der kalten Zone ist $\varepsilon > 90^\circ - \varphi$ dann wird für $\delta > 90^\circ - \varphi$ der bereits abgeleitete Wert m_1 gültig; für $\delta \leq 90^\circ - \varphi$ ist aber $\kappa > 1$ und es ist daher noch eine Transformation nötig.

Setzt man

$$\kappa \sin \lambda = \sin l, \quad \kappa \kappa_0 = 1,$$

so wird

$$\kappa_0 = \frac{\cos \varphi}{\sin \varepsilon} < 1$$

$$\Delta \lambda = \cos l, \quad \cos \lambda = \sqrt{1 - \kappa_0^2 \sin^2 l^2}, \quad \kappa \cos \lambda d\lambda = \cos l dl,$$

$$\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin \lambda^2}} = \kappa_0 \int_0^l \frac{dl}{\sqrt{1 - \kappa_0^2 \sin^2 l^2}} \tag{24}$$

$$\int_0^\lambda \Delta \lambda d\lambda = \kappa_0 \int_0^l \frac{\cos l^2 dl}{\Delta l} = \frac{1}{\kappa_0} \int \Delta l dl - \frac{1 - \kappa_0^2}{\kappa_0} \int \frac{dl}{\Delta l}$$

$$\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{(1 - \sin^2 \varepsilon \sin \lambda^2) \Delta \lambda} = \kappa_0 \int_0^l \frac{dl}{(1 - \kappa_0^2 \sin^2 \varepsilon \sin^2 l^2) \Delta l} = \kappa_0 \int_0^l \frac{dl}{(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 l^2) \Delta l}$$

und die Behandlung dieser Integrale ist wieder in derselben Weise wie früher vorzunehmen. Für Zwischenzeiten, die teilweise dem ersten, teilweise dem zweiten Zeitraume (Zirkumpolarität und Sonnenuntergang) angehören, sind die Wärmemengen getrennt zu berechnen und zu addieren.

Wiener berechnete nach ähnlichen Formeln die Wärmemengen für jeden zehnten Grad der geographischen Breite und für die Zeiträume zwischen den Sonnenlängen $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ \dots$. Ich gebe diese Resultate in einer etwas anderen Zusammenfassung, in der von Wiener gewählten Einheit.¹⁾

¹⁾ Für das ganze Jahr die Summe für eine Halbkugel 218932 (die überflüssigen Nullen weggelassen). Die Daten giltig für 1874/5.

Nördliche Halbkugel.

λ	315°	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
δ	-16°20'9	0°	+16°20'9	+23°27'5	+16°20'9	0°	-16°20'9	-23°27'5	-16°20'9
Daten	II 4-18	III 20-78	V 5-73	VI 21-61	VIII 7-76	IX 23-22	XI 7-56	XII 21-95	II 4-18
Dauer	44-83	45-95	46-88	47-15	46-46	45-34	44-39	44-23	Tage
									Halbjahr
$\varphi = 0^\circ$	3921	3921	3712	3712	3921	3921	3712	3712	15266
10	3703	4025	4053	4053	4025	3703	3275	3275	15056
20	3375	4010	4288	4288	4010	3375	2756	2756	14429
30	2954	3882	4410	4410	3882	2954	2170	2170	13416
40	2440	3633	4434	4434	3633	2440	1554	1554	12061
50	1858	3290	4356	4356	3290	1858	934	934	10438
60	1243	2853	4233	4233	2853	1243	355	355	8684
70	633	2377	4216	4216	2377	633	6	6	7232
80	154	1981	4413	4413	1981	154	0	0	6548
90	0	1856	4480	4480	1856	0	0	0	6336

λ	135°	180°	225°	270°	315°	0°	45°	90°	135°
Daten	VIII 7-76	IX 23-22	XI 7-56	XII 21-95	II 4-18	III 20-78	V 5-73	VI 21-61	VIII 7-76
Dauer	46-46	45-34	44-39	44-23	44-83	45-95	46-88	47-15	Tage

Südliche Halbkugel.

Faßt man in dieser Tabelle die Kolonnen 0° bis 90°, 90° bis 180°, 180° bis 270° und 270° bis 360° zusammen, so erhält man die Wärmemengen für die „astronomischen Jahreszeiten“; faßt man hingegen die Kolonnen 315° bis 45°, 45° bis 135°, 135° bis 225°, 225° bis 315° zusammen, so ergibt dies die zu den astronomischen Trennungspunkten symmetrisch gelegenen Zeiten, also eine Art klimatischer Jahreszeiten, bei denen jedoch auf die thermische Verschiebung nicht Rücksicht genommen ist.

Auch hier zeigt sich, daß in den Sommermonaten Mai bis August der Nordpol, November bis Februar der Südpol ein Maximum der Bestrahlung hat; in diesen Monaten fällt das Maximum auf etwa $\pm 38^\circ$ Breite und ein zweites auf den Pol; in den angrenzenden Oktanten in etwa $\pm 15^\circ$ Breite, während in den 4 Winteroktanten das Maximum auf den Äquator fällt. Die tägliche Bestrahlung ist aber nicht proportional diesen Zahlen, da sie sich auf verschiedenen lange Intervalle verteilt.

Mit der Berechnung der von der Sonne auffallenden Wärmemenge ist aber noch nicht die daselbst herrschende Temperatur bestimmt. Diese selbst hängt noch von der Absorption und Reflexion des betroffenen Bereiches ab. Überdies ist auch der Umstand nicht zu vergessen, daß die absorbierte Menge in den vereisten Gegenden zur Schmelzung des Eises verwendet wird; ohne Eiskappe würde daher die Temperatur dieser Regionen rasch eine derartige sein, daß daselbst Pflanzenwuchs ermöglicht würde. Drygalsky berichtet¹⁾, daß die Sonnenstrahlen in den Polarländern schwarze Flächen auf 40 bis 50° C. erwärmen, während die Lufttemperaturen sich auf 8 bis 10° erhalten.

Hiefür ist aber wesentlich das Material von Wichtigkeit. Erde und Wasser strahlen verschiedene Mengen zurück und die absorbierte Wärmemenge wird

¹⁾ Grönlandexpedition S. 33.

verschiedene Erwärmungen erzeugen nach Maßgabe der spezifischen Wärme des Materiales. Für den ersteren Umstand ist die Wärmelbedo maßgebend, d. i. das Verhältnis der reflektierten zur auffallenden Wärmemenge. Wenn auch die reflektierten Strahlen neuerdings eine Reflexion in der Luft erfahren, und zur Erde zurückkehren, so wird infolge der zerstreuten Reflexion diese Menge bedeutend geringer, aber im allgemeinen derselbe Bruchteil der zuerst absorbierten Wärme sein, so daß die Wärmemenge nur eine proportionale Vergrößerung gegenüber derjenigen erfahren würde, welche ohne Rücksicht auf den Zuwachs durch die reflektierten und wieder zurückkehrenden Strahlen erhalten würde. Dieser Umstand wird aber von Wichtigkeit, wenn man auf die Absorption in der Luft Rücksicht nimmt; es wird, wenn A ein von der Örtlichkeit abhängiger Faktor ist, die für die Erwärmung des Bodens zur Geltung kommende Wärmemenge

$$A \cdot m_0 K_{h,z} \cos J$$

sein, und die Erwärmung des Bodens kann ebenfalls durch diesen Ausdruck dargestellt werden, wenn A ein von der Albedo und der spezifischen Wärme abhängiger Faktor ist; die zerstreute Reflexion in der Luft, welche eine Rückkehr der von der Erde ausgestrahlten Wärme bewirkt, wird den Faktor A etwas vergrößern, kann aber infolgedessen ebenfalls bereits in dem Koeffizienten A enthalten gedacht werden.

W. Zenker ¹⁾ schlägt statt des Weges der allgemeinen Integration einen mehr empirischen, numerischen ein. Er berechnet die Intensität für die Zenitdistanz z nach der Formel

$$J_z = \frac{1}{2} \left(p^{\sec z} + \frac{q}{q + \sec z} \right);$$

wobei er für p den Koeffizienten von Bouguer $p = \frac{7}{9}$ annimmt, und q so wählt, daß für $z = 0$ die beiden Summanden gleich werden, also $q = p : (1 - p)$. Damit wird

$$J_z = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{7}{9} \right)^{\sec z} + \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 5 + \sec z} \right].$$

Hiermit folgen dann die in der Zenitdistanz z auf die horizontale Fläche auffallenden Wärmemengen gleich $J_z \cos z$. Diese Werte, von 10^0 zu 10^0 der Zenitdistanz berechnet, sind die Zahlen III in seiner Tabelle XV A:

für $z = 0^0$,	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	
$J_z \cos z =$	0·778	0·759	0·716	0·646	0·553	0·440	0·310	0·175	0·054.

Von den durch die Atmosphäre verursachten Verlusten

$$\cos z - J_z \cos z = (1 - J_z) \cos z$$

z. B. für $60^0 : 0 \cdot 500 - 0 \cdot 310 = 0 \cdot 190$ nimmt er an, daß $0 \cdot 4$ in der Luft absorbiert werden (für $60^0 : 0 \cdot 076$) und von diesen etwa $\frac{2}{3}$ wieder zur Erde gelangen ²⁾, so daß $0 \cdot 267 (1 - J_z) \cos z$ (Zenkers Kolonne VI der Tafel XV A) als zweite zur Erde reflektierte Wärme sich zu den Zahlen der Kolonne III addieren.

¹⁾ Die Verteilung der Wärme auf der Erdoberfläche. Berlin 1888.

²⁾ Der Koeffizient ist nicht ganz konstant; er ist nach einer Tafel von Clausius zwischen $0 \cdot 664 (z = 0^0)$ und $0 \cdot 615 (z = 80^0)$.

Weiter nimmt er an, daß durch den „hellen Schein“ um die Sonne, welcher einer diffusen Reflexion entspricht, die zur Erde gelangenden Wärmestrahlen um 5⁰/₁₀ vermehrt werden, so daß zur Summe III + VI noch 0·05 $J_z \cos z$ (Kolonne VIII) hinzuzufügen ist.¹⁾

Von den Strahlen der ersten Reflexion $(1 - J_z) \cos z - 0·4 (1 - J_z) \cos z - 0·05 J_z \cos z$ kommt neuerdings ein gewisser Bruchteil zur Erde und schließlich werden in Tabelle XV B, getrennt für das Meer, Land und den Schnee die durch Reflexion von diesen Teilen zurückgeworfenen Wärmemengen in Abzug gebracht, so daß sich für die zur Erde gelangenden Wärmemengen gewisse Zahlenreihen ergeben, die empirisch durch die Formeln dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \text{für das Meer} & \quad \cos z - 0·1040 \\ \text{für das Land} & \quad 0·97 \cos z - 0·0740 \\ \text{für den Schnee} & \quad 0·8 \cos z - 0·0460, \end{aligned}$$

die letzte Formel für die polare Kappe zwischen $\pm 50^\circ$ Breite und den Pol giltig.²⁾ Dadurch ist nun die weitere Berechnung ganz wesentlich vereinfacht. Es ist daher allgemein die in der Zenitdistanz z zur Erde gelangende Wärmemenge dargestellt durch

$$dm' = m_0 (a \cos z - b) dt.$$

Ist m der früher aus $dm = m_0 \cos z dt$ folgende Wert, so wird

$$\begin{aligned} dm' &= a dm - b m_0 dt \\ m' &= a m - b m_0 t \end{aligned}$$

wobei t für die zirkumpolaren Regionen 2π , für die nichtzirkumpolaren gleich dem Tagebogen $2t_0$ ist. Hiemit erhält man sofort:

Für einen Punkt der zirkumpolaren Region in der Breite φ , beim Sonnenstand δ :

$$m_1' = 2 a \pi m_0 \sin \delta \sin \varphi - 2 \pi b m_0$$

für einen Punkt der nichtzirkumpolaren Region:

$$\begin{aligned} m_2' &= 2 a m_0 \sin \varphi \sin \delta (t_0 - \tan \varphi t_0) - 2 b t_0 m_0 = \\ &= 2 (a m_0 \sin \varphi \sin \delta - b m_0) t_0 + 2 a m_0 \cos \varphi \cos \delta \sin t_0. \end{aligned}$$

¹⁾ Welche Wichtigkeit die durch zerstreute Reflexion auf die Erde gelangende Wärme hat, läßt sich leicht durch die Betrachtung geneigter Flächen erkennen. Für eine Fläche, deren Neigung gegen den Horizont i im Azimut a ist, ist die auf die Flächeneinheit in der Minute auffallende Wärmemenge durch Formel 2, S. 226, gegeben. Für die Bestimmung der Wärmemenge in einem Tage wäre die Integration bei östlich geneigten Flächen von dem Stundenwinkel t_0 bis zu einem solchen t_1 auszuführen, der sich aus dem Schnitt des Paralkreises der Sonne mit der geneigten Fläche ergibt oder umgekehrt bei westlich abgeschrägten Flächen. Bei nach Norden abgedachten Flächen kann es nun vorkommen, daß überhaupt keine direkten Sonnenstrahlen auffallen; es wird dies z. B. für alle jene Flächen der Fall sein, für welche $a = 180^\circ$, $i > 90^\circ - \varphi + \delta$ ist. Theoretisch würde für einen solchen Fall sich $m = 0$ ergeben; aber dennoch kann nicht behauptet werden, daß solche Flächen überhaupt keine Wärme erhalten.

Vergleicht man die Temperaturen „in der Sonne“ und „im Schatten“, so erhält man einen Maßstab für die Größe dieser Wirkung, denn die Temperatur „im Schatten“ ist eine Folge der in den Schattenraum durch zerstreute Reflexion gelangenden Wärmestrahlung. Da aber diese indirekte Strahlung den direkt von der Sonne bestrahlten Gebieten entzogen wird, so kann dieselbe für die Analyse der Erwärmung geneigter Flächen nicht in der von Zenker gewählten Weise berücksichtigt werden. Der Vorgang ist ein viel komplizierterer und der gegenwärtigen Analyse kaum noch zugänglich.

²⁾ l. c. S. 62.

Damit wird das Verhältnis der auf den Pol und auf irgend einen Punkt des Äquators auffallenden Wärmemengen :

$$v' = \frac{2 a \pi \sin \delta - 2 \pi b}{2 a \cos \delta \sin t_0 - 2 b t_0} = \pi \cdot \frac{a \sin \delta - b}{a \cos \delta - \frac{1}{2} \pi b}$$

für $\delta = 23^{\circ}27'$, gleich 1.225, also etwas kleiner als ohne Absorption.

Unter der Voraussetzung, daß die sämtlichen angebrachten Korrekturen mit ihrem richtigen Werte eingeführt wurden, hätte das Resultat, insofern demselben theoretische Erwägungen zu Grunde liegen und die erhaltenen einfachen Formeln einen Ersatz für den in Wirklichkeit außerordentlich komplizierten Zusammenhang bieten, gewiß seine Berechtigung. Die auf fünf Dezimalen berechnete Tafel XVI¹⁾ trägt aber diesen Verhältnissen nicht Rechnung, da sie mit ganz anderen, nicht näher begründeten Konstanten $a = 0.95$, $b = 0.057$ berechnet ist; für welche die Abweichungen der Formel von den wahren Werten bis zu 1% reichen, d. i. zu Beträgen, die manche der berücksichtigten Korrekturen weit übersteigen.

Die streng mathematische Lösung der Aufgabe, die einem Punkte in gewissen Zeitabschnitten zugeführte Wärmemenge zu ermitteln, muß von den Formeln (10) und (11), S. 231, ausgehen. Wengleich die Integrationen recht umständlich und die Resultate wenig übersichtlich werden, so ist dieser Weg dennoch nicht zu umgehen, wenn man einen Überblick über die auf diesem Wege zu gewinnenden Aufschlüsse erhalten will. Multipliziert man die Formeln (10) und (11) mit $d T: R^2 = d \lambda: k_0 \sqrt{p}$, so treten die Koeffizienten auf

$$\frac{2 m_0 e^{-k} \cos(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k})}{k_0 \sqrt{p}} = n_1; \quad \frac{2 m_0 e^{-k} \mathfrak{M} \sqrt{k}}{k_0 \sqrt{p}} = n_2.$$

Es ist also sofort ersichtlich, daß der Koeffizient e^{-k} , wenn derselbe als konstant angesehen wird, auf die Resultate ohne Einfluß ist und daher weggelassen werden könnte. so daß sich die Diathermansie der Luft nur in den Koeffizienten $\cos(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k})$ und $\mathfrak{M} \sqrt{k}$ zeigt. Eine analytische Funktion für die Veränderlichkeit von k einzuführen, erweist sich als absolut untunlich und kann der Einfluß von e^{-k} nur durch die verschiedenen Werte von k in verschiedenen Breiten oder verschiedenen Höhen berücksichtigt werden.

Ohne auf die allgemeine Darstellung durch elliptische Integrale, die hier kaum von Vorteil sein dürfte, überzugehen, schien es mir besser, sofort die Reihenentwicklungen vorzunehmen; dabei sind aber je nach der Lage der Punkte (geographische Breite) zwei Fälle zu unterscheiden:

I) Punkte der gemäßigten Zone: $\varphi \leq 90^{\circ} - \epsilon$; $\kappa = \sin \epsilon \sec \varphi < 1$

II) Punkte der kalten Zone: $\varphi \geq 90^{\circ} - \epsilon$; $\kappa_0 = \cos \varphi \operatorname{cosec} \epsilon < 1$.

Zur Reduktion der Integrale hat man

$$\sin \delta = \sin \epsilon \sin \lambda; \quad \cos \delta \sqrt{1 - \sin^2 \epsilon \sin^2 \lambda} = \sqrt{\cos^2 \epsilon + \sin^2 \epsilon \cos^2 \lambda}$$

$$\cos t_0 = -\tan \varphi \tan \delta; \quad \cos \delta \cos t_0 = -\tan \varphi \sin \epsilon \sin \lambda; \quad \cos \delta \sin t_0 = \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda}$$

$$\cos \delta d \delta = \sin \epsilon \cos \lambda d \lambda; \quad \sin t_0 dt_0 = \tan \varphi \sin \epsilon \sec^2 \delta \cos \lambda d \lambda$$

¹⁾ l. c. S. 65.

I. Für Punkte der gemäßigten Zone wird damit:

$$(1) = \int \cos \delta^2 d\lambda = \lambda - \sin \epsilon^2 \int \sin \lambda^2 d\lambda = (1 - \frac{1}{2} \sin \epsilon^2) \lambda + \frac{1}{2} \sin \epsilon^2 \sin \lambda \cos \lambda$$

$$(2) = \int \cos \delta \sin t_0 d\lambda = \int \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda} d\lambda \\ = \lambda \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \kappa^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \kappa^4 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \kappa^6 \dots \right] + \\ + \cos \lambda \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \kappa^2 R_1 + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4} \kappa^4 R_3 + \dots \right]$$

$$(3) = \int \sin \delta \cos \delta \sin t_0 d\lambda - \int \sin \epsilon \cos \lambda \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda} d\lambda = \\ = - \sin \epsilon \cos \lambda \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \kappa^2 R_2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \kappa^4 R_4 \dots \right]$$

$$(4) = \int \cos \delta^2 \sin t_0 \cos t_0 d\lambda = - \int \cos \delta^2 \sin t_0 \tan \varphi \tan \delta d\lambda = - \tan \varphi (3)$$

$$(5) = \int \sin \delta \cdot t_0 d\lambda = - \sin \epsilon \cos \lambda t_0 + \sin \epsilon \int \cos \lambda dt_0. \\ \int \cos \lambda dt_0 = \tan \varphi \sin \epsilon \int \frac{\cos \lambda^2 d\lambda}{(1 - \sin \epsilon^2 \sin \lambda^2) \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda}} \\ (5) = - \sin \epsilon \cos \lambda t_0 + \tan \varphi \sin \epsilon^2 \sin \lambda \cos \lambda \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} S_2 \sin \lambda^2 + \frac{1}{6} S_4 \sin \lambda^4 + \dots \right] - \\ - \tan \varphi \sin \epsilon^2 \cos \lambda \left[\frac{1}{2 \cdot 4} R_1 S_2 + \frac{1}{4 \cdot 6} R_3 S_4 + \dots \right] + \\ + \tan \varphi \sin \epsilon^2 \lambda \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} S_2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} S_4 + \dots \right]$$

$$(6) = \int \frac{\sin \lambda \cos \lambda^2 d\lambda}{(1 - \sin \epsilon^2 \sin \lambda^2) \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda}} = {}^1) \\ = \sin \lambda \cos \lambda \left[\frac{1}{3} \sin \lambda + \frac{1}{5} S_2 \sin \lambda^3 + \frac{1}{7} S_4 \sin \lambda^5 + \dots \right] \\ - \cos \lambda \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} R_2 S_2 + \frac{1}{5 \cdot 7} R_4 S_4 + \dots \right].$$

$$(7) = \int \frac{\lambda \cos \lambda d\lambda}{(1 - \sin \epsilon^2 \sin \lambda^2) \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda}} \\ \text{wird wegen } \int \lambda \cos \lambda \sin \lambda^i d\lambda = \frac{\lambda \sin \lambda^{i+1}}{i+1} + \left(\frac{1}{i+1} \right)^2 \cos \lambda R_i \\ \left[- \frac{i(i-2) \dots 1}{(i+1)(i-1) \dots 2} \lambda \quad \text{für ungerade } i \right]$$

$$(7) = \lambda \sin \lambda \left[1 + \frac{1}{3} S_2 \sin \lambda^2 + \frac{1}{5} S_4 \sin \lambda^4 + \dots \right] \\ + \cos \lambda \left[1 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 R_2 S_2 + \left(\frac{1}{5} \right)^2 R_4 S_4 + \dots \right]$$

wobei $S_2 = \frac{1}{2} \kappa^2 + \sin \epsilon^2$

$$S_4 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \kappa^4 + \frac{1}{2} \kappa^2 \sin \epsilon^2 + \sin \epsilon^4$$

$$S_6 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \kappa^6 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \kappa^4 \sin \epsilon^2 + \frac{1}{2} \kappa^2 \sin \epsilon^4 + \sin \epsilon^6.$$

1) Mit Hilfe der leicht zu verifizierenden Formel:

$$\int \frac{dx}{(a^2 + b^2 x^2) \sqrt{(f + g x^2)}} = \frac{1}{a \sqrt{a^2 g - b^2 f}} \log_n \frac{a \sqrt{f + g x^2} + \sqrt{a^2 g - b^2 f} x}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}$$

ergibt sich der Ausdruck in geschlossener Form:

$$(6) = - \frac{1}{\sin \epsilon^3} \log_n (\sin \epsilon \cos \lambda + \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda}) + \frac{\cot \epsilon}{\sin \epsilon^2 \tan \varphi} \log_n \frac{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda} + \sin \epsilon \tan \varphi}{\cos \delta}$$

$$(8) = \int \cos \delta^2 t_0 d\lambda = t_0 \int \cos \delta^2 d\lambda - \int d t_0 \int \cos \delta^2 d\lambda$$

$$= t_0 (1) - (1 - \frac{1}{2} \sin \epsilon^2) \operatorname{tang} \varphi \sin \epsilon \cdot (7) - \frac{1}{2} \operatorname{tang} \varphi \sin \epsilon^2 (6)$$

$$(9) = \int \sin \delta \cos \delta t_0 \cos t_0 d\lambda = - \int \sin \epsilon \sin \lambda \operatorname{tang} \varphi \sin \epsilon \sin \lambda t_0 d\lambda =$$

$$= - \operatorname{tang} \varphi \sin \epsilon^2 [t_0 \int \sin \lambda^2 d\lambda - \int d t_0 \int \sin \lambda^2 d\lambda] =$$

$$= - \operatorname{tang} \varphi \sin \epsilon^2 [t_0 (\frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{2} \sin \lambda \cos \lambda)] + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \varphi^2 \sin \epsilon^3 [(7) - (6)].$$

Die Integrale zwischen $\lambda=0$ und π ergeben sich damit:

$$[1] = \pi (1 - \frac{1}{2} \sin \epsilon^2)$$

$$[2] = \pi \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \kappa^2 - 3 \left(\frac{1}{8}\right)^2 \kappa^4 - 5 \left(\frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \kappa^6 - \dots \right]$$

$$[3] = + 2 \sin \epsilon \left(1 - \frac{1}{3} \kappa^2 - \frac{1}{3 \cdot 5} \kappa^4 - \frac{1}{5 \cdot 7} \kappa^6 - \dots \right)$$

$$[4] = - \operatorname{tang} \varphi [3]$$

$$[5] = \pi \sin \epsilon + \pi \operatorname{tang} \varphi \sin \epsilon^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \mathcal{S}_2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \mathcal{S}_4 + \dots \right] \quad (25)$$

$$[6] = 2 \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 5} \mathcal{S}_2 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7} \mathcal{S}_4 + \dots \right]$$

$$[7] = - 2 \left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{1} \mathcal{S}_2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \mathcal{S}_4 + \dots \right]$$

$$[8] = \frac{1}{2} \pi^2 (1 - \frac{1}{2} \sin \epsilon^2) - \frac{1}{2} \operatorname{tang} \varphi \sin \epsilon^3 [6] - (1 - \frac{1}{2} \sin \epsilon^2) \operatorname{tang} \varphi \sin \epsilon [7]$$

$$[9] = - \frac{1}{4} \pi^2 \operatorname{tang} \varphi \sin \epsilon^2 - \frac{1}{2} \operatorname{tang} \varphi^2 \sin \epsilon^3 [[6] - [7]].$$

und damit die in einem gewissen Zeitraum auf den Punkt, dessen geographische Breite $\varphi < 90^\circ - \epsilon$ ist, auffallende Wärmemenge:

$$m_2 = n_1 \{ \sin \varphi \cdot (5) + \cos \varphi (2) \} + n_2 \{ \sin \varphi \cos \varphi [(3) - (9)] - \frac{1}{2} \cos \varphi^2 [(4) - (8)] \} \quad (26)$$

wobei die Integrale innerhalb der dem Zeitraum entsprechenden Grenzen für λ zu nehmen sind und für das Halbjahr zwischen den Äquinoktionalpunkten die Integrale (1), (2), (3) ... durch [1], [2], [3] zu ersetzen sind.

II. Für Punkte der kalten Zone sind die Entwicklungen nach κ wegen $\kappa > 1$ nicht konvergent und sind daher durch Entwicklungen nach κ_0 zu ersetzen. Dies geschieht durch die Substitution:

$$\kappa \kappa_0 = 1; \kappa \sin \lambda = \sin l; \sqrt{1 - \kappa^2 \sin \lambda^2} = \cos l$$

$$\sin \lambda = \kappa_0 \sin l; \cos \lambda = \sqrt{1 - \kappa_0^2 \sin l^2}; \kappa \cos \lambda d\lambda = \cos l dl.$$

$$(1) = (1 - \frac{1}{2} \sin \epsilon^2) \lambda + \frac{1}{2} \sin \epsilon^2 \sin \lambda \cos \lambda$$

$$(2) = \kappa_0 \int \frac{\cos l^2 dl}{\sqrt{1 - \kappa_0^2 \sin l^2}} = \kappa_0 \sin l \cos l \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \kappa_0^2 \sin l^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{6} \kappa_0^4 \sin l^4 \dots \right]$$

$$- \kappa_0 \cos l \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} \kappa_0^2 R_1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4 \cdot 6} \kappa_0^4 R_3 \dots \right]$$

$$+ \kappa_0 l \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \kappa_0^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \kappa_0^4 + \dots \right]$$

$$(3) = \kappa_0^2 \sin \epsilon \sin l^2 \cos l \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \kappa_0^2 \sin l^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{7} \kappa_0^4 \sin l^4 \dots \right]$$

$$- \kappa_0^2 \sin \epsilon \cos l \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 5} \kappa_0^2 R_2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 7} \kappa_0^4 R_4 \dots \right]$$

$$(4) = -\operatorname{tang} \varphi \quad (3).$$

$$\int \cos \lambda \, d t_0 = \sin \varphi \int \frac{\sqrt{1 - \kappa_0^2 \sin^2 l^2}}{(1 - \cos \varphi^2 \sin^2 l^2)} \, d l.$$

$$(5) = -\sin \varepsilon \cos \lambda t_0 - \sin \varepsilon \sin \varphi \cos l \left[\frac{1}{2} R_1 S_2' + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4} R_3 S_4' \dots \right] \\ + \sin \varepsilon \sin \varphi \cdot l \left[1 + \frac{1}{2} S_2' + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot S_4' + \dots \right]$$

$$(6) = \kappa_0^2 \int \frac{\sqrt{1 - \kappa_0^2 \sin^2 l^2}}{1 - \cos \varphi^2 \sin^2 l^2} \sin l \, d l = -\kappa_0^2 \cos l \left[1 + \frac{1}{3} R_2 S_2' + \frac{1}{5} R_4 S_4' + \dots \right] \\ S_2' = \cos \varphi^2 - \frac{1}{2} \kappa_0^2 \\ S_4' = \cos \varphi^4 - \frac{1}{2} \kappa_0^2 \cos \varphi^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \kappa_0^4$$

$$(7) = \kappa_0 \int \frac{\lambda \, d l}{1 - \cos \varphi^2 \sin^2 l^2}; \text{ da nun}$$

$$\int \lambda \sin^l l \, d l = \lambda \int \sin^l l \, d l - \int d \lambda \int \sin^l l \, d l = \\ = \lambda \left[-\frac{\cos l}{n} R_{n-1} + \frac{(n-1)(n-3)\dots 1}{n(n-2)\dots 2} l \right] + \int \left[\frac{\cos l}{n} R_{n-1} - \frac{(n-1)\dots 1}{n\dots\dots\dots 2} l \right] d \lambda$$

ist, so wird man durch Substitution von $d \lambda$ und Entwicklung in Reihen Produkte der Reihen $R_m (1 - \kappa_0^2 \sin^2 l^2)^{\frac{n}{2}}$ erhalten, deren Entwicklung gegebenenfalls auszuführen sein wird. Das Integral zwischen den Grenzen $l=0$ und π kann jedoch einfacher erhalten werden. Da dem Werte $l' = 180^\circ - l$ auch $\lambda' = 180^\circ - \lambda$ entspricht, so wird

$$\int_0^\pi \frac{\lambda \, d l}{1 - \cos \varphi^2 \sin^2 l^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\lambda \, d l}{1 - \cos \varphi^2 \sin^2 l^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - \lambda) \, d l}{1 - \cos \varphi^2 \sin^2 l^2} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d l}{1 - \cos \varphi^2 \sin^2 l^2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda \, d l}{1 - \cos \varphi^2 \sin^2 l^2} \\ \kappa_0 \int_0^\pi \frac{\lambda \, d l}{1 - \cos \varphi^2 \sin^2 l^2} = \kappa_0 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d l}{1 - \cos \varphi^2 \sin^2 l^2} = \\ = \kappa_0 \frac{\pi^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \varphi^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cos \varphi^4 + \dots \right).$$

Die Integrale (8) und (9) drücken sich durch (6) und (7) wie früher aus.

Diese Integrale sind jedoch nur innerhalb des Zeitraumes anzuwenden, innerhalb dessen die Sonne nicht zirkumpolar ist, d. i. für Deklinationen δ für welche $\delta < 90^\circ - \varphi$ ist; da hierfür $\sin \delta < \cos \varphi$, d. i. $\sin \varepsilon \sin \lambda < \cos \varphi$, also $\sin \lambda < \kappa_0$ ist, so wird es stets einen zugehörigen Wert von l geben; der Grenzwert von λ folgt für $\sin \lambda_0 = \kappa_0$, $\sin l = 1$, $l = \frac{1}{2} \pi$. Den Integralen nach l von $\lambda = 0$ bis λ' , $\lambda'' \dots \lambda_0$ entsprechen daher die nach l zwischen $0, l', l'' \dots \frac{1}{2} \pi$ genommenen, und dem vollständigen Integral nach l zwischen $l=0 \dots \frac{1}{2} \pi \dots \pi$ entspricht das nach λ genommene zwischen $\lambda = 0 \dots \lambda_0, \pi - \lambda_0 \dots \pi$, mit Ausschluß des Bereiches zwischen $\lambda = \lambda_0$ und $\pi - \lambda_0$, welchem Bereiche keine Werte von λ zugeordnet sind (es wird $\sin l > 1$). Bei der Integration nach sämtlichen

reellen Werten von l zwischen den Grenzen 0 und π erhält man daher ohne weitere Beschränkung die dem nicht zirkumpolaren Teile des Zeitraumes entsprechenden Wärmemengen, wobei sofort in (1) und (5) für λ die Werte $0 \dots \lambda_0, \pi - \lambda_0 \dots \pi$ zu setzen sind und im übrigen der Zeitraum, für welchen die Sonnenlänge zwischen λ_0 und $\pi - \lambda_0$ ist, bereits ausgeschlossen erscheint.

Damit wird:

$$\begin{aligned}
 [1] &= (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) 2 \lambda_0 + 2 \sin \epsilon^2 \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \\
 [2] &= \kappa_0 l \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \kappa_0^2 + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \kappa_0^4 + \dots \right] \\
 [3] &= 2 \kappa_0^2 \sin \epsilon \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} \kappa_0^2 + \frac{1}{5 \cdot 7} \kappa_0^4 + \dots \right] \\
 [4] &= - \operatorname{tang} \varphi [3] \\
 [5] &= \pi \sin \epsilon (1 - \cos \lambda_0) + \pi \sin \epsilon \sin \varphi \left[1 + \frac{1}{2} S_2' + \frac{1}{2 \cdot 4} S_4' + \dots \right] \quad (27) \\
 [6] &= 2 \kappa_0^2 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} S_2' + \frac{1}{5} \cdot \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 1} S_4' + \dots \right] \\
 [7] &= \kappa_0 \frac{\pi^2}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \cos \varphi^2 + \frac{1}{2 \cdot 4} \cos \varphi^4 + \dots \right] \\
 [8] &= t_0 [1] - \frac{1}{2} \operatorname{tang} \varphi \sin \epsilon^3 [6] - (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) \operatorname{tang} \varphi \sin \epsilon [7] \\
 [9] &= - \operatorname{tang} \varphi \sin \epsilon^2 \left[\pi (\lambda_0 - \frac{1}{2} \sin \lambda_0 \cos \lambda_0) - \frac{3}{4} \pi^2 \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{tang} \varphi^2 \sin \epsilon^3 [6] - [7].
 \end{aligned}$$

womit sich die diesem Zeitraum entsprechende Wärmemenge wieder nach Formel (26) berechnet. Hiezu kommt noch der dem zirkumpolaren Zeitraum entsprechende; hiefür ist

$$\begin{aligned}
 (10) &= \int \sin \delta \cos (z_1 \sqrt{k}) d\lambda = \int \sin \delta \cos [(\pi - \varphi - \delta) \sqrt{k}] d\lambda = \\
 &= \cos [(\pi - \varphi) \sqrt{k}] \int \sin \delta \cos (\delta \sqrt{k}) d\lambda + \frac{\sin (\pi - \varphi) \sqrt{k}}{\sin \delta \sin (\delta \sqrt{k})} \int \sin \delta \sin (\delta \sqrt{k}) d\lambda \\
 (11) &= \int \sin \delta \cos \delta d\lambda = \sin \epsilon \int \sin \lambda \sqrt{\cos \epsilon^2 + \sin \epsilon^2 \cos^2 \lambda} d\lambda = \\
 &= - \frac{1}{2} \sin \epsilon \cos \lambda \cos \delta - \frac{1}{2} \cos \epsilon^2 \log_n (\sin \epsilon \cos \lambda + \cos \delta)
 \end{aligned}$$

Die in (10) auftretenden Integrale sind durch die Formeln (21) gegeben, in denen jetzt $\kappa = \sin \epsilon^2$ zu setzen ist; die Grenzen für λ sind innerhalb des Bereiches $\sin \lambda_0 = \kappa_0 \dots \frac{1}{2} \pi \dots \pi - \lambda_0$; für das vollständige Integral hat man von λ_0 bis $\pi - \lambda_0$ zu integrieren; die Integrale werden:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{\lambda_0}^{\pi - \lambda_0} \sin \delta \cos (\delta \sqrt{k}) d\lambda = 2 \sin \epsilon \sqrt{1 - \kappa_0^2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{k}}{1} \right) \frac{1}{3} \sin \epsilon^2 R_2^{(0)} + \dots \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \sin \epsilon^2 \left(\frac{\sqrt{k}}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} R_2^{(0)} + \dots \right\} \\
 B &= \int_{\lambda_0}^{\pi - \lambda_0} \sin \delta \sin (\delta \sqrt{k}) d\lambda = 2 \sin \epsilon^2 \sqrt{1 - \kappa_0^2} \left\{ \left(\frac{\sqrt{k}}{1} \right) \left[\frac{1}{2} R_1^{(0)} + \dots \right] \right\} + \\
 &\quad + (\pi - \lambda_0) \left\{ \left(\frac{\sqrt{k}}{1} \right) \left[\frac{1}{2} \sin \epsilon^2 + \dots \right] \right\} \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$[11] = \sin \epsilon \sin \varphi \sqrt{1 - \kappa_0^2} + \frac{1}{2} \cos \epsilon^2 \log_n \frac{\sin \varphi + \sin \epsilon \sqrt{1 - \kappa_0^2}}{\sin \varphi - \sin \epsilon \sqrt{1 - \kappa_0^2}}$$

$$M_1' = n_1 \pi \sec \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k} \right) \sin \varphi [\cos (\pi - \varphi) \sqrt{k} \cdot A + \sin (\pi - \varphi) \sqrt{k} \cdot B] + n_2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot [11].$$

Die Berechnungen nach den erhaltenen Ausdrücken sind bei genügend kleinen Werten von κ , bezw. κ_0 ohne Schwierigkeit; in der Nähe der Polarkreise aber sind κ und κ_0 nahe 1 und schon in mittleren Breiten (etwa über 50° Breite) wird die Rechnung wegen der Notwendigkeit der Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung recht umständlich. Ein meist ausreichend genaues Resultat kann man jedoch auf viel einfachere Weise erhalten. Während kurzer Zeiträume kann man in den Ausdrücken (10) und (11), S. 231, δ und R konstant ansehen, etwa den der Mitte der Zeit entsprechenden Wert verwenden, und erhält dann in den Ausdrücken

$$\frac{m_2}{k_0 \sqrt{p}} (\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{m_2}{R^2} d T = \frac{m_2}{R^2} \Delta T,$$

wenn für ΔT eine konstante Einheit, etwa 10 Tage oder 5 Tage gewählt werden, die diesem Zeitraum entsprechende Wärmemenge. Dabei zerfällt jeder der Ausdrücke in 2 Faktoren, von denen der eine nur die astronomisch-geographischen Daten (geographische Breite, Deklination der Sonne, Tagebogen), der andere die meteorologischen Elemente (den Wert von k) enthält, und man kann daher selbst für verschiedene Orte derselben Parallelkreise¹⁾ den Einfluß der meteorologischen Elemente durch Verwendung verschiedener k (entsprechend verschiedener Diathermansie) Rechnung tragen.

Schreibt man daher, mit $R^{-2} = \rho$

$$\begin{aligned} T_1 &= [\sin \varphi \sin \delta \sin t_0 + \cos \varphi \cos \delta \sin t_0] \rho \\ T_2 &= [\sin \varphi \sin \delta \cos \varphi \cos \delta (\sin t_0 - t_0 \cos t_0) + \frac{1}{2} \cos \varphi^2 \cos \delta^2 (t_0 - \sin t_0 \cos t_0)] \rho \\ T_3 &= [\pi \sin \varphi \sin \delta] \rho \\ T_4 &= [\pi \sin \varphi \sin \delta \cos \varphi \cos \delta] \rho \end{aligned} \quad (29)$$

$$U_1 = e^{-k} \cos \frac{1}{2} \pi \sqrt{k}; \quad U_2 = e^{-k} \mathfrak{M} \sqrt{k}$$

so wird

$$\begin{aligned} m_2 &= U_1 T_1 + U_2 T_2 \\ m_1 &= U_1 T_3 \frac{\cos z_1 \sqrt{k}}{\cos \frac{1}{2} \pi \sqrt{k}} + U_2 T_4. \end{aligned} \quad (30)$$

T_1, T_2, T_3, T_4 , können mit den Argumenten: Datum und Polhöhe, U_1 und U_2 mit dem Argumente k in Tafeln gebracht werden. Durch Addition der den einzelnen Zeiträumen entsprechenden Werte kann man dann die größeren Zeiträumen entsprechenden erhalten.

¹⁾ Für die Polarregion ist dies wegen des Ausdrucks $\cos(z_1 \sqrt{k})$ nicht der Fall.

X. Kapitel.

Astronomische Ursachen.

c) Der Einfluß der astronomischen Elemente.

Änderungen in den astronomischen Elementen werden sich unzweifelhaft in den Wärmemengen offenbaren, welche ganze Ländergebiete von der Sonne erhalten. Man kann diese Änderungen aus den Formeln (29), (30) des vorigen Kapitels erhalten, wenn man darin die Polhöhe φ , die Exzentrizität der Erdbahn e und die Länge des Perihels Π derselben, endlich die Schiefe der Ekliptik ϵ um die Beträge $\delta\varphi$, δe , $\delta\Pi$, $\delta\epsilon$, ändert.¹⁾ Nun ist, wenn L die mittlere Länge der Sonne ist, bis auf Größen erster Ordnung der Exzentrizität:

$$\begin{aligned} \lambda &= L + 2e \sin(L - \Pi) \\ R &= a [1 - e \cos(L - \Pi)] \\ \rho &= a^{-2} [1 + 2e \cos(L - \Pi)] \\ \delta\lambda &= 2 \sin(L - \Pi) \delta e - 2e \cos(L - \Pi) \delta\Pi \\ \delta\rho &= a^{-2} [2 \cos(L - \Pi) \delta e + 2e \sin(L - \Pi) \delta\Pi]. \end{aligned} \quad (1)$$

Aus $\sin \delta = \sin \epsilon \sin \lambda$ folgt:

$$\cos \delta d\delta = \sin \epsilon \cos \lambda \delta\lambda + \cos \epsilon \sin \lambda \delta\epsilon$$

womit auch $d t_0$ sich durch $\delta\lambda$ und $d\epsilon$ ausdrückt:

$$\begin{aligned} \sin t_0 d t_0 &= \tan \varphi \sec \delta^2 d\delta + \tan \delta \sec \varphi^2 \delta\varphi = \\ &= \tan \varphi \sec \delta^3 \sin \epsilon \cos \lambda \delta\lambda + \tan \varphi \sec \delta^3 \cos \epsilon \sin \lambda \delta\epsilon + \tan \delta \sec \varphi^2 \delta\varphi \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \delta T_1 &= [\sin \varphi \sin \delta t_0 + \cos \varphi \cos \delta \sin t_0] \delta\rho + \\ &+ [\cos \varphi \sin \delta t_0 - \sin \varphi \cos \delta \sin t_0] \rho \delta\varphi + \\ &+ [\sin \varphi \cos \delta t_0 - \cos \varphi \sin \delta \sin t_0] \rho d\delta + \\ &+ [\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_0] \rho d t_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta T_2 &= [\tfrac{1}{4} \sin 2\varphi \sin 2\delta (\sin t_0 - t_0 \cos t_0) + \tfrac{1}{2} \cos \varphi^2 \cos \delta^2 (t_0 - \sin t_0 \cos t_0)] \delta\rho + \\ &+ [\tfrac{1}{2} \cos 2\varphi \sin 2\delta (\sin t_0 - t_0 \cos t_0) - \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi \cos \delta^2 (t_0 - \sin t_0 \cos t_0)] \rho \delta\varphi + \\ &+ [\tfrac{1}{2} \sin 2\varphi \cos 2\delta (\sin t_0 - t_0 \cos t_0) - \tfrac{1}{2} \cos \varphi^2 \sin 2\delta (t_0 - \sin t_0 \cos t_0)] \rho d\delta + \\ &+ [\tfrac{1}{4} \sin 2\varphi \sin 2\delta (t_0 \sin t_0) + \cos \varphi^2 \cos \delta^2 \sin t_0^2] \rho d t_0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\delta T_3 = \pi \sin \varphi \sin \delta \delta\rho + \pi \cos \varphi \sin \delta \rho \delta\varphi + \pi \sin \varphi \cos \delta \rho d\delta.$$

$$\delta T_4 = \tfrac{1}{4} \pi \sin 2\varphi \sin 2\delta \delta\rho + \tfrac{1}{2} \pi \cos 2\varphi \sin 2\delta \cdot \rho \delta\varphi + \tfrac{1}{2} \pi \sin 2\varphi \cos 2\delta \cdot \rho d\delta.$$

¹⁾ Die große Halbachse a bleibt ungeändert.

Multipliziert man hier mit $(d\lambda : \rho)$ und integriert für konstante $\delta\varphi$, δe , $\delta\Pi$, $\delta\varepsilon$, so erhält man sofort die diesen Änderungen entsprechenden Änderungen der Wärmemengen für beliebige Zeiträume. Diese Integration würde aber voraussetzen, daß dabei k ungeändert bleibt, eine Voraussetzung, die sicher nicht zutrifft; da aber vorläufig eine Abhängigkeit von k von den Änderungen der astronomischen Elemente weder auf empirischem Wege noch auch mit einer einigermaßen auf Zuverlässigkeit Anspruch erhebenden empirischen Weise zu erhalten ist, so muß von einer weiteren Verfolgung der Untersuchungen in dieser Richtung gegenwärtig noch abgesehen werden.

Bei einer Änderung der astronomischen Elemente handelt es sich aber nicht um regionale Phänomene, sondern um Erscheinungen, die die ganze Erde betreffen, und einen Überblick über diese Erscheinungen kann man aus der Betrachtung der relativ einfachen Resultate des vorigen Kapitels erhalten. Es war gefunden worden (s. S. 241)

$$N_1 = \frac{\pi^2 r^2 m_0}{k_0 V p} e^{-k} \cos\left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}\right) \quad \nu = \frac{\frac{3}{2} \sqrt{k}}{\cos\left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{k}\right)} \quad N_2 = 2 \nu N_1$$

$$\begin{aligned} W_p &= N_1 [(1 + \nu) \pi + (1 + \frac{4}{3} \nu) 2 \sin \varepsilon] \\ W_a &= N_1 [(1 + \nu) \pi - (1 + \frac{4}{3} \nu) 2 \sin \varepsilon] \end{aligned} \quad (3)$$

Die Formeln gehen in diejenigen ohne Berücksichtigung der Absorption über, wenn $k=0$, $\nu=0$ gesetzt wird; für diesen Fall ergibt sich

$$\nu = \frac{W_p}{W_a} = \frac{\pi + 2 \sin \varepsilon}{\pi - 2 \sin \varepsilon} = 1.6786 = \frac{47}{28} \text{ sehr nahe. } ^1)$$

In demjenigen Zeitraum, für welchen die Länge der Sonne zwischen 0° und 180° ist, entspricht W_p der nördlichen Hemisphäre; in der Zeit, in welcher die Länge der Sonne zwischen 180° und 360° ist, bezieht sich W_p auf die südliche Hemisphäre. Diese Wärmemengen sind also, trotz der veränderlichen Entfernung der Erde von der Sonne, für den Sommer der nördlichen und südlichen Halbkugel gleich, und ebenso für den Winter der nördlichen und südlichen Halbkugel; es sind aber die Zeiten, in denen diese Wärmemengen übermittelt werden, verschieden.

Zur Bestimmung der wahren Länge der Sonne hat man, wenn v die wahre, M die mittlere Anomalie, und wie früher λ die wahre, L die mittlere Länge und Π die Länge des Perihels der Erde bedeutet

$$v = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M = \lambda - \Pi$$

$$M = L - \Pi$$

$$\lambda = L + 2e \sin(L - \Pi) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2(L - \Pi).$$

Durch Umkehrung dieser Reihe erhält man

$$L = \lambda - 2e \sin(\lambda - \Pi) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2(\lambda - \Pi).$$

Für das Frühlingsäquinoktium ist: $\lambda_0 = 0^\circ$; $L_0 = 2e \sin \Pi - \frac{5}{4} e^2 \sin 2\Pi$;

für das Herbstäquinoktium ist: $\lambda_1 = 180^\circ$; $L_1 = \pi - 2e \sin \Pi - \frac{5}{4} e^2 \sin 2\Pi$;

für das nächste Frühlingsäquinoktium: $\lambda_2 = 0^\circ$; $L_2 = L_0$.

¹⁾ Die so häufig angegebene Zahl 63 : 37 entspricht dem Werte $\varepsilon = 24^\circ 6'$; auf Prozente umgerechnet erhält man allerdings 62.67 : 37.33.

Es ist daher zwischen dem Frühlingsäquinoktium und dem darauffolgenden Herbstäquinoktium der Unterschied der mittleren Längen

$$L_1 - L_0 = \pi - 4 e \sin \Pi$$

und zwischen dem Herbstäquinoktium und dem darauffolgenden Frühlingsäquinoktium

$$L_2 - L_1 = \pi + 4 e \sin \Pi$$

bis einschließlich der Glieder zweiter Ordnung, weil der von e^2 abhängige Teil wegfällt.

Da nun die mittlere Anomalie ein Maß der Zeit ist, indem die mittlere Bewegung in einem Jahre 2π ist, so wird T_1 die Zeit, welche die Sonne über dem Äquator verweilt und T_2 die Zeit mit negativer Deklination

$$T_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{2 e \sin \Pi}{\pi} \right); \quad T_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{2 e \sin \Pi}{\pi} \right) \quad (4)$$

daher gegenwärtig (mit $e=0.01675$, $\Pi=281^\circ 13' 15''$): $T_1=182.62+3.82$ Tage, $T_2=182.62-3.82$ Tage, daher der Sommer der nördlichen Hemisphäre um 7.64 Tage länger als der Winter.¹⁾ Da sich nun dieselbe Wärmemenge auf eine größere Anzahl von Tagen verteilt, wird die Erwärmung an jedem einzelnen Tage schwächer.

Der Schluß, daß diejenige Hemisphäre die wärmere sein sollte, welche den längeren Sommer hat, also gegenwärtig die nördliche, wäre nur unter der Voraussetzung richtig, daß die Absorption der Wärme eine Funktion der Zeit der Einstrahlung wäre; dann könnte infolge der langsameren Bewegung von der geringeren Wärmemenge, welche durch die größere Entfernung zur Erde gelangt, dennoch etwa die gleiche, vielleicht sogar eine etwas größere Wärmequantität von der Erde absorbiert werden. Es zeigt sich dies ja bei der alltäglichen Erfahrung. Bei rascher Vorüberbewegung vor einer Wärmequelle wird weniger Wärme absorbiert, als bei langsamem Vorüberstreichen, selbst dann, wenn die Entfernungen und Neigungen der Fläche dieselben wären.

Aber für die Bewegung der Erde ist dieses doch etwas anders; die Erde dreht sich, während sie an der Sonne vorüberkommt; die einzelnen Punkte sind nicht der permanenten Strahlung ausgesetzt, und es würde also die Intensität der Erwärmung von der Dauer der Tageslänge abhängig sein; dieses würde aber nur bei sehr großen Änderungen der Entfernung, bei denen die Schattengrenzen auf der Erde merklich vom größten Kreise verschieden sind, ausschlaggebend sein. Bei den geringfügigen Änderungen, wie sie hier vorkommen, ist die Tageslänge für gleiche Strahlungen der Sonne in Deklination als gleich anzusehen, und dann wird die an den einzelnen Tagen absorbierte Wärmemenge denselben Bruchteil der eingestrahnten Wärme betragen, und daher das wirksame Wärmequantum unabhängig von der Dauer des Sommer- bzw. Winterhalbjahres.²⁾

¹⁾ Auf diesen Umstand hat schon Mairan in den Memoiren der Pariser Akademie der Wissenschaften, Bd. 36 (1765) hingewiesen; er schloß daraus, daß dadurch der nördlichen Halbkugel mehr Wärme gespendet wird.

²⁾ Ein anderer Einfluß, der sich in der Stärke der täglichen Erwärmung infolge der Verdunstung und Kondensation äußert, wird später (s. S. 267) erörtert.

In den Formeln (3) kommen wegen $p = \sqrt{a(1 - e^2)}$ von den Elementen der Erdbahn a , e und ϵ vor, und wenn man auf die Dauer der Einstrahlung Rücksicht nimmt, auch Π deren Änderungen, da a konstant ist, schon bei der Ableitung der Formeln (1) und (2) berücksichtigt wurden.

Der Einfluß der Änderungen dieser Elemente ist bereits wiederholt in Betracht gezogen und jede derselben als Ursache der Eiszeiten erklärt worden.

Π ändert sich jährlich um $61''.9 = 1'.03$. In 21.000 Jahren hat daher das Perihel der Erde einen vollen Umlauf gegenüber dem Frühlingspunkt vollführt.¹⁾ Während gegenwärtig das Perihel der Erde heliozentrisch nahe in der Richtung des Krebses ist, kommt dasselbe nach 10.500 Jahren in die Richtung des Steinbockes und die Erde kommt ins Perihel zur Zeit des Sommers der Nordhemisphäre. Da dann $\Pi' = 180^\circ + \Pi$ ist, so wird für diese Lage des Perihels $\sin \Pi' = -\sin \Pi$, daher dann der Sommer der Nordhemisphäre $182.62 - 3.82$ Tage, der Winter $182.62 + 3.82$ Tage; es würde also dann der Sommer der Südhemisphäre 7.64 Tage länger sein, so daß der Gesamtunterschied 15.3 Tage betragen wird. Ob eine Differenz von diesem Betrage einen merklichen Einfluß auf den klimatischen Charakter der Erdhemisphären haben kann, erscheint nach dem früheren wohl fraglich.

Die Exzentrizität der Erdbahn kann ziemlich bedeutenden Änderungen unterworfen sein.²⁾ Der Maximalwert kann nach Le Verrier³⁾ 0.07775, nach Stockwell⁴⁾ 0.0677352 erreichen. Nimmt man Π und ϵ konstant an, so wird

$$W_p = \frac{C}{\sqrt{1 - e^2}}; \quad W_a = \frac{C'}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$W_p' = \frac{C}{\sqrt{1 - e'^2}}; \quad W_a' = \frac{C'}{\sqrt{1 - e'^2}},$$

daher

$$\frac{W_p}{W_p'} = \frac{W_a}{W_a'} = \sqrt{\frac{1 - e'^2}{1 - e^2}}.$$

1) Mitunter wird auch die Präzession der Äquinoktien als Ursache der Eiszeiten angegeben. Es ist wohl an sich klar und auch aus den Formeln ersichtlich, daß die Präzession einen Einfluß auf den klimatischen Charakter nicht haben kann. In vielen Fällen handelt es sich nur um eine Verwechslung mit der Perihelbewegung; doch beträgt die Präzession $50''$ jährlich, die Periode derselben etwa 25.000 Jahre. Allerdings kombinieren sich die beiden Bewegungen da für die Umkehrung der Sommer- und Winterlänge die tropische Bewegung der Apsiden (die Lage des Perihels gegen den Frühlingspunkt) zu berücksichtigen ist, welche eben $61.9''$ beträgt; die siderische Bewegung (gegen die Sterne) der Apsiden der Erde beträgt nur $12''$; würden daher die Äquinoktialpunkte fest bleiben, so würde die Periode der Umkehrung der Jahreszeiten T_1 und T_2 etwa 100.000 Jahre sein.

2) Auf diesen Einfluß hat bereits John Herschel hingewiesen; doch bemerkte er, daß der Einfluß der verschiedenen Länge von Sommer und Winter und der damit verbundenen Änderungen der Entfernungen sich aufheben. Arago und Humboldt schlossen sich dieser Meinung an; Arago meint, daß sogar bei einer Exzentrizität von 0.24 noch keine merklichen Änderungen auftreten würden. Hingegen schreibt gegenwärtig Charlier die Ursache der Eiszeiten den Änderungen der Exzentrizität zu.

3) Annalen der Pariser Sternwarte. Bd. 2, S. 140.

4) Smithsonian Contributions to knowledge, Bd. 18.

Während aber der Einfluß der Drehung des Perihels sich auf den beiden Hemisphären alternierend zeigt, so daß die eine Hemisphäre kälter werden würde, während die andere wärmer wird, äußert sich der Einfluß einer Änderung der Exzentrizität, wenigstens in dieser Komponente auf beiden Hemisphären in gleicher Weise. Nimmt man als Maximalwert $e' = 0.07775$, als Minimalwert $e = 0$, so würde das Verhältnis der Wärmemengen gleich 0.99692 ; die Verminderung der Wärmemenge nur 0.003 des Gesamtbetrages, also relativ gering, wenn man sie mit den absoluten Unterschieden der Wärmemengen vergleicht. Auch Meech ¹⁾ hält den Einfluß für verschwindend. Die Größe der Erwärmung ändert sich aber auch mit der Veränderung der Entfernungen und dieser Einfluß ist viel bedeutender. ²⁾ Rechnet man mit diesem Maximalwerte von e die durch die Drehung des Perihels bedingten Änderungen der Sommer- und Winterlängen, so folgt $T_1 = 182.62 + 17.73$ Tage, $T_2 = 182.62 - 17.73$ Tage, daher der Unterschied des warmen und kalten Halbjahres für eine Hemisphäre 35.46 Tage und bei Umkehrung der Perihelrichtung eine ebenso große Differenz im entgegengesetzten Sinne, daher eine Gesamtschwankung im Laufe von 21000 Jahren im Betrage von 70.92 Tagen. Ob hier eine so bedeutende Differenz ohne Einfluß bleiben kann und ob hier die Änderung in den Entfernungen oder in den Geschwindigkeiten überwiegt, erfordert eine besondere Untersuchung.

Marchi ³⁾ führt zum Vergleiche den Planeten Mars an; dessen Exzentrizität ist 0.093 , also größer als die größtmögliche Exzentrizität der Erdbahn; der Winter der Südhemisphäre dauert dort 381.3 Tage, derjenige der nördlichen nur 305.7 Tage, mit einer Differenz von 75.6 Tagen; trotzdem zeigt sich keine Spur einer stärkeren Vereisung der südlichen Hemisphäre; als Ursache dieser Erscheinung führt er aber das Fehlen des Wasserdampfes, die große Transparenz der Luft auf dem Mars an. Abgesehen davon, daß eine große Anzahl von Phänomenen gerade für eine sehr dichte Marsatmosphäre sprechen, zeigt eine genauere Untersuchung, daß der Einfluß der Diathermansie der Atmosphäre ein viel geringerer ist, als derjenige der übrigen Elemente und merkliche Unterschiede jedenfalls erst bei noch viel größeren Exzentrizitäten auftreten.

Einen bedeutenden Raum weist J. Croll ⁴⁾ der Untersuchung dieser Verhältnisse zu; er legt dabei die Formeln für die sekulare Änderung der Exzentrizität zugrunde. „A well known astronomer and mathematician“ sagt er „is of opinion that these formulae give results, which may be depended upon as approximately correct for four million of years past and future.“ ⁵⁾ Gestützt auf diesen Ausspruch eines nicht genannten Astronomen, der sich gegen denselben also auch nicht verwahren kann, hat Croll die Größe der Exzentrizität

¹⁾ l. c. S. 36.

²⁾ Die Folgerung von Meech (l. c. S. 138), daß hieraus eine Änderung der Temperatur um $\frac{1}{15}$ des Betrages resultieren könne, ist aber keineswegs berechtigt; die Rechnung, auf welche er sich stützt, rührt nach Marchi (l. c. S. 155) von R. S. Ball her, wurde aber schon 1868 von Schiaparelli (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Serie II, Vol I part II) angefochten.

³⁾ l. c. S. 225.

⁴⁾ Climate and time; London 1875, SS. 310 bis 354.

⁵⁾ S. 311.

für drei Millionen Jahre zurück und eine Million Jahre vorausgerechnet u. zw. von 50.000 zu 50.000 Jahren.¹⁾ Hieraus werden dann für die Maxima der Exzentrizitäten die Glazialzeiten gefolgert. Das erste Maximum fällt vor 200.000 Jahren, das nächst vorhergehende vor 850.000 Jahren; vor 100.000 und 300.000 Jahren waren sekundäre Maxima, ebenso vor 750.000 Jahren, während vor 150.000, 250.000 und ebenso vor 800.000 und 900.000 Jahren Minima der Exzentrizität waren.

Und so schließt er, daß vor 2,650.000 und vor 2,450.000 Jahren wahrscheinlich die Eiszeit des Eozäns fällt, ferner zwischen 1,000.000 und 700.000 Jahren zurück die Eiszeit des Miozäns und vor 250.000 Jahren die Eiszeiten des Pliozäns.²⁾ Er glaubt dann noch besonders nachweisen zu müssen, daß die Eiszeit des Pliozäns nicht früher gewesen sein kann, bezw. daß nicht die vorhergehende Eiszeit vor 700.000 Jahren diejenige des Pliozäns gewesen sein kann, da ja gerade in die Epoche vor 980.000 bis 700.000 die großen Veränderungen der Exzentrizität auftreten, während dieselben in der Zeit zwischen 5000 bis etwa vor 100.000 Jahren ganz geringfügig waren.³⁾ Croll meint nun, daß die Eiszeit nicht 980.000 Jahre zurückverlegt werden könne, da sonst die Denudation seit dieser Zeit alle Glazialspuren vernichtet haben müßte. Da weiter das Miozän mindestens zwanzigmal und das Kambrium mindestens 240mal entfernter sein muß, als die Eiszeit, so würden sich, wenn die Eiszeit vor 1 Million Jahren stattgefunden hätte, für das Kambrium 240 Millionen Jahre ergeben, während wenn die Eiszeit um 250.000 Jahre zurückverlegt wird, das Kambrium etwa auf 60 Millionen Jahre zurückzuverlegen wäre;⁴⁾ was er für viel wahrscheinlicher hält, da auch aus der Sonnentheorie das Alter der Erde nicht höher als etwa 100 Millionen Jahre sein könne.

Dieses sind ja sehr geistreiche Spekulationen — auf unzuverlässiger und selbst unzulässiger Basis gebaut. „There are still eminent astronomers and physicists, who are of opinion“, und nun drückt er den Schluß des Satzes, der „that those computations are failing“ lauten müßte, etwas euphemistischer aus: „that the climate of the globe never could have been seriously affected by changes in the excentricity of its orbit“. Auch den Einwand von der großen Exzentrizität des Mars führt er an⁵⁾, glaubt ihn aber damit widerlegen zu können, daß er annimmt, das Wasser befinde sich auf dem Mars wahr-

¹⁾ Die Bedeutung von 3 Millionen wird erst durch dieses Normalintervall ins rechte Licht gesetzt. Denkt man sich 50.000 Jahre als Einheit der Abszissen gleich 1 *cm*, so braucht man, um 3 Millionen Jahre aufzutragen, eine Länge von 60 *cm*. Die Astronomen wären zufrieden, wenn die Formeln auf 100.000 Jahre vor und nach der Epoche zuverlässige Resultate geben würden.

²⁾ l. c. SS. 316 und 320.

³⁾ Daß dieses die notwendige Folge der mit *t* multiplizierten und daher mit der Zeit anwachsenden periodischen Glieder [$t \sin (m t + M)$] ist und daß eben diese Glieder zu den kritischen gehören, welche die Konvergenz der Entwicklungen in Frage stellen und damit ihren Gültigkeitsbereich bedenklich einschränken, kann natürlich der Nichtastronom leicht übersehen.

⁴⁾ l. c. S. 342 und 354.

⁵⁾ l. c. S. 80.

scheinlich in einem anderen Zustande. Es ist ja klar, daß, wenn neue Hypothesen dieser Art zu Hilfe gezogen werden, eigentlich jede Erklärung zutreffend gemacht werden kann.

Selbst das Alter von 80.000 Jahren seit der letzten Vereisung wird von vielen Geologen als zu hoch angesehen. Manche amerikanische Geologen schätzen die Zeit seit der letzten Vereisung auf nicht mehr als 10.000 Jahre.¹⁾ Obzwar sich Geikie, allerdings mit großer Reserve, im großen und ganzen der Croll'schen Hypothese anschließt, meint er doch, daß sich Croll's Schätzungen auf Zeiträume erstrecken, auf welche die Ausdehnung der Rechnungen nicht zulässig ist. Sollte jedoch, wenigstens für die nächstgelegenen Epochen der letzten Eiszeit, diese 80.000 Jahre zurückgelegen sein, so müßte sich nach Geikie daraus ergeben, daß die Eiszeiten in Amerika und Europa nicht gleichzeitig stattgefunden haben können. Dieser Schluß scheint jedoch nicht berechtigt, denn in der Schlußweise von Croll liegt nichts, das auf eine Erstreckung seiner Rechnungen auf einen Teil der Erde hinweisen würde, und seine Theorie kann daher auch durch eine solche Annahme nicht gestützt werden.

Eine Veränderlichkeit in der Schiefe der Ekliptik würde zunächst in dem Verhältnis zwischen der Wärmemenge, welche die polare und die antipolare Hälfte der Erde erhält, eine Änderung hervorbringen. Die Änderungen in der Schiefe der Ekliptik hält aber Marchi²⁾ für viel zu klein, um die Erscheinungen zu erklären; sie betragen im Maximum nach Laplace und Stockwell $1^{\circ} 20'$, und für $24^{\circ} 47'$ und $22^{\circ} 7'$ wird $v = 1.7280$, bzw. 1.6305 . Gegenüber dem Werte 1.6786 bedeutet dieses also eine Veränderung des Verhältnisses der Wärme auf der polaren Hälfte gegenüber der antipolaren um rund 5% . Dabei wird aber selbstverständlich keine Bevorzugung der einen oder anderen Hemisphäre erfolgen, folglich wird in jedem Jahre jede der beiden Hälften einmal eine stärkere, einmal eine schwächere Wärme erhalten und die Gesamtwärme müßte notwendigerweise dieselbe bleiben; es würden sich nur die Temperaturgegensätze verschärfen. Wenn daher im Winter die polare Eiskalotte sich weiter erstreckt, so wird es davon abhängen, ob die Sommertemperaturen ausreichen, dieselben vollständig abzuschmelzen oder nicht. Jedenfalls würden aber in diesem Falle die Vergrößerungen der Kalotten beide Hemisphären gleichzeitig betreffen.

Penck meint, daß exakte Beobachtungen gezeigt haben, daß die Erdachse im allgemeinen eine fixe Lage habe und daß die Schiefe der Ekliptik nur geringen Schwankungen unterworfen sei. Ob damit die Annahme, daß die Schiefe der Ekliptik einen Einfluß auf das Klima haben könnte, ganz verworfen wird oder nicht, wird aus seiner Äußerung nicht ganz klar. Er bemerkt auch, daß nach einigen die Vergrößerung der Schiefe in höheren Breiten ein kälteres Klima hervorbringt, nach Croll ein wärmeres. „Daß aber das quartäre Glazialphänomen in seinem ganzen Umfange durch Veränderungen in der Schiefe der Ekliptik hervorgebracht wurde, ist kaum je verfochten worden.“³⁾

¹⁾ Geikie l. c. S. 814.

²⁾ l. c. S. 148.

³⁾ „Die Vergletscherung der deutschen Alpen“, S. 444.

Croll schreibt den Veränderungen in der Schiefe der Ekliptik jedenfalls einen größeren Einfluß zu. Er sagt, ¹⁾ man habe diesem Umstande nur eine geringe Bedeutung beigemessen; „I have been led to the very opposite conclusion“. Dabei legt er die Rechnungen von Meech zugrunde, welcher fand, daß, wenn unter den gegenwärtigen Umständen die ganze auf den Äquator fallende Wärmemenge durch 365·24 Wärmetage ausgedrückt wird, dieselbe für den Pol 151·59 Wärmetage beträgt. Wird jedoch die Schiefe der Ekliptik mit ihrem Maximalbetrage, den er $\epsilon = 24^{\circ} 43'$ annimmt, eingeführt, so ergibt sich für den Äquator 363·51 Wärmetage, für den Pol 160·04 Wärmetage, so daß einer äquatorialen Verminderung um 1·73 Wärmetage eine polare Vermehrung um 8·45 Wärmetage gegenübersteht, also der Einfluß einer Veränderung der Schiefe auf die äquatorialen Regionen ein viel geringerer ist, als auf die polaren. Diese Zunahme von $\frac{1}{18}$ der ganzen polaren Wärme müßte nach Croll eine Steigerung der Temperatur um 14 bis 15^o F. zur Folge haben und die Wärme könnte dann am Pole dieselbe sein, wie jetzt in 76^o Breite; aber, fügt er hinzu, diese Temperatursteigerung kann nicht stattfinden, weil die ganze Wärme zur Schmelzung der Eiskalotte verwendet werden würde. Er meint jedoch, daß die Kombination der Veränderungen der Schiefe und Exzentrizität ausreichen würden, um die ganze Eiskalotte wegzuschaffen. ²⁾ Aus dem Umstande, daß, wenn $\epsilon = 0$ wäre, die polare Zone kälter wäre, folgert er, daß die Vergrößerung der Schiefe die Wärmezufuhr zu den Polen vermehrt; ja er meint, daß, wenn die britischen Inseln ein Teil der kalten Zone würden, ihr Klima wärmer würde und schließt: It is not necessary to dwell further on the absurdity of the supposition, that an increase of obliquity can possibly account for the glacial epoch. ³⁾ Lyell ⁴⁾ hingegen ist der Meinung, daß eine Verminderung der Schiefe infolge der größeren Ausbreitung der Sonnenstrahlen über die polare Zone eine Milderung des polaren Klimas zur Folge haben müßte.

Es ist ja klar, daß gerade hier große Vorsicht in der Deutung der Phänomene und die Berücksichtigung sehr mannigfacher Umstände nötig wird. Wäre z. B. $\epsilon = 90^{\circ}$, so würde am Pol ein halbes Jahr tropische Hitze, ein halbes Jahr eisige Kälte herrschen und es fragt sich, wer im „Kampfe des Winters mit dem Sommer“ hier den Kürzeren ziehen müßte.

Die beiden Einflüsse der Schiefe und Exzentrizität lassen sich in folgender Weise zusammenfassen. Bezeichnet man mit $U = 182\cdot62$ Tagen die Dauer des Halbjahres bei gleichmäßiger Bewegung der Erde, so wird die Länge des Sommers T_s und des Winters T_w :

$$T_s = U \left(1 - \frac{4e}{\pi} \sin \Pi \right); \quad T_w = U \left(1 + \frac{4e}{\pi} \sin \Pi \right).$$

Ist $\Pi = 90^{\circ}$, so fällt der Sommer ins Perihel, ist $\Pi = 270^{\circ}$, so fällt er ins Aphel. Man hat daher:

¹⁾ l. c. S. 393.

²⁾ l. c. S. 403.

³⁾ l. c. SS. 412 und 416.

⁴⁾ Principles of Geology, 11. Ausgabe, I. Bd., S. 294.

für den Perihelsommer und Aphelwinter:

$$T_{ps} = U \left(1 - \frac{4e}{\pi} \right); \quad T_{aw} = U \left(1 + \frac{4e}{\pi} \right)$$

für den Aphelsommer und Perihelwinter:

$$T_{as} = U \left(1 + \frac{4e}{\pi} \right); \quad T_{pw} = U \left(1 - \frac{4e}{\pi} \right).$$

Da nun die tägliche von der Sonne erhaltene Wärmemenge:

$$w = \frac{W}{T} = \frac{W}{U(1 \pm \epsilon)} = \frac{W}{U} (1 \mp \epsilon + \epsilon^2)$$

ist und die Erwärmung der polaren Kalotte dem Sommer, der antipolaren Kalotte dem Winter entspricht, so hat man, wenn W_p, W_a die in den Formeln (3) S. 258 gegebenen Werte bedeuten

$$\text{für den Perihelsommer: } w_{ps} = \frac{W_p}{UV\sqrt{1-e^2}} \left(1 + \frac{4e}{\pi} + \frac{16e^2}{\pi^2} \right);$$

$$\text{für den Aphelwinter: } w_{aw} = \frac{W_a}{V\sqrt{1-e^2}} \left(1 - \frac{4e}{\pi} + \frac{16e^2}{\pi^2} \right)$$

$$\text{für den Aphelsommer: } w_{as} = \frac{W_p}{UV\sqrt{1-e^2}} \left(1 - \frac{4e}{\pi} + \frac{16e^2}{\pi^2} \right);$$

$$\text{für den Perihelwinter: } w_{pw} = \frac{W_a}{V\sqrt{1-e^2}} \left(1 + \frac{4e}{\pi} + \frac{16e^2}{\pi^2} \right)$$

oder wenn

$$\frac{N}{U} (1 + \nu) \pi = w_0; \quad \frac{1}{V\sqrt{1-e^2}} = 1 + \frac{1}{2} e^2$$

eingeführt wird:

$$w_{ps} = w_0 \left[1 + \frac{4e}{\pi} + \left(\frac{16}{\pi^2} + \frac{1}{2} \right) e^2 + (1 + \frac{1}{3}\nu) \frac{2}{\pi} \sin \epsilon \right]$$

$$w_{aw} = w_0 \left[1 - \frac{4e}{\pi} + \left(\frac{16}{\pi^2} + \frac{1}{2} \right) e^2 - (1 + \frac{1}{3}\nu) \frac{2}{\pi} \sin \epsilon \right]$$

$$w_{as} = w_0 \left[1 - \frac{4e}{\pi} + \left(\frac{16}{\pi^2} + \frac{1}{2} \right) e^2 + (1 + \frac{1}{3}\nu) \frac{2}{\pi} \sin \epsilon \right]$$

$$w_{pw} = w_0 \left[1 + \frac{4e}{\pi} + \left(\frac{16}{\pi^2} + \frac{1}{2} \right) e^2 - (1 + \frac{1}{3}\nu) \frac{2}{\pi} \sin \epsilon \right]$$

Für verschiedene Werte von e, ϵ und ν ergibt sich die folgende Tafel:

$e =$	$1 + \frac{4e}{\pi} + 2 \cdot 1 e^2$	$1 - \frac{4e}{\pi} + 2 \cdot 1 e^2$	$(1 + \frac{1}{3}\nu) \frac{2}{\pi} \sin \epsilon$
0.00	1.0000	1.0000	$\nu = 0.0$ 0.1 0.2 0.3
0.01	1.0130	0.9875	$\epsilon = 22^\circ 0'$ 0.2385 0.2464 0.2544 0.2623
0.02	1.0263	0.9753	$22^\circ 30'$ 0.2436 0.2517 0.2599 0.2680
0.03	1.0401	0.9637	$23^\circ 0'$ 0.2487 0.2570 0.2653 0.2736
0.04	1.0543	0.9525	$23^\circ 30'$ 0.2539 0.2623 0.2708 0.2792
0.05	1.0689	0.9416	$24^\circ 0'$ 0.2589 0.2676 0.2762 0.2848
0.06	1.0840	0.9312	$24^\circ 30'$ 0.2640 0.2728 0.2816 0.2904
0.07	1.0995	0.9212	$25^\circ 0'$ 0.2691 0.2780 0.2870 0.2960

Wie man sieht, sind die von der Dauer des Sommer- und Winterhalbjahres abhängigen Glieder, die von der Ordnung der Exzentrizität sind und die von

der Änderung der Schiefe abhängigen Glieder, die von der Ordnung von $d\epsilon$ sind, so wie die von der Diathermansie abhängigen Glieder von der Ordnung $\nu \sin \epsilon$ von nahe gleicher Größe, während die Glieder, welche den direkten Einfluß der Exzentrizität auf die Wärme angeben $\frac{1}{2}e^2$ sogar merklich kleiner bleiben als das noch von der Dauer des Sommers und Winters abhängige Glied zweiter Ordnung $1.6 e^2$.

Für das weitere kann man die verschiedene Diathermansie im Sommer und Winter dadurch berücksichtigen, daß man für den Winter ν anders annimmt, als für den Sommer. Infolge der Winternebel wird man ν für den Winter selbst doppelt so groß nehmen können und hat dann z. B. für die Gegenwart mit $e = 0.0167$, $\epsilon = 23^\circ 27'$ das Verhältnis der mittleren täglichen Wärmemenge

$$v = \frac{w_s}{w_w} = \frac{1.2407}{0.7511} = 1.65.$$

Man erhält weiter mit dem	für den Perihelsommer	Aphelsommer
Maximum von e , Maximum von ϵ :	$v = 2.187 (2.219)$	$1.605 (1.623)$
Maximum von e , Minimum von ϵ :	$2.031 (2.055)$	$1.385 (1.398)$
Minimum von e , Maximum von ϵ : ¹⁾	1.792	(1.815)
Minimum von e , Minimum von ϵ :	1.672	(1.690)

wobei für den Sommer $\nu = 0.1$, für den Winter $\nu = 0.2$ und $\nu = 0.3$ (eingeklammerte Zahlen) angenommen wurde.

Hier zeigt sich das einigermaßen überraschende Resultat, daß eine selbst wesentlich stärkere Absorption im Winter für den klimatischen Unterschied von Sommer und Winter weniger von Einfluß ist, als die Änderung der astronomischen Elemente in dem hier zugrunde gelegten Umfange. Es zeigt sich aber weiter, daß eine Veränderung in der Neigung der Ekliptik einen wesentlich geringeren Einfluß hat, als die Änderung der Exzentrizität. Sowohl für das Maximum als für das Minimum von e wird die ganz beträchtliche Änderung in der Schiefe der Ekliptik von 3° einen Unterschied von 0.13 (in der Einheit der angegebenen Relativzahlen) während die allerdings sehr bedeutende Änderung der Exzentrizität 0.40 Einheiten hervorzurufen vermag. Es bedürfte daher einer dreimal so großen Änderung der Neigung, d. i. einer solchen von fast 10° um jene Änderung in dem Wärmeverhältnis hervorzurufen, welche eine Änderung der Exzentrizität in den hier angegebenen Grenzen erzeugen würde.

Dabei wurde angenommen, daß die Änderung der Verhältnisse der täglichen Wärmemenge einen Maßstab für die Klimaänderung gibt und auf die Dauer von Sommer und Winter nicht Rücksicht zu nehmen ist. Denn zieht man die Dauer der Insolation ebenfalls in Betracht, so würde ja jederzeit die größere tägliche Wärmemenge durch die kürzere Dauer und umgekehrt, kompensiert. Allein in dieser Weise sind die Verhältnisse eben nicht aufzufassen. Die Kompensation ist stets nur eine teilweise.

Unter der Voraussetzung eines völlig gleichmäßigen Wärmeeinflusses w während einer gewissen Periode (welchem ein gewisses Temperaturngleichgewicht mit einer Mitteltemperatur nahe 0° entsprechen würde) und desselben Gesamt-

¹⁾ Unterschied zwischen Perihel- und Aphelsommer fällt für $e=0$ weg.

wärmezufusses mit den Extremen $w_1 = w - \omega$ (Nacht, Winter) und $w_2 = w + \omega$ (Tag, Sommer) wird der Effekt durchaus nicht derselbe sein. Das Wärmeminimum w_1 inauguriert die Eisbildung und das Wärmemaximum w_2 vermag eben das gebildete Eis nicht zu schmelzen.

Würden allerdings Verdunstung und Kondensation einen Kreisprozeß auf der Erde bilden, so daß die gesamte von der Sonne gelieferte Wärme der Erde erhalten bliebe, so würde die Summe des ganzen Wärmetüberschusses im Sommer gerade ausreichen, um den ganzen Eisvorrat, der durch das Minimum des Wärmezufusses erzeugt würde, auf das ursprüngliche, also auf ein mittleres Maß, zu reduzieren. Da aber die Verdunstungswärme einen Wärmeverbrauch bedeutet, die Kondensationswärme hingegen meist durch die Luftzirkulation von der Erde entfernt wird, so bedeutet der Kreislauf des Wassers für die Erde tatsächlich einen Wärmeverlust.

Betrachtet man jetzt Punkte in derjenigen Höhe über der Erdoberfläche oder derjenigen geographischen Breite, welche für einen gewissen Zeitraum (Tag, Jahr) diejenige mittlere Wärmemenge empfangen, welcher ein Temperaturgleichgewicht mit der Mitteltemperatur nahe aber etwas über 0° entspricht. Bei einer Verminderung der Amplitude des Wärmezufusses wird zur Zeit des Minimums des Zufusses eine erhöhte Erwärmung, daher erhöhte Verdunstung, vergrößerter Wärmeverlust und infolge desselben und des vermehrten Dampfgehaltes vermehrte Bildung von Eis stattfinden, welches trotz des später erhöhten Wärmezufusses nicht mehr ganz zum Schmelzen gebracht werden kann. Es werden die während der beiden Extreme, tatsächlich verfügbaren Wärmemengen $w_1 = w - \omega - \omega'$, $w_2 = w + \omega - \omega''$ sein, wenn ω' ω'' die Wärmeverluste durch die Verdunstung sind, also diejenigen Teile der Kondensationswärme, welche durch die Luftzirkulation (und Strahlung in den obersten Luftschichten) verloren gehen. Der Wärmeverlust $\omega' + \omega''$, der eine tatsächliche Depression der Mitteltemperatur infolge des Kreislaufes des Wassers darstellt, wird aber um so fühlbarer, je näher das Wärmeminimum der dem Gleichgewichtszustand entsprechenden mittleren Wärmezufuhr bleibt.

Hiebei war vorerst nur von denjenigen Punkten die Rede, deren Temperatur in der Nähe des Gefrierpunktes liegt, in den Randzonen der Eisbildung. Für die Betrachtung der Verhältnisse auf der ganzen Erdoberfläche muß zunächst der extreme Fall: Schiefe der Ekliptik gleich 90° ausgeschlossen werden. Es bedürfte einer besonderen Untersuchung, wie sich in diesem Falle die Erwärmungsverhältnisse mit Rücksicht auf Ausstrahlung und Zirkulation in der Atmosphäre gestalten würden. Die Betrachtung dieses Falles erweist sich jedoch als unnötig; die astronomischen Untersuchungen zeigen, daß dieser Fall auf der Erde in deren gegenwärtigen kosmischen Verhältnissen als ausgeschlossen zu betrachten ist. Es gilt dies wohl auch für das andere Extrem, die Schiefe der Ekliptik gleich Null, doch hebt sich dieser Fall nicht so sehr von den mittleren Verhältnissen ab.

In den mittleren Verhältnissen (also einschließlich desjenigen der Schiefe der Ekliptik gleich Null) sind aber die Resultate für die extremen Polhöhen und die mittleren Breiten nicht ganz identisch. In den äquatorialen Regionen

wird jede Verminderung der Schiefe eine gleichmäßigere Ausbreitung der Sonnenbestrahlung über das ganze Jahr zur Folge haben; die Extreme an den Wendekreisen, (welche bei der Schiefe 0^0 ganz wegfallen) werden gemildert, Verdunstungs- und Niederschlagsmenge aber werden sich hier kaum wesentlich ändern, da im kontinentalen Teile die Temperatur nicht wesentlich vermindert, an der Küste und über dem Meere die Verdunstung stets einen Ausgleich in dem jetzt vorhandenen Sinne bewirken würde. Da für die Regionen der Schneegrenze am Äquator das bereits vorhin gesagte gilt, so wird also auch hier mit einer Verminderung der Schiefe eine Erniedrigung der Schneegrenze verbunden sein.

In den Polarregionen würde bei einer Verminderung der Schiefe an den für die Vereisung wesentlich in Betracht zu ziehenden Teilen, in den Grenzgebieten, zunächst eine Verkleinerung der zirkumpolaren Kältezone und damit eine Erhöhung der Wintertemperatur, eine stärkere Verdunstung zur Zeit der Eisbildung und damit eine Vermehrung der Eisbedeckung auftreten, welche durch die gleichgroße Erhöhung der Sommertemperaturen nicht kompensiert werden kann. Auch die ganze polare Kalotte wird im gleichen Sinne beeinflusst, wenn sich auch dort der Einfluß nur in einer stärkeren Beweglichkeit der vorhandenen Eismassen offenbart. Selbst die kontinentalen Gebiete, in denen die Bedingungen für die Eisbildung durch die strenge Winterkälte nicht vorhanden sind, werden in dem Maße, als die Wintertemperaturen steigen, der Vereisung zugänglicher. Eine weitere Milderung der Gegensätze muß auch zunächst in den Übergangsbereichen, diese den erwähnten Einflüssen zugänglicher machen und das Weitergreifen der Vereisung von den Vereisungszentren aus nach sich ziehen, so daß eine einmal eingeleitete Vereisung den Keim für die Vergrößerung derselben in sich trägt.

In den mittleren Breiten werden allerdings etwas andere Folgen möglich sein. Mildere Wintertemperaturen und um weniges niedrigere Sommertemperaturen sind der Entwicklung einer üppigen, wenn auch nicht gerade tropischen Flora wesentlich günstiger. Da aber auch hier in der Region des ewigen Schnees die Verhältnisse ganz analog liegen, wie in den Polarregionen, so folgt daraus, daß eine Verminderung der Schiefe der Ekliptik die Gegensätze zwischen Gletscher- und Talregion verschärfen wird, daß, während in der Gletscherregion — namentlich in der Nähe von wasserdampf führender Luft, also in der Nähe des Meeres — ein Wachsen der Gletscher stattfinden kann, dabei eine reichere Entfaltung der Vegetation in den gletscherfreien Gebieten stattfinden wird, wie dieses noch gegenwärtig in Patagonien, Neu-Seeland u. s. w. gefunden wird.

Eine Vergrößerung der Schiefe der Ekliptik mit Vermehrung der Sonnenstrahlung im Sommer, Verminderung derselben im Winter wird in den gemäßigten und Polarregionen der Gletscherbildung im Winter hinderlich sein, hingegen eine üppige Flora im Sommer zur Entfaltung bringen können. In den Zirkumpolarregionen kann sich dann bei der großen Transparenz der Luft und der lange anhaltenden, andauernden Bestrahlung durch die Sonne im Sommer eine reiche Flora entfalten, die in eisfreien Gebieten unter der kräftigen Insolation und der starken Absorption der Wärme durch den Boden selbst bei nicht allzu hohen Lufttemperaturen in der Umgebung üppig gedeihen kann,

und durch einen mäßigen Eismantel, der sich in der Übergangsjahreszeit (Herbst) bildet, geschützt, ohne besonders starke Entfaltung von Niederschlägen in den strengen Kälten, im folgenden Sommer neu ersteht.

Es wurde eingewendet, daß die Art der Vereisung des Mars trotz der großen Exzentrizität seiner Bahn gegen die erwähnten Erklärungen spreche. Gegen diese Behauptung spricht aber eine sehr schwerwiegende Tatsache: die Beobachtungen des Mars erstrecken sich auf einen viel zu kurzen Zeitraum, um Schwankungen in der Vereisung konstatieren zu lassen. Auch auf der Erde wurden ja die Eiszeiten nicht durch die Beobachtung des Eises selbst konstatiert, und Moränen einer früheren Vereisung auf dem Mars zu finden, dürfte wohl noch lange nicht glücken. Und daß die Vereisung der beiden Hemisphären des Mars eine nahe gleiche ist, kann möglicherweise in lokalen, uns gegenwärtig noch unbekanntem Verhältnissen liegen (Unterschied des Gesteines), möglicherweise in einer gegenwärtigen Kompensation der Wirkung der Exzentrizität und Bahnneigung. Würde tatsächlich die gleiche Wärmemenge in gleichen Zeiten in verschiedenen Entfernungen von der Sonne den gleichen thermischen Effekt erzeugen, so müßte dieses ja auch für die Kometen gelten, bei denen ja die Bewegung genau nach denselben Gesetzen stattfindet (Geschwindigkeit der Bewegung und Entfernung stehen in demselben Verhältnisse, wie bei den Planeten) und daß bei diesen die größere Entfernung nicht durch das längere Verweilen am selben Orte kompensiert wird, gibt einen der schlagendsten Beweise dafür, daß die in gleichen Zeiten auffallenden gleichen Wärmemengen dennoch in größerer Sonnennähe einen größeren thermischen Effekt haben, der sich bis zur Verdampfung von Metallen (Auftreten von Metallinien im Spektrum) im Perihel steigern kann.

Eine Ursache hiefür anzugeben, ist für die vorliegenden Untersuchungen insofern von Wichtigkeit, als ja die Tatsache im Widerspruch mit den Resultaten der Analyse zu stehen scheint. Es bedarf jedoch nur der Annahme, daß das im Weltraum angenommene, die Bewegungen der Himmelskörper beeinflussende „Widerstehende Medium“ auch den Fortgang der Wärmestrahlen hemmt, eine gewisse, wenn auch noch so kleine Absorption ausübt, um den Einfluß der Exzentrizität zu erklären. Für kleine Änderungen mäßig, vielleicht verschwindend, macht sich derselbe auf große Entfernungen hin besonders merklich. Und ist, wie die Astronomie aus mancherlei Erscheinungen anzunehmen gezwungen ist, dieses Medium in der Sonnennähe dichter als in der Sonnenferne, so wird der Einfluß beim Mars geringer als bei der Erde, und überhaupt für alle jene Körper schwächer, deren Bahnen vollständig in einen von der Sonne entfernteren Bereiche fallen, hingegen in dem Maße stärker, als die Bahnen entweder überhaupt in der Sonne näheren Bereichen liegen oder aber sich auf sehr verschiedene Bereiche erstrecken.

Wenn auch Änderungen der Exzentrizität und der Schiefe der Ekliptik insofern im gleichen Sinne wirken, als eine Vergrößerung derselben eine Vergrößerung der Amplitude des Wärmezufusses, zur Folge hat, so wirken sie doch, wie schon erwähnt, insofern einander entgegengesetzt, als eine Vergrößerung der Exzentrizität alternierende Vereisung in den beiden Hemisphären mit der Periode der Perihelbewegung der Erdbahn, d. i. mit der Periode von 21.000 Jahren, eine

Verkleinerung der Schiefe der Ekliptik aber gleichzeitige Vereisung in denselben erzeugen würde. Es möge, um einen Überblick zu ermöglichen, die fortschreitende Vereisung dargestellt werden, durch die Herabdrückung der Schneelinie im vertikalen Sinne etwa in Hunderten von Metern, im horizontalen Sinne in Hunderten von Kilometern, und zwar möge dem Betrage einer Vergrößerung der Exzentrizität von 0.1 die Herabdrückung der Schneelinie um s_1 , der Verkleinerung der Neigung um 1° die Herabdrückung der Schneelinie um s_2 entsprechen. Die Kombination beider Ursachen: Veränderung der Exzentrizität um δe , der Neigung um $\delta \epsilon$ würde dann eine Herabdrückung der Schneelinie im Betrage von

$$s_1 \delta e + s_2 \delta \epsilon \sin \Pi$$

zur Folge haben, wobei das Pluszeichen für die nördliche Hemisphäre, das Minuszeichen für die südliche Hemisphäre gilt, weil im Perihelsommer und Aphelwinter die Amplitude am größten, daher die Vereisung am stärksten ist.

Beide Ursachen stimmen aber darin überein, daß dann eine Vergrößerung der Eiskalotte an den Polen entsteht, wobei der Mittelpunkt der Vereisung stets im Pole fest bleibt.

Wenn nun aber durch irgend welche Ursachen die Erdachse ihre Lage in der Erde selbst ändert, derart, daß die Drehung der Erde nicht immer um ein und dieselbe, in der Erde festen Linie stattfindet, sondern eben diese Gerade, um welche die Rotation stattfindet, ihre Lage etwas ändern würde¹⁾, so werden die Schnittpunkte derselben mit der Erdoberfläche, das sind die Pole, sich etwas verschieben, eine Erscheinung, die tatsächlich durch die beobachteten „Polhöhenänderungen“ außer Zweifel gesetzt ist. Dadurch würde dann das Zentrum der Vereisung eine immer andere Lage annehmen, die Vereisung würde sich daher in dem Meridiane der Polverschiebung auf der einen Seite weiter gegen den Äquator nähern, auf der entgegengesetzten Seite zurückziehen. Die Verschiebung würde auf beiden Hemisphären gleichzeitig, in demselben Meridian, aber nach entgegengesetzten Richtungen stattfinden. Würde z. B. eine Verschiebung der Pole in dem Meridian von Greenwich um 1° stattfinden, so daß der Pol sich Greenwich nähert, so würde Greenwich eine um 1° größere geographische Breite erhalten; die ganze Eiskalotte um den Nordpol würde sich gegen Greenwich zu um 1° nähern und in dem entgegengesetzten Meridian von 180° Länge daher um ebensoviel von den Orten Ostasiens entfernen. Auf der südlichen Hemisphäre findet die korrespondierende Verschiebung in dem Meridian von Greenwich vom gegenwärtigen Äquator (der Äquator verschiebt sich ja ebenfalls), also von den südafrikanischen Regionen weg, statt, auf der entgegengesetzten Seite hingegen wird sich die Eiskalotte den Inseln des westpazifischen Ozeans nähern, ohne daß sich dabei die Eiskalotte zu vergrößern brauchte.

Ob die starke Vereisung von Europa und Amerika zur Eiszeit nur einer Vergrößerung der Eiskalotte entsprang, ob eine konkordante, sei es gleichzeitige oder um etwa 10.000 Jahre abstehende Vergrößerung derselben auch auf der südlichen Hemisphäre stattfand, ob die Vereisung von Europa und Amerika auch oder

¹⁾ Die genauere Untersuchung dieser Verhältnisse folgt im nächsten Kapitel.

vorwiegend einer Verschiebung ihres Zentrums gegen den nordatlantischen Ozean mit einer korrespondierenden, entgegengesetzten Verschiebung auf der Südhalbkugel entsprang — sind Fragen, die erst in der Zukunft ihrer Lösung harren. In der langen Dauer der quartären Eiszeit mit den periodischen Interglazialzeiten könnte man immerhin eine Bestätigung der oben für das Zusammenwirken von δe und $\delta \epsilon$ aufgestellten Formel sehen, woraus sich die Periode der Interglazialzeiten zu 21.000 Jahren²⁾, d. i. die Zwischenzeit zwischen maximaler Vergletscherung und maximalem Rückzug zu 10.500 Jahren ergeben würde. Würden δe und $\delta \epsilon$ gleichzeitig ihre extremen Werte erreicht haben, so würde dieses einer maximalen Vergletscherung entsprechen; die maximale Amplitude der Gletschervorstöße und Rückzüge in der Interglazialzeit würde den Betrag $2\delta_2\delta\epsilon$ geben. In dem Maße, als $\delta \epsilon$ und δe sich ihren Mittelwerten nähern, wird die Maximalvergletscherung schwinden, und gleichzeitig werden die Gegensätze der Interglazialzeiten sich abschwächen, bis schließlich ein gewisser Stand der Vergletscherung, dem Minimum von e und Maximum von ϵ entsprechend, resultiert. Da aber die Änderungen der Exzentrizität und Neigung, wenn sie sich uns auch unter dem Bilde von sekulären Veränderungen zeigen, doch als periodische mit ungemein langer Periode aufzufassen sind, so wird die Erscheinung eine periodisch wiederkehrende sein, doch mit der Komplikation, daß die Perioden der Veränderungen von δe und $\delta \epsilon$ daher auch die Epochen der Maxima und Minima nicht zusammenfallen werden.

Wenn also auch durch die mathematische Analyse die gegenwärtigen Annahmen über die Ursachen die Eiszeiten im großen und ganzen bestätigt erscheinen, so ist durch dieselbe doch in einer Richtung ein kleiner Fortschritt gemacht, indem die mathematische Analyse es ermöglichte, in den Kreis der Ursachen noch etwas tiefer einzudringen: auf die Ursachen der Veränderungen der meteorologischen Elemente überzugehen. Da drängt sich aber dann noch die Frage auf, ob man in dieser Kette der Ursachen nicht noch einen Schritt weiter gelangen kann, ob es denn nicht möglich wäre, die Ursachen für die Änderungen der Neigung und der Polhöhen anzugeben. Es ist also nötig, noch tiefer in die astronomischen Ursachen einzudringen, um zur prima causa — soweit dies überhaupt möglich ist — vorzudringen.

²⁾ Daß auch diese Periode Veränderungen unterworfen sein kann, wird im nächsten Kapitel gezeigt.

XI. Kapitel.

Astronomische Ursachen.

d) Änderungen der Polhöhen und der Schiefe der Ekliptik.

Die Ursachen, welche Veränderungen in der Größe der Exzentrizität der Erdbahn und eine Drehung des Perihels derselben bewirken, sind im wesentlichen in den Störungen zu suchen, welche die Planeten unseres Sonnensystems aufeinander ausüben. Diese Untersuchungen gehören nicht in den Kreis der hier zu erörternden Ursachen, und müssen direkt der Astronomie entnommen werden, deren Resultate auch bereits in früherer Verwendung fanden. Ihre Sicherheit und der Zeitraum ihrer Gültigkeit sind durch den Grad der Konvergenz der Entwicklungen bestimmt.

Anders steht es mit der Schiefe der Ekliptik und den Polhöhenänderungen. Die erstere ist von zwei Elementen bedingt, von der Lage der Ebene der Erdbahn im Raume bei unveränderter Lage der Rotationsachse und damit des Rotationsäquators der Erde und anderseits von einer eventuellen Veränderung der Rotationsachse selbst. Die Lage der Bahnebene im Raume ist ebenfalls ein von den Störungen durch die Planeten abhängiges Element und in dieser Richtung sind die diesbezüglichen Zahlenwerte ebenfalls der Astronomie zu entnehmen. Die zweite Ursache der Änderung in der Schiefe der Ekliptik: die Umstellung der Erdachse und in gleicher Weise die Polhöhenänderungen können durch Massenumlagerungen auf der Erde selbst bedingt sein, und es ist zu untersuchen, inwieweit diese auf die beiden erwähnten Momente von Einfluß werden können.

Zu den auf der Erde stattfindenden Massenumlagerungen sind im wesentlichen die folgenden zu zählen:

1. Massenumlagerungen durch den Geschiebetransport;
 2. Massenumlagerungen durch die Transgression der Meere, diese selbst bedingt durch die Veränderung der Achsenlage selbst (wechselseitiger Einfluß mit gegenseitig sich bedingendem Effekt);
 3. Änderung in der Massenanordnung durch die Eisbedeckung selbst;
 4. Änderung in der Massenanordnung durch eine veränderte Abplattung.
- I. Über die Änderungen der Massenlagerungen durch den Geschiebetransport wurde schon früher gesprochen, doch sind hier noch einige Ergänzungen nötig,

Um ein Beispiel für die eiszeitlichen Massentransporte zu geben, mögen die Zahlen angeführt werden, welche Penck¹⁾ über die in Bayern abgelagerten Massen gibt. Diese umfassen ein Areal von 150 km Länge, 60 km Breite und 60 m Dicke, gleich einem Volumen von $54.10^{10} m^3$ mit dem Gewichte von $108.10^{13} kg$. Diese kamen aus den Nordalpen. Nimmt man für das Gebiet, welches diese Masse lieferte, 150 km Länge, 100 km Breite, so ergibt dies eine Abtragung von 36 m. Es wäre allgemein, wenn das Streugebiet die Länge l , die Breite b hat, und dieses bei nahe paralleler Bewegungsrichtung ein Anhäufungsgebiet derselben Länge l und der Breite B überflutet die Denudation δ aus der Dicke d der Ablagerungsschicht

$$\delta = d \frac{b}{B}.$$

Es erklärt dies z. B. die relativ große Mächtigkeit der Südalpinen Ablagerungen gegenüber denjenigen der Nordalpen durch die viel geringere Breite des Ablagerungsgebietes. Später gibt Penck die Gesamtmasse der Geschiebetransporte in den Alpen zur Glazialzeit gleich $3000 km^3$ an: „Als mittlere Höhe der rekonstruierten präglazialen Landoberfläche erhalten wir 800 bis 840 m; die mittlere Höhe der heutigen Oberfläche des Mittellandes, genau in den gleichen Grenzen bestimmt, ist 570 m; somit beträgt die mittlere Abtragung des Mittellandes in der Quartärzeit 230 bis 270 m oder rund 250 m. Es sind im ganzen aus dem Areal von rund $12.000 km^2$ rund $3000 km^3$ Gestein entfernt worden.“²⁾ Nicht zu übersehen ist, daß trotz der Verschiedenheit im einzelnen, im ganzen doch der Massentransport in den Alpen nahe gleichmäßig nach beiden Seiten stattfand, während die norddeutschen und nordamerikanischen Massenverschiebungen wesentlich größer und dabei gleichartig stattfanden, daher für die Polverschiebung ihre Wirkung summierten. Ob man dabei die Massenablagerungen im Atlantischen Ozean als geringfügig anzusehen hat, weil das Nährgebiet, die Polarregion wenig Geschiebe liefert, oder ob auch hier ausgiebigere Massenablagerungen stattfinden, deren Größe aber völlig unbekannt bleibt, ist allerdings ein Umstand, durch den alle daraus zu ziehenden Schlüsse mit einer relativ großen Unsicherheit behaftet werden.

Bedenkt man, welch ungeheure Massenverschiebungen durch die stetige Wirkung des Gletscher- und Wassertransportes stattfinden, so sind die zeitweise allerdings oft in gewaltigen Mengen auftretenden Massenverschiebungen durch die Erdbeben und Vulkanausbrüche fast verschwindend. Der Einsturz des Krakataua, teilweise kompensiert durch Anschüttung von Auswurfstoffen im Umkreise von etwa $25 km^2$ erstreckte sich höchstens auf eine Tiefe von 300 m; eine gewaltige, aber doch in historischen Zeiten vereinzelt Erhebung ist diejenige des Jorulla am 28/29. September 1759.

Viel mehr ins Gewicht fallend sind hier die sekularen Hebungen u. zw. sowohl die Faltungen, mögen dieselben plötzlich, oder, was viel wahrscheinlicher ist, absatzweise aufgetreten sein, und die langsamen sekularen Hebungen von

1) „Vergletscherung der deutschen Alpen“, S. 330.

2) „Die Alpen im Eiszeitalter“, S. 603.

denen S. 48 gesprochen wurde. Die Gebirgsbildung durch Faltungen wird für die gegenwärtige Formation der Erde als mit dem Beginne des Quartär abgeschlossen erklärt und alles deutet darauf hin, daß, wie wiederholt erwähnt wurde, die quartäre Eiszeit sich auf der heutigen Form der Erdkruste abspielte. Nichtsdestoweniger müssen auch postglaziale Hebungen und Senkungen in bedeutendem Umfange angenommen werden. Auf eine postglaziale Hebung in Nordamerika wurde bereits S. 48 hingewiesen.¹⁾ Daß auch in Europa nach Zurückziehung des Eises das Land noch ungefähr 200 *m* unter dem jetzigen Niveau stand und sich erst später hob²⁾, könnte auf das Nachlassen des Druckes und die gleichzeitige Erwärmung nach dem Rückzuge des Eises zurückgeführt werden.

Die Gletschergrenzen zur Eiszeit in den Alpen, die Art der Ablagerung im Norden und Süden, die relative Kürze und der Verlauf der eiszeitlichen Gletscher an den Südhängen der Alpen deuten auf durchgreifende postglaziale Veränderungen hin, und es ist nicht schwer, sich dieselben nach dem folgenden Bilde zu denken :

Das Gefälle der Alpen war zur Eiszeit nach allen Seiten ziemlich gleich und das Profil etwa durch den Riß A A A (Fig. 13) darzustellen. Nimmt man dann an, daß der zentrale Teil der Alpen postglazial eine Hebung erfuhr und überdies die Poebene eine Senkung, so würde sich das gegenwärtige Profil *B P B* hergestellt haben, so daß die jetzigen steilen Gletscherfälle der Südalpen sich erst postglazial herstellten.³⁾ Ob diese Senkung der Poebene eine Folge der mächtigen Anschüttungen war, durch welche der Zustand der Isostasie gestört worden war, oder ob tektonische Prozesse als Ursache anzusehen sind, mag dahingestellt bleiben. Einerseits können ja die mächtigen Anschüttungen, von denen früher die Rede war (s. S. 100) ganz wohl Senkungen zur Folge gehabt haben, deren Realität durch die Tatsachen als erwiesen angesehen werden kann, daß die Anschüttungen stellenweise bis 24 *m* unter den Meeresspiegel reichen⁴⁾; andererseits aber war ja die Gegend der Westalpen in früheren Zeiten vulkanisch⁵⁾. Nebst der Mächtigkeit der Ablagerungen und der Tiefe, bis zu welcher dieselben reichen, spricht auch für eine postglaziale Hebung die relativ große Höhe, in welcher die Gletscher der Südalpen endigten und der Verlauf der Flußtäler, welche überall fast plötzlich eine Richtungsänderung beim Übertritt in die Ebene zeigen, womit

¹⁾ Die dort erwähnten Strandlinien an der Ostküste von Nordamerika werden von amerikanischen Geologen als Zeugen postglazialer Hebungen gedeutet. (s. Uhlig, Erdgeschichte, II. Bd., S. 461).

²⁾ Burr Tyrell l. c. S. 160.

³⁾ Das Gefälle der Gletscher ist in den Nordalpen, wo sie in die Ebene hinaustraten, etwa 1·5‰; gegen die Poebene zu sind dieselben nach Penck („Die Alpen im Eiszeitalter“) für den Gletscher der Dora Riparia 3·3‰ (S. 756), der Dora Baltea anfänglich 4·5‰, in der Ebene noch 2·5‰; Val Sesia 4·6‰ (S. 770); Tessingletscher 2·4‰, Comogletscher 4·4‰, Leccogletscher 2·5‰ (S. 785); Ogliogletscher, und zwar Borlezzaast 6·7‰, Cavalinaast 5·3‰, Isoeast 3·8‰ (S. 830).

⁴⁾ „Wir haben es hier mit einer ausschließlich quartären Schichtfolge von 146 *m* Mächtigkeit zu tun, welche bei ausgesprochen kontinentaler Entstehung bis 24 *m* unter den Meeresspiegel reicht“ (Penck, „Alpen im Eiszeitalter“, S. 792).

⁵⁾ Vgl. die Karte der Vulkanverteilung in Neumayer-Uhlig, Erdgeschichte, S. 194.

auch eine ebenso plötzliche Änderung im Gefälle verbunden ist: es sind förmliche Knickungen im horizontalen wie vertikalen Sinne vorhanden.

Diese eigentümliche Form der Bodenentfaltung, welcher auch die eiszeitliche Gletscherentfaltung entspricht, hat natürlich verschiedene Erklärungen gefunden. Penck meint, daß vor allem der ungemein steile Abfall der piemontesischen Alpen gegen die Poebene die geringfügige Gletscherentfaltung bedingte. Dieses kann nicht ganz richtig sein; unmittelbar darauf findet sich die folgende Bemerkung: Der Gletscher der Dora Riparia entwickelte sich zu 89 *km* Länge, derjenige der Dora Baltea 133 *km*, der Gletscher der Stura zu 53 *km* und der Orco- und Sesiagletscher 50 *km* und Penck sagt selbst „... immerhin ist bemerkenswert, daß aus einem Gebirge von über 3000 *m* Gipfelhöhe (dem Mont Viso) nur Gletscher von höchstens 20 *km* Länge hervorgegangen sind... Mit dieser geringen Entfaltung der Haupttalgletscher steht die Entfaltung der Seitengletscher in einem auffälligen Gegensatze“. Sodann ist zu bemerken, daß die Gletscher der Haupttäler, wenn ihre geringe Ausdehnung auf ihre Steilheit zurückzuführen wäre, als Hängegletscher unmöglich so große Mengen von Geschieben hätten liefern können. Übrigens mag noch nebenher bemerkt werden, daß hier Hebungen manche Erscheinungen der Gesteinlagerungen in den Gebirgen, namentlich z. B. das isolierte, gleichsam abgerissene Auftreten von Gesteinen, besser zu erklären vermögen, als die moderne „Deckentheorie“ mit den in derselben angenommenen „Überschiebungen“, welche übrigens mit den Resultaten der mathematischen Analyse in direktem Widerspruch steht.

Zur Frage über die Massenverschiebungen ist noch der Umstand von Wichtigkeit, ob die Seen tektonischen oder glazialen Ursprunges sind, d. h. ob bei ihrer Bildung vertikale oder horizontale Verschiebungen stattfanden. Wenn auch zugegeben wird, daß die Seen jünger als das präglaziale Talsystem sind, so spricht dies noch nicht gegen die Entstehung durch postglaziale Senkungen.

Nach Penck besteht die Wirkung der Gletscher auf die Übertiefung der Täler darin, daß er die Talsohle ausschleift; ist das Gefälle des Gletschers genügend groß, so kann auch noch ein beträchtliches Gegengefälle eines Beckens überwunden werden, und der Gletscher strömt durch dieses hindurch. Derartige große Zungenbecken, die teilweise nach Penck durch die durchströmenden Gletscher zu Seen vertieft wurden, konstatiert Penck an dem Ausgang jeder der großen eiszeitlichen Gletscherströme der Alpen. „Es ist die Bildung der großen Zungenbecken auf der Nordseite der Ostalpen auf stabilem Boden ¹⁾ während des Eiszeitalters durch einen Erosionsvorgang geschehen.“ Für die Überwindung von starken Gegenneigungen werden die padanischen Seen als besonders charakteristisch angeführt. Diese zeigen auf der Südseite ein starkes Gegengefälle, welches aber noch immer kleiner ist, als das Gefälle der Gletscher. „Von der tiefsten Stelle des Lago Maggiore bis zu seinem Südenende beträgt die Steigung 372 *m* = 1·3%, hingegen das Gletschergefälle 2·8%; von der tiefsten

¹⁾ Nämlich ohne Einstürze und Senkungen, „Alpen im Eiszeitalter“, S. 249.

Stelle des Comersees gleich 410 *m* ist das Gefälle des Seebodens im Süden 3%, diejenige des Gletschers 3·3%.“

Mit der Mächtigkeit des Eises von 1200 bis 1300 *m* und der Größe des Eisdruckes von etwa 110 bis 115 Atmosphären kann wohl auch eine solche Gegenböschung überwunden werden, und scheint dies die Ansicht Pencks zu stützen. Allein immerhin hätte der Strom leichter über die mit Eis gefüllten Seebecken hinübergleiten können und der Gletscher hätte daher konservierend wirken müssen. Bemerkenswert ist allerdings, daß, wie aus den in wahrer Größe gezeichneten Seeprofilen ¹⁾ folgt, dieselben äußerst flach sind; nichtsdestoweniger muß namentlich bei aufgelagerten Massen die Gegenböschung als Hemmung für den Strom aufgetreten sein, der, wenn er auch anfänglich dem Seeboden bis zur Ausfüllung des Sees folgte, doch schließlich eine rein oberflächliche Strömung mit nahe horizontalen Strömungslinien einschlagen mußte. Penck meint aber: „Die heutige Gegenböschung ist allerdings größer, als das Eisgefälle zur Zeit des höchsten Standes der Würmvergletscherung; allein wir dürfen beide nicht miteinander vergleichen, weil sie nicht gleichzeitig bestanden. Die Gestalt des Seebeckens läßt sich für jene Zeit des Maximums nicht konstruieren. Wir wissen nicht, wieviel jederzeit nach dem Maximum erodiert, und anderseits auch nicht, wieviel gerade im Bereiche der heutigen Gegenböschung nachträglich akkumuliert worden ist, als der Gletscher während der Rückzugsphasen Moränen am Seeende aufbaute.“²⁾ Allein es ist kaum anzunehmen, daß gerade überall an der Gegenböschung die stärkste Anhäufung stattfand; im Gegenteil mußte die Gletschererosion, diese als wirkendes Agens angenommen, beim Gletschervorstoß gerade die sich als Hindernis entgegenstellende Gegenböschung am stärksten angreifen, und beim Gletscherrückzug diese am schnellsten freigeben.

Daß die Böschung der Seen und Flüsse zur Zeit der Vereisung eine andere war, daß selbst eine Böschung in eine Gegenböschung verwandelt werden konnte, hatte Penck ³⁾ in viel größerem Umfange angenommen. Er sagt, daß „rings um eine große, jedoch räumlich scharf begrenzte Erhebung herum alle die Flüsse, die nach ihr zustreben, eine Vermehrung des Gefalles erfahren, während diejenigen, welche von ihr wegstreben eine Verringerung ihres Gefalles erfahren, welche so weit gehen kann, daß dieses völlig umgewandelt werden kann. Die einen werden Talbildner, die andern schütten ihre Täler zu.“

Die theoretischen Untersuchungen, welche v. Drygalsky und Hergesell anstellten, zeigten, daß dieser Satz theoretisch völlig berechtigt ist, daß ihm jedoch praktisch keine allzu große Bedeutung zukommt. Da für die Lage der

¹⁾ Vgl. z. B. Geikie, l. c. S. 827 für den Loch Lommond, und ebenso „würde der Genfersee trockengelegt, so würde sein Bett nur den Anschein einer wellenförmigen, fast ebenen Fläche haben“; aber ebenso sagt Croll vom Meere: shallowness rather than depth should be its name; und man braucht nur an das Gefälle der großen Flüsse im Unterlauf zu denken, um den Einfluß selbst der geringsten Böschung richtig zu würdigen.

²⁾ „Die Alpen im Eiszeitalter“, S. 597.

³⁾ „Schwankungen des Meeresspiegels“, Jahrbuch der geographischen Gesellschaft zu München. Bd. 7 (1882).

Niveauflächen, welche das Gefälle bestimmen, das Potential in Betracht kommt, welches nur mit der ersten Potenz der Entfernung abnimmt, während Penck hiefür die Wirkung mit dem Quadrate der Entfernung abnehmend einführt, so wird, wie sich Hergesell ausdrückt,¹⁾ „der ganze Charakter der Erscheinung gemildert.“

Theoretisch ist es ja richtig, daß durch die Attraktion des Inlandseises Gefällsänderungen auftreten. Sei i (Fig. 14) der Winkel, den die gestörte Niveaufläche N mit der ursprünglichen N_0 einschließt, J_0 die Neigung eines Flusses gegen die ursprüngliche Niveaufläche, wenn der Fluß gegen das Inlandseis zuströmt, so ist die Neigung gegen die neue Niveaufläche $J = J_0 + i$; hingegen ist für einen Fluß, der von der Inlandseismasse wegströmt $J' = J_0' - i$. Wäre nun i von beträchtlicher Größe, so könnte im letzteren Falle selbst Umkehrung des Gefälles auftreten, und zwar dann, wenn $i > J_0$ wäre. In beiden Fällen könnte, im ersten Falle durch das verstärkte Gefälle und die gesteigerte Erosion, im letzteren Falle durch Verminderung des Gefälles und Ablagerung von Sedimenten vor der Mündung ein See entstehen. Da aber erheblichere Störungen der Niveauflächen mit etwas beträchtlicherer Neigung gegen die ursprüngliche Niveaufläche sich nicht weit von der Eismasse erstrecken und in einiger Entfernung diese Neigung schon eine außerordentlich geringe ist, so kann weder von einer Umkehrung des Gefälles, noch von einer wesentlich veränderten Erosionswirkung gesprochen werden und so ist der Schluß von v. Drygalsky völlig berechtigt: „So dürfte denn das Resultat hinreichend begründet sein, daß die Entstehung der norddeutschen Seen mit den diluvialen Deformationen des Geoides in keinem ursächlichen Zusammenhange steht durch die Geoiddeformationen werden kaum die seichtesten Lachen erklärt, für deren Auftreten es derartiger Theorien gar nicht bedarf; eine Erklärung des See-Phänomens liefern sie jedenfalls nicht.“²⁾

Von den Seen sind sicher viele Einsturzseen. Sacco hat dieses für die insubrischen Seen angenommen und diesen tektonischen Ursprung durch den Hinweis auf ihre eigentümliche Erstreckung gestützt. Penck erklärt ihre Gabelung durch den Lauf der Gletscher, welche das Gebirge wie ein Netzwerk überzogen; „auch der Bodensee gabelt sich in gleicher Weise.“³⁾ Taramelli meint, daß die Seen wohl Erosionsbecken sind, „entwickelt aber gleichzeitig die Idee, daß auf die postglaziale Hebung der Alpen eine spätere Senkung gefolgt wäre, durch welche das Gefälle der Täler umgekehrt und diese in Seen verwandelt wurden.“ Diesem Gedanken gibt auch Uhlig⁴⁾ Ausdruck: „Wenn nach Vollendung der Alpenfaltungen die Erosion der Täler vor sich gegangen, nachher aber das Alpengebirge als ganzes gesunken, das Vorland aber stehen geblieben ist, so mußten natürlich die Haupttäler im Innern der Gebirge

1) „Über den Einfluß, welchen eine Geoiddeformation auf die Höhenverhältnisse eines Plateaus und auf die Gefällswerte eines Flußlaufes haben kann“. Beiträge zur Geophysik von Gerland, B. 1, S. 115.

2) „Geoiddeformation zur Eiszeit“, S. 235.

3) „Die Alpen im Eiszeitalter“, S. 809.

4) „Erdgeschichte“, S. 569.

von ihrem Abfluß nach außen abgeschnitten worden sein und es mußten sich Seen bilden.“

Mit einer derartigen Deutung (einer postglazialen Senkung) scheinen aber gerade die Erscheinungen, welche die südlichen eiszeitlichen Alpengletscher bieten, in direktem Widerspruche zu stehen.

Auf eine postpliozäne Hebung führt auch Penck die Erscheinungen im Var-Tale zurück, ¹⁾ wendet aber ein, daß dieses nur lokale, sanfte Aufwölbungen gewesen sein können. Die Ansicht Stoppani's, daß die eiszeitlichen Gletscher sich in das Pliozänmeer ergossen, welches sich über die ganze Poebene erstreckte, wird wohl heute von niemandem geteilt und die marinen Pliozanschichten in der Poebene werden ausnahmslos für präglazial erklärt. Die Hebung der Alpen, welche durch eine vom Ortasee über den Lago Maggiore nach Osten sich erstreckende Terrasse in der Höhe von 400 bis 500 *m* erwiesen ist, die als ein alter Küstensaum des Pliozänmeeres gedeutet werden muß, konnte ja präglazial begonnen haben und erst postglazial, als das Pliozänmeer sich schon lange zurückgezogen hatte, vollendet worden sein. Von einer solchen postglazialen Hebung spricht z. B. Sacco und wenn Penck meint, „aber die postglazialen Hebungen der Westalpen, deren Spuren wir bereits wiederholt begegnet haben, besteht lediglich in einer sanften Aufwölbung des Gebirges und war nirgends mit einer Faltung und gegenseitigen Verschiebung der pliozänen Schichten verbunden. Der tektonische Vorgang war anders, als Sacco sich ihn vorstellt“, so kann dieses zugegeben werden oder auch nicht, aber immerhin ist mit der Tatsache zu rechnen, daß wir es hier mit postglazialen Vorgängen von ganz erheblichen Dimensionen zu tun haben, die mit den uns bekannten Vulkanausbrüchen und Erdbebenkatastrophen mindestens gleicher Ordnung sind. ²⁾

Kleinere Veränderungen, wie der Bergsturz von Flims, der Einsturz des Seefelder Passes, der einen zur Glazialzeit noch nicht eröffneten Paß erzeugte, u. s. w., sind als kleine, fast belanglose Änderungen gegenüber der Gesamthebung der Alpen anzusehen.

Denkt man die Strandlinien im Osten von Nordamerika, von denen S. 48 gesprochen wurde, als durch Wasseranziehung der Eismassen entstanden, so ist nach Drygalsky eine Mächtigkeit des Eises von 9000 *m* zu ihrer Erklärung erforderlich; zu ähnlichen Resultaten gelangt er durch die Diskussion anderer beobachteter Strandlinien. So zeigen an den beiden Seiten des Ontariosees die Terrassen eine Höhendifferenz von 40 *m*; für diese Stelle gilt aber die Rechnung ein Ansteigen um 0·008 *D*, so daß zur Erklärung dieser Verschiebung eine Mächtigkeit von 5000 *m* nötig wäre. Die alten Uferlinien am Agassizsee steigen in drei Terrassen von Südwest gegen Nordost sehr beträchtlich an; dieselben sind am Lake Travern 297, 312 und 321 *m* über dem Meere (2, 17 und 26 *m* über dem Seespiegel) und steigen gegen das Nordostende des Maple

¹⁾ „Die Alpen im Eiszeitalter“, S. 743 und 807. Auf postpliozäne (interglaziale) tektonische Prozesse, selbst Faltungen, schließt auch Credener (s. S. 126).

²⁾ Auch für die Nordalpen gibt Penck eine Hebung zu: „Die Lagerung der beiden Deckenschotter zwischen der Aaremündung und dem Höchsten macht zweifellos, daß der Nordostsaum der Alpen eine Aufwölbung erfahren hat“ (l. c. S. 408).

Lake auf 308, 330 und 358 *m* über dem Meere. Upham und Winchell haben dieses Ansteigen der Uferlinien ebenfalls auf die Attraktion des Inlandseises zurückgeführt; nach Drygalsky wäre hiezu eine Mächtigkeit des Eises von 3600 *m* erforderlich.

Nun kann man allerdings einwenden, daß alle diese Rechnungen nur als Näherungen anzusehen sind; daß eine Mächtigkeit des Eises von 3600 *m* vielleicht noch zulässig wäre. Allein Mächtigkeiten von 5000 und 9000 *m* dürfte wohl niemand für zulässig erachten und eine genauere Rechnung dürfte die Resultate wohl höchstens um 500 bis 1000 *m* ändern. Doch ist, ehe man den Schluß Drygalskys „daß die marinen Terrassen Nordamerikas Bewegungen der Erdrinde zu ihrer Erklärung bedürfen“ noch an einen anderen wichtigen Faktor zu denken, der überdies durch astronomische Untersuchungen noch wesentlich an Bedeutung gewinnt: an die Bewegung der Hydrosphäre durch Polverschiebungen.

III. Transgressionen der Meere nimmt Geikie in großem Umfange an. Er hat durchwegs oszillatorische Bewegungen der See — oder des Festlandes — oder beider zusammen — zur Erklärung des wechselnden Feuchtigkeitsgehaltes der Luft herangezogen. Er spricht den Satz in folgender Weise aus: We shall find, that genial climate conditions are almost invariably associated with a wide lande-surface while cold conditions are just as constantly accompanied by evidence of submergence ¹⁾, und daß in dieser konstanten Verbindung ein kausaler Zusammenhang vermutet wird, läßt sich leicht durchblicken. Die Aufeinanderfolge der Hebungen und Senkungen läßt sich nach seinen Angaben wie folgt festlegen.

Vor der zweiten (*R*-) Vergletscherung: Untertauchen der baltischen Küste mindestens 45 *m*, mit auffallend arktischer Fauna; gleichzeitig Untertauchen der den Kaspisee einschließenden Ländergebiete. Nach der zweiten Vergletscherung Hebung bis etwa 63 *m* höher als jetzt; mildes Klima; dabei hatte sich eine offene Kommunikation zwischen der Nord- und Ostsee durch Holstein hergestellt; Schleswig-Holstein, Dänemark unter Wasser ²⁾.

Vor der dritten (*W*-) Vergletscherung: Untertauchen von England um 120 bis 150 *m*, Skandinaviens bis 35 *m* unter das jetzige Niveau.

Vor der vierten (β -) Vergletscherung: Untertauchen von England um 35 *m*, Schottland 17 *m*, Skandinavien 130 *m*; Island zwischen 70 bis 80 *m*.

Postglazial war die Ostsee infolge der Hebung der westlichen Länder ein See (Ancylussee). Dänemark und Schweden waren zu einem großen Lande verbunden, welches auch die dänischen Inseln vereinigte. ³⁾ Die ganze Nordsee und Irische See waren ein sich über England, Schottland, Irland, die Shetlands-, Orkney-, und Hebrideninseln ausdehnendes Festland, das über den ebenfalls ausgetrockneten Ärmelkanal mit Frankreich und durch eine über die Faröer ziehende Landzunge

¹⁾ l. c. S. 410.

²⁾ So daß jedenfalls Bewegungen der Hydrosphäre und Hebungen und Senkungen des Festlandes stattfanden.

³⁾ Die Hebung der Belte um 40 *m* oder die Senkung des Wasserspiegels um diesen Betrag würde die Ostsee neuerdings in einen Landsee verwandeln.

mit Island und weiter mit Grönland verbunden war. Das Land umfaßte ungefähr die ganze Region der heutigen 200 *m*-Tiefenkurve der See.

Andere Geologen sind allerdings der Ansicht, daß zur Eiszeit England höher war und zwar soll die Erhöhung 100 bis 200 *m* betragen haben. Ähnliche Gegensätze in den Anschauungen finden sich auch bezüglich anderer Länder. Neuseeland soll nach Hutton während der Vergletscherung 700 bis 1000 *m* höher gewesen sein als jetzt; dann aber fand eine Senkung statt. Auch in Amerika soll nach Chamberlin, nachdem sich die Gletscherzunge zurückgezogen hatte, in Montreal eine Senkung von etwa 200 *m* stattgefunden haben, so daß das Meer das ganze Champlainbassin ausfüllte.

Der Einfluß des Geschiebetransportes auf die Lage der Erdachse ist höchstens schätzungsweise zu ermitteln. Nimmt man die Denudation der Kontinente gleichmäßig, die Ablagerung der Geschiebe im Meere ebenfalls als gleichmäßig an, so würde man hiedurch eine Verflachung und Einebnung der Oberfläche folgern können. Wie aber erwähnt, ist der Geschiebetransport nicht für alle Flüsse derselbe; in einzelnen Flußgebieten gering, wird er in anderen Flußgebieten das drei- und vierfache und auch mehr betragen. Findet aber die Verschiebung nach allen Richtungen gleichmäßig statt, so würde sich der Einfluß auf die Lage der Achse im großen und ganzen aufheben; allein dieses ist nicht der Fall; der Transport der Geschiebe findet in Amerika sowohl wie in Asien der Hauptsache nach nach Osten statt und es könnte hieraus eine Verschiebung des Trägheitspoles in derselben Richtung erfolgen, wobei zu beachten ist, daß diese Transporte stetig wirkende sind, und im Laufe der Zeiten zu ganz ansehnlichen Massenumlagerungen führen können.

Die Massenüberführung durch die Gletscher braucht nicht besonders betrachtet zu werden. Ob der Haupttransport durch die Flüsse, durch die Gletscherbäche oder durch die Gletscher selbst erfolgt, ist für diese Untersuchung völlig gleichgültig: wesentlich ist nur die Menge und die Richtung der Transporte.

Massenüberführungen durch plötzliche oder stetige Hebungen und Senkungen sind noch schwerer zu verfolgen; es ist kaum anzunehmen, daß schon jetzt die Kenntnis aller stetigen Hebungen und Senkungen genügend bekannt ist. Vereinfacht wird die Beurteilung des Effektes wesentlich durch den Umstand, daß Hebungen und Senkungen, soweit sie tatsächlich das Festland betreffen, in benachbarten Gebieten im entgegengesetzten Sinne auftreten und sich daher zum großen Teile aufheben.

Ob die postglaziale Hebung des zentralen Stockes der Alpen und die Hebung des nordamerikanischen Kontinentes u. s. w. von derselben Größenordnung waren, wie die gegenwärtig z. B. in Skandinavien beobachteten, so daß sie sich erst im Laufe der Jahrtausende summierten, läßt sich nicht angeben; die im vorigen Jahrhundert stattgefundenene plötzliche Hebung des Jorullo läßt keinen Zweifel darüber, daß auch jetzt noch plötzliche Hebungen in größerem Umfange stattfinden.

Dazu kommt, daß sich uns Veränderungen, die am Grunde des Meeres stattfinden, völlig entziehen und daher Rechnungen über die uns sichtbaren Massenverschiebungen, mögen dieselben welcher Art immer sein, durch Ver-

nachlässigung dieser uns unbekanntem Faktoren völlig illusorisch gemacht werden können. Glücklicherweise sind die unmittelbaren Wirkungen dieser Massenverschiebungen beträchtlich kleiner, als man nach der Größe der Massen schließen würde: die Massen sind eben nur für unseren Maßstab groß, verglichen mit der Masse der ganzen Erde sind dieselben nur recht klein.

Rechnungen über die Größe der Verschiebung der Hauptträgheitsachsen habe ich schon vor mehreren Jahren ausgeführt¹⁾ und teile ich die Resultate hier mit:

a) Die Verschiebung einer Masse von 100 *km* Länge und Breite und 1 *km* Dicke auf der Erdoberfläche vom Äquator bis zur geographischen Breite von 45° (entsprechend der Maximalwirkung) würde eine Verschiebung der Trägheitspole um 0''·7, d. i. etwa 21 *m* im gleichen Sinne, d. h. eine Entfernung des Poles von der verschobenen Masse über den früheren Pol hinaus, zur Folge haben.

b) Die Verschiebung einer gleich großen Masse in der Breite von 45° (entsprechend einer Maximalverschiebung des Hauptträgheitspoles) im Parallelkreise um 1° bewirkt eine Verschiebung des Trägheitspoles um 0''·015 d. i. etwa 0·4 *m* und zwar senkrecht zu dem Meridian der verschobenen Masse.

c) Die Hebung bzw. Senkung dieser Masse in der Breite von 45° (ebenfalls der Maximalverschiebung des Trägheitspoles entsprechend) um 5 *km* würde eine Entfernung bzw. Annäherung des Trägheitspoles gegen die gehobene Masse um 0''·011, also etwa 0·3 *m*, zur Folge haben.

Die Gesamthebung der Alpen (diese zu 1000 *km* Länge, 300 *km* Breite und 2·5 *km* mittlere Höhe angenommen) würde daher eine Verschiebung des Trägheitspoles gegen Alaska zu um 0''·15 bewirkt haben; die Hebung des Himalaya (die Ausdehnung desselben zu 3000 *km* Länge, 600 *km* Breite und 5 *km* mittlere Höhe angenommen) würde eine Verschiebung des Trägheitspoles um höchstens 2'', d. i. 60 *m* gegen Zentralamerika zur Folge gehabt haben.²⁾

¹⁾ Artikel „Mechanik des Himmels“ in Valentiners Handwörterbuch der Astronomie, 2. Bd., S. 593.

²⁾ Man muß die Trägheitspole von den Rotationspolen unterscheiden. In jedem noch so unregelmäßig geformten Körper gibt es stets drei aufeinander senkrecht stehende, durch den Schwerpunkt gehende Gerade, welche die Eigenschaft haben, daß, wenn die Rotation um dieselben stattfindet, die Massenmomente (Trägheitsmomente) um eine derselben (z. B. die kürzeste Achse eines Ellipsoides) ein Maximum um eine zweite (die längste Achse des dreiaxigen Ellipsoides) ein Minimum wird; die dritte steht zur Ebene dieser beiden normal. Aber die Rotation muß ja nicht um eine dieser Hauptträgheitsachsen erfolgen. Die Erde ist ein abgeplattetes Rotationsellipsoid; die eine Hauptträgheitsachse (diejenige des größten Momentes) ist die Rotationsachse, d. i. die Achse, um welche man den Erdkörper durch Rotation entstanden denken kann; die wirkliche Rotationsachse, um welche die Erde rotiert, ist dieses aber nicht. Sei die kürzeste Achse des Erdkörpers, also seine Hauptträgheitsachse des größten Momentes C_1 C_2 , so bestimmt dieselbe auf der Erdoberfläche die Trägheitspole C_1 und C_2 ; die darauf senkrecht stehende Ebene bestimmt einen größten Kreis, den Trägheitsäquator Q . Die Erde rotiert aber nicht um C_1 C_2 , sondern um eine andere Gerade P_1 P_2 , die Rotationsachse, welche mit C_1 C_2 nicht ganz, aber sehr nahe zusammenfällt. Diese Gerade bestimmt die Rotationspole R_1 und R_2 ; die dazu senkrechte Ebene A bestimmt auf der Erde den Rotationsäquator. Da sich die Rotation der Erde in der Rotation des Himmelsgewölbes spiegelt, so findet die scheinbare Rotation des Himmelsgewölbes um die Verlängerung dieser Achse statt; die Weltpole liegen in der Verlängerung von P_1 P_2 ; der Himmelsäquator ist

Ein Umstand, der der Abschätzung hier sehr zu Hilfe kommt, ist der, daß die sämtlichen hier betrachteten Veränderungen: Massenüberführungen durch den Geschiebetransport, Hebungen und Senkungen, Hebungen der Gebirge und Senkungen durch Einstürze (Einsturzseen, Erdbeben) sich notwendigerweise zum größten Teile kompensieren. Auch wenn die Senkungen unter den Geschiebeablagerungen erst nach Erreichung einer gewissen Mächtigkeit derselben vorkommen sollten, wird hieran nichts geändert. Die Erdkruste ist hiernach in einer fortwährenden Bewegung begriffen, wobei die Richtung der Hauptträgheitsachsen ununterbrochenen Änderungen ausgesetzt ist, und es ist von vornherein nicht unmittelbar angebar, ob sich die Trägheitspole bei diesen Verschiebungen auf die Dauer in der Nähe der Richtung der ursprünglichen Symmetrieachse ¹⁾ erhalten oder sich von dieser in größeren Exkursionen entfernen können. Wenn auch schon aus der Mannigfaltigkeit der Massenverschiebungen und deren Kompensation geschlossen werden kann, daß der Winkel zwischen ursprünglicher Symmetrieachse und Hauptträgheitsachse stets klein bleiben muß, so werden erst die Resultate der Rechnungen einen näheren Einblick in diese Verhältnisse gewähren.

Geologisch ist ein innerer Zusammenhang zwischen Hebungen und Senkungen nicht auszuschließen; man muß sich nach den Resultaten des ersten Kapitels die Erdkruste als eine deformierbare Hülle eines vollständig beweglichen Kernes denken, etwa wie eine mit einer Flüssigkeit gefüllte Hohlkugel. Gibt man dieser den Halbmesser von 1 *dm.* so würde die Dicke der Schale etwa 0.8 *mm* sein; die Rotation, welche man einer solchen Kugel geben müßte, damit die Erdschwerkraft überwunden werden könnte, läßt sich leicht berechnen. Ist ω_0 diejenige Rotationsgeschwindigkeit der Erde im Äquator, die die Anziehungskraft der Erde in der Entfernung *R* (Erdhalbmesser) überwindet, und ist ω diejenige der rotierenden Kugel, so müßte $\omega^2 r = \omega_0^2 R$ sein, wenn die Massen dieselben wären. Ist das spezifische Gewicht der im Hohlraume der Kugel befindlichen Masse *s* und ist s_0 dasjenige der Erde, so wird also

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{R}{r} \cdot \frac{s_0}{s};$$

sind τ_0, τ die Rotationszeiten ($\tau_0 = 86400^s$ Sternzeit) so folgt

$$\tau = \tau_0 \sqrt{\frac{r}{R} \cdot \frac{s_0}{s}},$$

und da für $r = 1 \text{ dm}$ $\log(r : R) = 7.8046 - 10$ ist, so wird für Füllung mit Wasser $\tau = 4.49^s$, für Füllung mit Quecksilber $\tau = 16.57^s$.

Auch die periodischen Eisablagerungen im Winter und die Abschmelzung derselben im Sommer auf den Kontinenten habe ich bereits in Rechnung ge-

bestimmt durch die Ebene *A*; die Polhöhe ist die Höhe des sichtbaren Rotationspoles über dem Horizont; die geographische Breite bezieht sich auf den Rotationsäquator. Die Lage der Trägheitspole läßt sich auf astronomischem Wege nicht feststellen.

¹⁾ Die kürzeste Achse des Rotationsellipsoides $C_1 C_2$ ist Symmetrieachse für ein unveränderliches, durch Rotation entstandenes Ellipsoid; durch die Bewegungen der Erdkruste kann die Hauptträgheitsachse des größten Momentes, $C_1' C_2'$ sich aus der Anfangslage entfernen, und man hat jetzt drei verschiedene, durch den Schwerpunkt gehende, nahe zusammenfallende Richtungen zu unterscheiden: die ursprüngliche Symmetrieachse $C_1 C_2$, welche trotz aller Massenbewegungen ihre Bedeutung als solche der Hauptsache nach nicht verliert und dem

zogen.¹⁾ „Diese Vereisung und nachträgliche Abschmelzung findet vorzugsweise in mittleren Breiten statt, u. zw. auf der nördlichen Halbkugel durch das Überwiegen des Festlandes in Asien nicht gleichmäßig um den Pol verteilt . . . Der Mittelpunkt der Ablagerung²⁾ auf der südlichen Hemisphäre fällt keineswegs in den Antipodenpunkt der viel stärkeren Ablagerung auf der nördlichen Hemisphäre, so daß sich die Wirkungen eher schwächen als verstärken . . . Nimmt man an, daß sich im Laufe eines Winters nach und nach eine Kruste bis zur Höhe von durchschnittlich 30 cm ablagert, so wird sich mit der Dichte des Eises gleich $\frac{1}{5}$ der Dichte der Erde ein Areal von 25 Millionen Quadratkilometern bedecken müssen, um eine Verschiebung von 0''1 zu bewirken, wenn die Wirkung in allen Breiten gleich vorausgesetzt wird. Mit Rücksicht auf die schwächere Wirkung in größeren Breiten müßte das Areal noch ganz bedeutend größer sein . . .“.

Anders verhält es sich aber mit den eiszeitlichen Vergletscherungen. Hier hat man es nicht mit Eisablagerungen von der Mächtigkeit von wenigen Metern zu tun, sondern mit solchen von mehreren hundert bis tausend Metern Mächtigkeit. Dagegen darf nicht übersehen werden, daß diese Ablagerungen vorzugsweise die Polarregionen betreffen, wenn auch in mittleren Breiten für normale Begriffe ganz gewaltige, im Vergleich mit der Erdoberfläche aber doch nur mäßige Areale Eisbedeckungen von mehreren hundert Metern erhielten; daß aber die Maximalwirkung in 45° Breite fällt, hingegen am Äquator und Pol der Einfluß ein Minimum wird.

Wenn nun auch eine Vereisung der Polarregionen, die bis weit in die Regionen der mittleren Breiten reicht, nicht ganz ohne Einfluß bleiben kann, so ist, wie aus der ganzen Betrachtung folgt, der Einfluß auf die Lage der Hauptträgheitsachsen, wenn man auch die Veränderungen auf der Erde in den für die Stabilität ungünstigsten Verhältnissen betrachtet, keineswegs zu vernachlässigen, aber doch nicht ausschlaggebend.

Aber Massenänderungen in der Art, daß Massen vom Äquator oder aus niederen Breiten in die Polarregionen transportiert und dort als Eis abgelagert werden, können in ganz anderer Weise eine recht beträchtliche Wirkung äußern, indem hiedurch die Abplattung der Erde geändert wird.

An die Wirkung der Abplattung wurde übrigens schon gedacht, wenn auch nicht in der im folgenden dargelegten Weise. Airy und Lord Kelvin haben gerade den jetzigen Zustand der relativ großen Abplattung als wirksamsten Hebel gegen die durch geologische Veränderungen möglichen Einflüsse angesehen.

Ohne auf nähere Erörterungen einzugehen, wies O. Fisher³⁾ darauf hin, daß durch Änderungen in der Rotationsgeschwindigkeit die Abplattung verändert werden muß und daß infolgedessen die geographischen Breiten Ver-

jeweiligen Zustände als Achse des unveränderlichen „Referenzellipsoides“ zugrunde gelegt wird, die Hauptträgheitsachse $C_1' C_2'$, die durch die momentane Massenanzordnung bestimmt wird, und die wirkliche Rotationsachse $R_1 R_2$.

¹⁾ „Mechanik des Himmels“, S. 601.

²⁾ Hier handelt es sich um die jährlich periodisch wiederkehrende Eisablagerung.

³⁾ „Physics of the Earth's Crust.“ S. 184.

änderungen unterworfen sein müssen; er nimmt dabei an, daß solche Veränderungen in den Breiten durch klimatische Schwankungen wahrscheinlich gemacht werden; „The idea, so strongly supported by phenomena of climatical changes, that the latitudes of places on the earth surface are liable to change . . . “ wogegen allerdings einzuwenden ist, daß die aus der Änderung der Rotationsgeschwindigkeit folgenden Breitenschwankungen wohl kaum einen nennenswerten Betrag erreichen können.

Die Hypothese, daß mit einer veränderlichen Abplattung zu rechnen ist und daß möglicherweise dadurch ein Einfluß auf das Klima der Erde auftritt, findet sich auch bei Marchi; aber es ist mehr eine vorübergehende Bemerkung, die übrigens manche Inkorrektheiten enthält. Er sagt, daß, wenn die Eiszeiten auf beiden Hemisphären synchron waren, die Erdkruste als in einer Art Vibration angenommen werden muß, welche die Polarachse abwechselnd verlängert und verkürzt; die Eiszeiten würden den Verlängerungen der Erdachse entsprechen, wodurch die kontinentalen Massen aus dem Wasser hervortreten würden; die inter- und postglazialen Zeiten würden der Verkürzung entsprechen, wodurch die Landmassen untertauchen müßten,¹⁾ „l'era glaciale corrisponderebbe al periode di allungamento assiale della litosfera. per quale le masse continentali attorno ai poli emersero maggiormente dall'oceano; l'era postglaciale corrisponderebbe al periodo di schiacciamento assiale o di gonfiamento equatoriale, nel quale le masse continentali circumpolari si ritirarono maggiormente sotto le aque.“²⁾

In dieser Weise allerdings scheint die Ursache der veränderlichen Abplattung nicht recht ersichtlich und der Erfolg dürfte kaum so zu denken sein. Aber die Änderung der Abplattung durch die aufgelegten Eismassen muß näher untersucht werden.

Da das Eis infolge des Druckes strömt, so ist eine gewisse Dicke des Inlandseises nötig; Croll nimmt dabei an, es wäre eine Neigung von $\frac{1}{2}^{\circ}$ anzunehmen;³⁾ dann würde bei einer Ausdehnung des Eises bis 20° vom Pole, d. i. bis 2200 *km* Entfernung von demselben die Dicke der Eisschicht am Pole 18 *km* betragen müssen. Croll hält eine solche Überhöhung gar nicht für bedeutend, da ja die Steigung von $\frac{1}{2}^{\circ}$ kaum merklich wäre und hält eine solche Höhe — er bespricht diesen Umstand bei Gelegenheit der Mächtigkeit der Eismassen — für geringfügig. Das war nun ein großer Irrtum. Woeikoff kommt zu dem richtigeren Resultate, daß eine solche Eisdicke unmöglich wäre, schließt es aber aus dem Umstand, daß dann die Eisschicht in eine Höhe reichen würde, in welcher keine irgendwie bemerkenswerte Wasserdampfmenge auftreten könnte. Selbstverständlich ist dieser Schluß auch nicht berechtigt, da mit der Erhöhung der Oberfläche der Lithosphäre sich auch die Atmosphäre erhebt, Dichten, Temperaturen, also auch Dampfspannungen und Dampfgehalt von der jeweiligen mittleren Erdoberfläche zu rechnen sind. Die Ursache der Unmöglichkeit einer so großen Eismächtigkeit liegt aber darin, daß mit einer solchen die Abplattung der Erde in eine Überhöhung verwandelt würde.

¹⁾ Im Effekte gleichbedeutend, mit größerer, beziehungsweise kleinerer Höhe der Gebirge.

²⁾ *Le cause del' era glaciale*, S. 24.

³⁾ „Climate and Time.“ S. 376. Siehe hierüber das S. 72 Gesagte.

Sind a und c die beiden Halbachsen der Meridianellipse der Erde, so ist das Volumen derselben gleich $V = \frac{4}{3} a^2 c \pi$; geht nun a in $a_1 = a(1 + \alpha)$ c in $c_1 = c(1 + \gamma)$ über, und geht dabei das Volumen in $V_1(1 + v)$ über, so daß

$$\frac{4}{3} \pi a_1^2 c_1 = \frac{4}{3} \pi a^2 c (1 + 2\alpha)(1 + \gamma) = \frac{4}{3} \pi a^2 c (1 + v)$$

ist, so wird

$$2\alpha + \gamma = v \text{ oder für } v = 0 : \alpha = -\frac{1}{2}\gamma$$

Da nun für die Erde $a - c = 22.3 \text{ km}$ ist, so würde, wenn $c\gamma = 18 \text{ km}$ wäre, $a\alpha = -9 \text{ km}$, also $a_1 - c_1 = a - c - 27 \text{ km} = -4.7 \text{ km}$ werden. Daraus folgt aber sofort, daß diese Auflagerungen bei den Rechnungen durchaus nicht zu vernachlässigen sind, selbst wenn sie in viel schwächerem Maße auftreten würden; geht man von einer mittleren Abplattung α aus, so daß

$$\frac{a - c}{a} = \alpha$$

ist, so würde eine Eisauflagerung von $c\gamma \text{ km}$ diese Abplattung in

$$\alpha' = \frac{\alpha(1 - \frac{1}{2}\gamma) - c(1 + \gamma)}{a(1 - \frac{1}{2}\gamma)} = (\alpha - \frac{3}{2}\gamma)(1 + \frac{3}{2}\gamma)$$

verwandeln. Ist $\gamma = v\alpha$, so wird $\alpha' = \alpha(1 - \frac{3}{2}v)$; eine beiderseitige Auflagerung von 5 km würde daher α in $\frac{5}{8}\alpha$ verwandeln. Auch hier ist jedoch zu beachten, daß durch die Nachgiebigkeit der Erdrinde die Eisauflagerungen nicht in ihrer ganzen Höhe zur Geltung kommen. Über den Betrag der durch den Druck erzeugten Deformation sind jedoch wieder nur Schätzungen möglich.

Die Bestimmung des Einflusses der Verlagerung der Hauptträgheitsachsen und der Änderungen der Trägheitsmomente auf die Rotation des Körpers erfordert nun das Zurückgreifen auf die Differentialgleichung der Rotation eines Körpers.

Seien p, q, r proportional den Richtungscosinus der instantanen Rotationsachse $R_1 R_2$ gegen die vorerst als fest angenommenen Hauptträgheitsachsen, so sind die Differentialgleichungen ohne Rücksicht auf störende Kräfte

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \frac{C_0 - A_0}{A_c} nq &= 0 \\ \frac{dq}{dt} - \frac{C_0 - A_0}{A_0} np &= 0 \quad (1) \\ \frac{dr}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

wobei A_0, C_0 die Hauptträgheitsmomente für die Rotation um die Hauptträgheitsachsen sind. Ihre Integrale sind:

$$\begin{aligned} r &= n \text{ (Rotationsgeschwindigkeit um die Achse der } C) \\ p &= +gn \sin(mt + G) \\ q &= -gn \cos(mt + G) \end{aligned} \quad m = \frac{C_0 - A_0}{A_0} n. \quad (2)$$

g, G sind Integrationskonstante, die aus Beobachtungen bestimmt werden müssen. Die beiden Integrale für p, q besagen, daß die Rotationspole R_1, R_2 um die als fest gedachten Trägheitspole $C_1 C_2$ einen Kreis beschreiben, oder die Rotationsachse $R_1 R_2$ um die Hauptträgheitsachse $C_1 C_2$ einen Kegel, dessen Öffnungswinkel g ist, und für welche die Rotationsgeschwindigkeit n ist, welche von der Größe $C_0 - A_0$ abhängt. Für die Erde ist, da

$$C_0 = \frac{2}{5} M a^2, \quad A_0 = \frac{1}{5} M (a^2 + c^2)$$

ist,

$$\frac{C_0 - A_0}{A_0} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} = 0.003272;$$

es wird daher $m = 0.003272 n$, daher stehen die Rotationszeiten für die beiden Bewegungen: T_n = Rotationszeit der Erde um ihre Achse, T_m = Rotationszeit der Erdachse $R_1 R_2$ um die Hauptträgheitsachse $C_1 C_2$ in der Beziehung

$$T_m = \frac{T_n}{0.003272} = 304.8 \text{ Tage.}$$

Daß eine solche Drehung der Rotationsachse der Erde stattfinden muß, hatte bereits Euler gefunden; den Wert von g zu bestimmen, gelang jedoch zuerst Magnus Nyrén; als Mittelwert der verschiedenen von diesem, dann von C. A. F. Peters, Downing u. A. gefundenen Werten folgt $g = 0''.06$.

Da die Richtung der Rotationsachse der Erde im Raume das durch astronomische Beobachtungen zu bestimmende Element ist, so kommt dieses darauf hinaus, daß der Trägheitspol C (Fig. 15) mit allen anderen Punkten auf der Erde um R_1 rotiert, R_1 selbst aber auf immer andere Punkte der Erde fällt.¹⁾ Im nächsten Momente würde also bereits ein in der Nähe befindlicher Punkt R_1' Rotationspol sein, und der Rotationspol R_1 wandert um C herum. Es ist daher nicht möglich, diese Bewegungen an einem gewöhnlichen Globus zu demonstrieren. Würde in der Richtung der Rotationsachse $R_1 R_2$ ein Draht durchgesteckt (an einem Globus, an welchem die Erdabplattung zum Ausdrucke gebracht ist, also schief, geneigt gegen die kürzeste Achse), so müßte dieser Draht drehbar sein; die Drehung in einem Tage beträgt etwa $360^\circ : 304 = 1^\circ 12'$; am nächsten Tage wäre also $R_1' R_2'$ die Drehungsachse, wenn $R_1' C R_1 = 1^\circ 12'$ wäre; am nächsten Tage beträgt die Drehung wieder $1^\circ 12'$ und nach 304 Tagen käme die Achse $R_1 R_2$ wieder in ihre Anfangslage zurück. Die Bewegung ist jedoch eine stetige, nicht sprungweise, so daß nach Verlauf einer Stunde schon ein Winkel von $3'$ zurückgelegt ist.

Wesentlich komplizierter werden die Verhältnisse, wenn auch die Lage der Trägheitspole $C_1 C_2$ nicht als fix angenommen werden kann.

Da die übliche Ableitung, welche ich auch in meiner Arbeit „Mechanik des Himmels“ S. 602 gegeben habe, nicht strenge ist und Zweifel möglich sind, ob es gestattet wäre, bei dieser Ableitung, welche die Bewegung des Rotationspoles auf diesen festen Trägheitspol bezieht, diesen dann als beweglich anzusehen, so gebe ich hier eine strenge Ableitung, wobei ich jedoch, um nicht zu weitläufig zu werden, die Gleichungen der orthogonalen Transformation voraussetze.²⁾

¹⁾ Die Bewegung der Erdachse im Raume, die Präzession und Nutation entsteht durch die in den obigen Gleichungen nicht berücksichtigten, in Gleichungen (4), S. 288, auftretenden störenden Kräfte $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$. Die obige Bewegung könnte mit dem „Schleudern“ eines Kreisels verglichen werden, der nicht völlig symmetrisch gegen seine Rotationsachse abgedreht ist, so daß also seine Rotationsachse mit keiner der Hauptträgheitsachsen zusammenfällt.

²⁾ Siehe des Verfassers „Mechanik des Himmels“ in Valentiners Handwörterbuch der Astronomie, S. 280.

Führt man in die auf ein festes räumliches Achsensystem bezogenen Fundamentalgleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= \Sigma (x Y - y X) \\ \Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= \Sigma (y Z - z Y) \quad (3) \\ \Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) &= \Sigma (z X - x Z) \end{aligned}$$

die Koordinaten $x' y' z'$ ein, welche auf ein mit dem Körper festes Achsensystem bezogen sind, so daß sich für die Koordinaten

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z'$$

und für die Kräfte

$$X = \alpha_1 X' + \beta_1 Y' + \gamma_1 Z'$$

mit den veränderlichen Richtungscosinus $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1, \alpha_2 \dots \gamma_3$ ergibt, so folgt

$$\begin{aligned} \Sigma m \left\{ (\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z') \left(x' \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} + y' \frac{d^2 \beta_1}{dt^2} + z' \frac{d^2 \gamma_1}{dt^2} \right) - \right. \\ \left. - (\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z') \left(x' \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} + y' \frac{d^2 \beta_1}{dt^2} + z' \frac{d^2 \gamma_1}{dt^2} \right) \right\} = \\ = \Sigma \{ (\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z') (\alpha_2 X' + \beta_2 Y' + \gamma_2 Z') - \\ - (\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z') (\alpha_1 X' + \beta_1 Y' + \gamma_1 Z') \} \end{aligned}$$

und ebenso zwei andere aus den beiden anderen Gleichungen (3). Werden in diesen Gleichungen die Multiplikationen ausgeführt und wird berücksichtigt, daß die x', y', z' , sich auf die verschiedenen Massenpunkte beziehen, die $\alpha_1 \dots \gamma_3$ und deren Differentialquotienten aber für alle Punkte dieselben sind, so folgt, wenn $\Sigma m x' y', \Sigma m y' z', \Sigma m x' z'$ nicht Null vorausgesetzt werden:

$$\begin{aligned} \left(\alpha_2 \frac{d^2 \alpha_3}{dt^2} - \alpha_3 \frac{d^2 \alpha_2}{dt^2} \right) \Sigma m x'^2 + \left(\beta_2 \frac{d^2 \beta_3}{dt^2} - \beta_3 \frac{d^2 \beta_2}{dt^2} \right) \Sigma m y'^2 + \\ + \left(\gamma_2 \frac{d^2 \gamma_3}{dt^2} - \gamma_3 \frac{d^2 \gamma_2}{dt^2} \right) \Sigma m z'^2 + \\ + \left(\alpha_2 \frac{d^2 \beta_3}{dt^2} - \alpha_3 \frac{d^2 \beta_2}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2 \alpha_3}{dt^2} - \beta_3 \frac{d^2 \alpha_2}{dt^2} \right) \Sigma m x' y' + \\ + \left(\alpha_2 \frac{d^2 \gamma_3}{dt^2} - \alpha_3 \frac{d^2 \gamma_2}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2 \alpha_3}{dt^2} - \gamma_3 \frac{d^2 \alpha_2}{dt^2} \right) \Sigma m x' z' + \\ + \left(\beta_2 \frac{d^2 \gamma_3}{dt^2} - \beta_3 \frac{d^2 \gamma_2}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2 \beta_3}{dt^2} - \gamma_3 \frac{d^2 \beta_2}{dt^2} \right) \Sigma m y' z' = \\ = \alpha_1 \Sigma (y' Z' - z' Y') + \beta_1 \Sigma (z' X' - x' Z') + \gamma_1 \Sigma (x' Y' - y' X') \end{aligned}$$

und analog die beiden anderen.¹⁾ Multipliziert man diese drei Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und addiert; sodann mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, und ebenso mit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, so erhält man drei neue, ebenso weitläufige Gleichungen, die durch die Substitution

¹⁾ Diese gehen auch durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 hervor.

$$\beta_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\alpha_3}{dt} = r$$

$$\gamma_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\beta_3}{dt} = p$$

$$\alpha_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + \alpha_3 \frac{d\gamma_3}{dt} = q$$

und den hieraus durch Differentiation folgenden Gleichungen

$$\alpha_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} = -\frac{dr}{dt} + pq \quad \text{u. s. w.}^1)$$

$$\Delta_1 = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_3}{dt}\right)^2 \quad \text{u. s. w.}$$

wesentlich vereinfacht werden. Für die bisher nicht berücksichtigten Glieder mit den drei Summen $\Sigma m x' y'$, $\Sigma m y' z'$, $\Sigma m x' z'$ erhält man zunächst

$$\begin{aligned} & \left(\gamma_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} \right) \Sigma m x' y' - \left(\beta_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} \right) \Sigma m x' z' + \\ & + \left(\gamma_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} - \beta_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} - \beta_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} - \beta_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} \right) \Sigma m y' z'; \end{aligned}$$

und weiter

$$\left(-\frac{dq}{dt} + p r \right) \Sigma m x' y' - \left(\frac{dr}{dt} + p q \right) \Sigma m x' z' + (\Delta_2 - \Delta_3) \Sigma m y' z'.$$

Führt man hier die Hauptträgheitsmomente

$$\text{um die } x' = \text{Achse } A = \Sigma (m y'^2 + m z'^2)$$

$$\text{um die } y' = \text{Achse } B = \Sigma (m x'^2 + m z'^2)$$

$$\text{um die } z' = \text{Achse } C = \Sigma (m x'^2 + m y'^2)$$

und

$$D = \Sigma m y' z'; \quad E = \Sigma m x' z'; \quad F = \Sigma m x' y'$$

ein, in denen die Summen in Integrale, über den ganzen Körper ausgedehnt, übergehen, so erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{dp}{dt} + \frac{C-B}{A} q r - \frac{F}{A} \left(\frac{dq}{dt} - p r \right) - \frac{E}{A} \left(\frac{dr}{dt} + p q \right) + \frac{D}{A} (\Delta_2 - \Delta_3) = \frac{\mathfrak{Q}}{A} \\ & \frac{dq}{dt} + \frac{A-C}{B} p r - \frac{F}{B} \left(\frac{dp}{dt} + q r \right) - \frac{D}{B} \left(\frac{dr}{dt} - p q \right) + \frac{E}{B} (\Delta_3 - \Delta_1) = \frac{\mathfrak{M}}{A} \quad (4) \\ & \frac{dr}{dt} + \frac{B-A}{C} p q - \frac{D}{C} \left(\frac{dq}{dt} + p r \right) - \frac{E}{C} \left(\frac{dp}{dt} - q r \right) + \frac{F}{C} (\Delta_1 - \Delta_2) = \frac{\mathfrak{N}}{A} \end{aligned}$$

wobei \mathfrak{Q} , \mathfrak{M} , \mathfrak{N} die störenden Kräfte:

$$\mathfrak{Q} = \Sigma (y' Z' - z' Y'); \quad \mathfrak{M} = \Sigma (z' X' - x' Z'); \quad \mathfrak{N} = \Sigma (x' Y' - y' X')$$

sind. Um die Größen A, B, C, D, E, F durch die Hauptträgheitsmomente auszudrücken, soll nebst den Koordinaten $x' y' z'$, welche sich auf ein rechtwinkeliges, im Körper festes, aber nicht mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallendes Achsensystem beziehen ein zweites, mit diesen zusammenfallendes der x_0, y_0, z_0 , eingeführt werden; dann ist

$$x' = \lambda_1 x_0 + \lambda_2 y_0 + \lambda_3 z_0$$

$$y' = \mu_1 x_0 + \mu_2 y_0 + \mu_3 z_0$$

$$z' = \nu_1 x_0 + \nu_2 y_0 + \nu_3 z_0$$

¹⁾ S. „Mechanik des Himmels“, S. 282.

wobei die λ, μ, ν ebenfalls den Gleichungen für die Orthogonaltransformation entsprechen. Da nun

$$\Sigma m x_0 y_0 = \Sigma m y_0 z_0 = \Sigma m x_0 z_0 = 0$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} \Sigma m x'^2 &= \lambda_1^2 \Sigma m x_0^2 + \lambda_2^2 \Sigma m y_0^2 + \lambda_3^2 \Sigma m z_0^2 \\ \Sigma m y'^2 &= \mu_1^2 \Sigma m x_0^2 + \mu_2^2 \Sigma m y_0^2 + \mu_3^2 \Sigma m z_0^2 \\ \Sigma m z'^2 &= \nu_1^2 \Sigma m x_0^2 + \nu_2^2 \Sigma m y_0^2 + \nu_3^2 \Sigma m z_0^2 \\ \Sigma m x' y' &= \lambda_1 \mu_1 \Sigma m x_0^2 + \lambda_2 \mu_2 \Sigma m y_0^2 + \lambda_3 \mu_3 \Sigma m z_0^2 \\ \Sigma m x' z' &= \lambda_1 \nu_1 \Sigma m x_0^2 + \lambda_2 \nu_2 \Sigma m y_0^2 + \lambda_3 \nu_3 \Sigma m z_0^2 \\ \Sigma m y' z' &= \mu_1 \nu_1 \Sigma m x_0^2 + \mu_2 \nu_2 \Sigma m y_0^2 + \mu_3 \nu_3 \Sigma m z_0^2 \end{aligned}$$

und durch Einführung der Hauptträgheitsmomente

$$A_0 = \Sigma m y_0^2 + \Sigma m z_0^2; \quad B_0 = \Sigma m x_0^2 + \Sigma m z_0^2; \quad C_0 = \Sigma m x_0^2 + \Sigma m y_0^2$$

unter der Voraussetzung eines Rotationsellipsoides, für welches $A_0 = B_0$ wird

$$\begin{aligned} \Sigma m x_0^2 &= \Sigma m y_0^2 = \frac{1}{2} C_0; & \Sigma m z_0^2 &= A_0 - \frac{1}{2} C_0; \\ A &= \frac{1}{2} (\mu_1^2 + \nu_1^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2) C_0 + (\mu_3^2 + \nu_3^2) (A_0 - \frac{1}{2} C_0) \\ B &= \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \nu_1^2 + \lambda_2^2 + \nu_2^2) C_0 + (\lambda_3^2 + \nu_3^2) (A_0 - \frac{1}{2} C_0) \\ C &= \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \lambda_2^2 + \mu_2^2) C_0 + (\lambda_3^2 + \mu_3^2) (A_0 - \frac{1}{2} C_0) \\ D &= \frac{1}{2} (\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2) C_0 + \mu_3 \nu_3 (A_0 - \frac{1}{2} C_0) \\ E &= \frac{1}{2} (\lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2) C_0 + \lambda_3 \nu_3 (A_0 - \frac{1}{2} C_0) \\ F &= \frac{1}{2} (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2) C_0 + \lambda_3 \mu_3 (A_0 - \frac{1}{2} C_0). \end{aligned}$$

Sei nun (Fig. 15) $X_0 Y_0 Z_0$ das System der Hauptträgheitsachsen, $X' Y' Z'$ ein anderes rechtwinkeliges System, so ist

$$\begin{aligned} \cos X_0 X' &= \lambda_1 & \cos X_0 Y' &= \mu_1 & \cos X_0 Z' &= \nu_1 \\ \cos Y_0 X' &= \lambda_2 & \cos Y_0 Y' &= \mu_2 & \cos Y_0 Z' &= \nu_2 \\ \cos Z_0 X' &= \lambda_3 & \cos Z_0 Y' &= \mu_3 & \cos Z_0 Z' &= \nu_3. \end{aligned}$$

Da es gleichgültig ist, welche Richtung die beiden Achsen X_0, Y_0 im Trägheitsäquator haben, so soll die X_0 -Achse in die Schnittlinie der $X' Y'$ -Ebene mit dem Trägheitsäquator gelegt werden. Durch die beiden Winkel i (Neigung der beiden Ebenen $X' Y'$ und $X_0 Y_0$) und den Abstand $XX' = \omega$ sind dann die neun Größen λ, μ, ν in folgender Weise bestimmt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos \omega & \mu_1 &= -\sin \omega & \nu_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= \sin \omega \cos i & \mu_2 &= \cos \omega \cos i & \nu_2 &= -\sin i \\ \lambda_3 &= \sin \omega \sin i & \mu_3 &= \cos \omega \sin i & \nu_3 &= \cos i \end{aligned}$$

und es folgt nach einfacher Reduktion

$$\begin{aligned} A &= A_0 + (C_0 - A_0) \sin \omega^2 \sin^2 i^2 & D &= -\sin i \cos i \cos \omega (C_0 - A_0) \\ B &= A_0 + (C_0 - A_0) \sin \omega^2 \sin^2 i^2 & E &= -\sin i \cos i \sin \omega (C_0 - A_0) \\ C &= C_0 - (C_0 - A_0) \sin^2 i^2 & F &= -\sin i^2 \sin \omega \cos \omega (C_0 - A_0) \end{aligned}$$

und wenn man die Neigung $i = Z_0 Z'$ so klein voraussetzt, daß $\sin i^2$ vernachlässigt werden kann

$$\begin{aligned} A &= A_0, & B &= A_0, & C &= C_0, & F &= 0 \\ D &= -\sin i \cos \omega (C_0 - A_0) & E &= -\sin i \cos \omega (C_0 - A_0). \end{aligned}$$

Ist die Lage der Hauptträgheitspole $X_0, Y_0, Z_0 = C$ veränderlich, so soll C auf ein rechtwinkeliges Achsensystem in einer in Z' berührenden Ebene bezogen

werden, für welche die X -Achse in der Richtung $Z' X'$, die Y -Achse in der Richtung der $Z' Y'$ liegt; ist der Winkel $X' Z' C_0 = \alpha$, so ist $\omega = 90^\circ - \alpha$, daher

$$D = -\sin i \sin \alpha (C_0 - A_0); \quad E = -\sin i \cos \alpha (C_0 - A_0)$$

und wenn $\sin i \cos \alpha = x'$, $\sin i \sin \alpha = y'$ die Koordination des Punktes C , bezogen auf die im Erdkörper festen Richtungen $M X'$, $M Y'$ sind:

$$D = -(C_0 - A_0) y' \quad E = -(C_0 - A_0) x'$$

Damit werden die Gleichungen (4):

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \frac{C_0 - A_0}{A_0} r q + \frac{C_0 - A_0}{A_0} x' \left(\frac{dr}{dt} + p q \right) - \frac{C_0 - A_0}{A_0} y' (\Delta_2 - \Delta_3) &= \frac{\mathcal{L}}{A_0} \\ \frac{dq}{dt} - \frac{C_0 - A_0}{A_0} r p + \frac{C_0 - A_0}{A_0} y' \left(\frac{dr}{dt} - p q \right) - \frac{C_0 - A_0}{A_0} x' (\Delta_3 - \Delta_1) &= \frac{\mathcal{M}}{A_0} \\ \frac{dr}{dt} + \frac{C_0 - A_0}{C_0} y' \left(\frac{dq}{dt} + p r \right) + \frac{C_0 - A_0}{C_0} x' \left(\frac{dp}{dt} - q r \right) &= \frac{\mathcal{N}}{C_0} \end{aligned} \quad (5)$$

Zwischen der Länge des Frühlingspunktes (siderisch, gezählt von einem festen Anfangspunkte in der Ekliptik) ψ' , der Neigung der Ekliptik gegen den Trägheitsäquator ϵ' und der Sternzeit θ einerseits und den Größen p , q , r andererseits bestehen aber die Beziehungen ¹⁾

$$\begin{aligned} \sin \epsilon' \frac{d\psi'}{dt} &= -p \sin \theta - q \cos \theta \\ \frac{d\epsilon'}{dt} &= -p \cos \theta + q \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= r + \sin \theta \cot \epsilon' \cdot p + \cos \theta \cot \epsilon' \cdot q \end{aligned} \quad (6)$$

r stellt daher, bis auf kleine Korrektionsglieder, die tägliche Drehung der Erde n dar und es kann somit in den mit $(C_0 - A_0) x'$ und $(C_0 - A_0) y'$ multiplizierten Gliedern $dr : dt = 0$, $r = n$ gesetzt und das Produkt $p q$ weggelassen werden.

Weiter ist ²⁾

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \left(\frac{d\psi'}{dt} \right)^2 + 2\gamma_3 \frac{d\psi'}{dt} \frac{d\theta}{dt} + 2\beta_3 \sin \theta \frac{d\psi'}{dt} \frac{d\epsilon'}{dt} + \left(\sin \theta \frac{d\epsilon'}{dt} \right)^2 \\ \Delta_2 &= \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + (\beta_1^2 + \beta_2^2) \left(\frac{d\psi'}{dt} \right)^2 + 2\gamma_3 \frac{d\psi'}{dt} \frac{d\theta}{dt} - 2\alpha_3 \cos \theta \frac{d\psi'}{dt} \frac{d\epsilon'}{dt} + \left(\cos \theta \frac{d\epsilon'}{dt} \right)^2 \\ \Delta_3 &= (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \left(\frac{d\psi'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\epsilon'}{dt} \right)^2 = \sin^2 \epsilon' \left(\frac{d\psi'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\epsilon'}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

so daß man in den mit $(C_0 - A_0)$ multiplizierten Gliedern gegenüber dem Hauptgliede $(d\theta : dt)^2 = n^2$ alle übrigen Glieder vernachlässigen kann; dann werden die Gleichungen (5), wenn noch $n x' = x$, $n y' = y$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + m q - m y &= \frac{\mathcal{L}}{A_0} \\ \frac{dq}{dt} - m p + m x &= \frac{\mathcal{M}}{A_0} \quad \frac{C_0 - A_0}{A_0} n = m \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{\mathcal{N}}{C_0} \end{aligned} \quad (7)$$

¹⁾ „Mechanik des Himmels“, S. 568.

²⁾ Ibid. S. 283.

Sind x, y null oder konstant (in welchem Falle $p - x = p'$; $q - y = q$ gesetzt werden kann), so erhält man die Gleichungen (1) S. 285; sind x, y nicht konstant, so treten die hier angeschriebenen Zusatzglieder auf, welche von den Werten von x, y abhängig sind und auf die Größen p und q von nicht unbedeutlichem Einfluß werden können. Kommt es auf die äußerste Genauigkeit an, so können die aus (7) erhaltenen Integrale für p, q, r benützt werden, um die hier vernachlässigten Glieder aus (5) mit ausreichender Näherung zu bestimmen und die hieraus resultierenden Zusatzglieder für p, q, r zu ermitteln.

Mit den veränderten Achsen (s. S. 284) $a = a_0 (1 + \alpha)$, $c = c_0 (1 + \gamma)$ wird sowohl die Lage der Hauptträgheitsachsen als die Größe der Hauptträgheitsmomente eine andere; nennt man die einer gewissen Ausgangsepoche und den hierfür geltenden Achsen a_0, c_0 entsprechenden Werte der Hauptträgheitsmomente A_0, C_0 und sind die zu einer anderen Lage C gehörigen Werte a, c, A, C , so ist

$$\begin{aligned} \frac{C - A}{A} &= \frac{C}{A} - 1 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} = \frac{a_0^2 (1 + 2\alpha) - c_0^2 (1 + 2\gamma)}{a_0^2 (1 + 2\alpha) + c_0^2 (1 + 2\gamma)} = \\ &= \frac{a_0^2 - c_0^2}{a_0^2 + c_0^2} \left[1 + 2 \frac{a_0^2 \alpha - c_0^2 \gamma}{a_0^2 - c_0^2} \right] \left[1 - 2 \frac{a_0^2 \alpha + c_0^2 \gamma}{a_0^2 + c_0^2} \right] = \\ &= \frac{C_0 - A_0}{A_0} \left[1 + 4 \frac{a_0^2 c_0^2 (\alpha - \gamma)}{(a_0^2 - c_0^2)(a_0^2 + c_0^2)} \right] \end{aligned}$$

oder wenn

$$\begin{aligned} a_0 + c_0 &= 2R & a_0 &= R \left(1 + \frac{1}{2} \beta \right) \\ a_0 - c_0 &= R\beta & c_0 &= R \left(1 - \frac{1}{2} \beta \right) \\ \frac{a_0 - c_0}{a_0} &= \alpha = \frac{\beta}{1 + \frac{1}{2} \beta}; & \beta &= \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{2} \alpha} \end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$\frac{C - A}{A} = \frac{C_0 - A_0}{A_0} \left[1 + \frac{\alpha - \gamma}{\beta} \left(1 - \frac{3}{8} \beta^2 \right) \right].$$

Unter der hier zulässigen Voraussetzung, daß das Volumen der Erde konstant bleibt, ist $\alpha = -\frac{1}{2} \gamma$ und daher mit Weglassung der Produkte $(\alpha - \gamma) \beta^2$, wenn $\gamma = \nu \alpha$ ist:

$$\frac{C - A}{C} = \frac{C_0 - A_0}{C_0} (1 - \Delta) \quad \Delta = \frac{3}{2} \frac{\gamma}{\beta} = \frac{3}{2} \nu.$$

Setzt man nun in den Differentialgleichungen (5) und (7) den Wert von $(C - A)$ veränderlich voraus, so wird auch m und γ veränderlich; in dem hier zu betrachtenden Falle kann die Veränderlichkeit von γ in der Form eines sekularen und eines periodischen Gliedes vorausgesetzt werden. Ist $h_0 t$ der mit der Zeit wachsende, h der Maximalwert des periodisch veränderlichen Teiles der polaren Auflagerung, so kann

$$\gamma = h_0 t + h \sin(Ht + H_0)$$

und damit

$$\Delta = \eta_0 t + \eta \sin(Ht + H_0)$$

vorausgesetzt werden; es wird somit ¹⁾

¹⁾ Wird auch auf die Veränderlichkeit der Rotationsgeschwindigkeit Rücksicht genommen, so vereinigt sich das hier auftretende Glied mit $\eta_0 t$; kommen keine sekularen Glieder vor, so sind die Koeffizienten Null zu setzen.

$$\begin{aligned} \frac{C-A}{A} &= \Gamma \left[1 - \eta_0 t - \eta \sin(Ht + H_0) \right] \\ m &= \Gamma n [1 - \eta_0 t - \eta \sin(Ht + H_0)] \\ \frac{dm}{dt} &= \mu = -\Gamma n \eta_0 - \Gamma n \eta H \cos(Ht + H_0). \end{aligned} \quad (8)$$

In den Gleichungen (7) sind nun x , y und m als veränderlich anzusehen. Sei

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \Sigma a \cos(\omega t + \Omega) + x_1 \\ y &= b_0 + b_1 t + \Sigma b \sin(\omega t + \Omega) + y_1 \end{aligned} \quad (9)$$

wobei also vorausgesetzt ist, daß x , y nebst je einem mit der Zeit veränderlichen sekularen Gliede noch eine Reihe von periodischen Gliedern enthalten, von denen jedes einzelne die unter dem Summenzeichen angeschriebene Form hat, und die sämtlichen Koeffizienten a_0 , a_1 , a , b_0 , b_1 , b kleine Größen sind. Glieder noch höherer Ordnung, welche behufs Vereinfachung der Integration fürs erste ausgeschlossen werden können, sind in x_1 , y_1 vereinigt gedacht. Für die Integrale p , q müssen nun periodische Glieder mit dem Argumente $\omega t + \Omega$ angenommen werden, damit den Differentialgleichungen (7) genügt werde; sei also

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_1 t + P \sin m t + Q \cos m t + \Sigma f \cos(\omega t + \Omega) \\ q &= q_0 + q_1 t - P \cos m t + Q \sin m t + \Sigma g \sin(\omega t + \Omega). \end{aligned} \quad (10)$$

Setzt man diese Werte in die Differentialgleichungen (7) ein und bestimmt P und Q aus

$$\begin{aligned} + \frac{dP}{dt} \sin m t + \frac{dQ}{dt} \cos m t &= \frac{\mathfrak{L}}{A_0} \\ - \frac{dP}{dt} \cos m t + \frac{dQ}{dt} \sin m t &= \frac{\mathfrak{M}}{A_0} \end{aligned} \quad (11)$$

so wird

$$\begin{aligned} p_1 + m q_0 + m q_1 t + P \mu t \cos m t - Q \mu t \sin m t + \\ + \Sigma(g m - f \omega) \sin(\omega t + \Omega) &= + m b_0 + m b_1 t + \Sigma m b \sin(\omega t + \Omega) + m y_1 \\ q_1 - m p_0 - m p_1 t + P \mu t \sin m t + Q \mu t \cos m t + \\ + \Sigma(g \omega - f m) \cos(\omega t + \Omega) &= - m a_0 - m a_1 t - \Sigma m a \cos(\omega t + \Omega) - m x_1 \end{aligned}$$

und diese Gleichungen werden erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} p_1 + m q_0 &= m b_0 & q_1 &= b_1 & g m - f \omega &= m b \\ - q_1 + m p_0 &= m a_0 & p_1 &= a_1 & g \omega - f m &= - m a \end{aligned} \quad (12 a)$$

$$\begin{aligned} P \mu t \cos m t - Q \mu t \sin m t &= m y_1 \\ P \mu t \sin m t + Q \mu t \cos m t &= - m x_1 \end{aligned} \quad (12 b)$$

ist. Aus (12 a) folgt durch Auflösung

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1 & p_0 &= a_0 + \frac{b_1}{m} & f &= \frac{b \omega + a m}{m^2 - \omega^2} m \\ q_1 &= b_1 & q_0 &= b_0 - \frac{a_1}{m} & g &= \frac{a \omega + b m}{m^2 - \omega^2} m \end{aligned} \quad (13 a).$$

Da die sämtlichen a , b kleine Koeffizienten sind, so werden auch die Koeffizienten f , g kleine Werte erhalten, so lange nicht der Nenner $m^2 - \omega^2$ von derselben oder höherer Ordnung der Kleinheit wird; dabei müssen aber die Gleichungen (12 b) erfüllt werden können.

Die Differentialgleichungen (11) liefern nun

$$P = P_0 + P_1, \quad Q = Q_0 + Q_1,$$

wo P_0, Q_0 die Integrationskonstanten sind, für welche zwei andere h_0, H_0 durch die Beziehungen

$$P_0 = h_0 \cos H_0; \quad Q_0 = h_0 \sin H_0$$

eingeführt werden können und P_1, Q_1 periodische Reihen der Form

$$P_1 = \Sigma r \cos(\pi t + \Pi); \quad Q_1 = \Sigma r \sin(\pi t + \Pi)$$

sind. Da somit

$$P = h_0 \cos H_0 + \Sigma r \cos(\pi t + \Pi)$$

$$Q = h_0 \sin H_0 + \Sigma r \sin(\pi t + \Pi)$$

ist, so muß

$$\begin{aligned} m y_1 &= + \mu h_0 t \cos(m t + H_0) + \mu t \Sigma r \cos[(m + \pi) t + \Pi] \\ m x_1 &= - \mu h_0 t \sin(m t + H_0) - \mu t \Sigma r \sin[(m + \pi) t + \Pi] \end{aligned} \quad (13 b)$$

sein. Führt man hier die Werte von m und μ aus (8) ein, so folgt

$$\begin{aligned} \Gamma n [1 - \eta_0 t - \eta \sin(H t + H_0)] y_1 &= \\ = - \Gamma n h_0 t [\eta_0 + \eta H \cos(H t + H_0)] \cos(m t + H_0) - \\ - \Gamma n t [\eta_0 + \eta H \cos(H t + H_0)] \Sigma r \cos[(m + \pi) t + \Pi] \end{aligned}$$

und ebenso aus der zweiten Gleichung. Da H die Periodizität der Abplattung gibt, deren Periode als außerordentlich lang, mit derjenigen von m nicht vergleichbar anzusehen ist, so entstehen rechts sekular-periodische Glieder; sekulare Glieder aber nur dann, wenn $(m + \pi)$ mit H vergleichbar ist; im allgemeinen werden sich aus dieser Gleichung kleine Zusatzglieder für x, y ergeben, welche der gestörten Bewegung der Rotationsachse im Innern der Erde Rechnung tragen, so daß also die Bewegungen der Trägheitspole und der Rotationspole der Erde von einander nicht zu trennen sind. Setzt man also die Gleichungen (12 b) als erfüllt voraus, so wird nach (10):

$$\begin{aligned} p &= a_0 + \frac{b_1}{m} + a_1 t + h_0 \sin(m t + H_0) + \\ &+ \Sigma \frac{b \omega + a m}{m^2 - \omega^2} m \cos(\omega t + \Omega) + P_1 \sin m t + Q_1 \cos m t \\ q &= b_0 - \frac{a_1}{m} + b_1 t - h_0 \cos(m t + H_0) + \\ &+ \Sigma \frac{a \omega + b m}{m^2 - \omega^2} m \sin(\omega t + \Omega) - P_1 \cos m t + Q_1 \sin m t. \end{aligned} \quad (14)$$

Man kann den Anfangspunkt der Koordinaten so wählen, daß $a_0 = b_0 = 0$ ist; da a_1, b_1 stets außerordentlich klein sind, so gilt dasselbe von den zugehörigen Gliedern in p, q ; die von $(m t + H_0)$ abhängigen Glieder sind die bereits betrachteten des Euler'schen Zyklus (Formeln 2); h_0, H_0 sind die dort mit $g n, G$ bezeichneten Winkel. Die darauffolgenden Glieder, welche den Nenner $m^2 - \omega^2$ enthalten, können aber sehr groß werden, wenn der Nenner $m^2 - \omega^2$ sehr klein wird und da m veränderlich ist, so kann p und q beträchtliche Werte erlangen, d. h. die Verschiebungen der Rotationsachse innerhalb des Erdkörpers können beträchtlich anwachsen: es würden sich wesentlich größere Polhöschwankungen ergeben, als gegenwärtig beobachtet werden. ¹⁾

Es ist dazu keineswegs eine so beträchtliche Änderung der Abplattung nötig. ω bestimmt die Periodizität der Bewegung der x, y . Das jährliche An-

¹⁾ Das „Schleudern“ der Erde bei der Rotation würde wesentlich stärker sein.

sammeln der Eismassen im Winter und Abschmelzen derselben im Sommer gibt eine Periodizität mit der Dauer eines Jahres. Wäre die Winkelbewegung von m derart, daß sich die Bewegungen ebenfalls in einem Jahre wiederholen würden, so daß $T_m' = T_\omega$ wäre, so würde m nahe gleich ω werden. Da

$$T_m = T_n : \frac{C_0 - A_0}{A_0} = 304.8 \text{ Tage}$$

ist, wenn $T_n = 1$ Tag zugrunde gelegt wird, so würde

$$T_m' = T_n : \frac{C - A}{A} = 365.25 \text{ Tage, wenn}$$

$$\frac{C - A}{A} : \frac{C_0 - A_0}{A_0} = \frac{304.8}{365.25}; \quad \frac{C - A}{A} = 0.8345 \frac{C_0 - A_0}{A_0};$$

$$\Delta = 0.1655; \quad R\gamma = 0.11 \quad R\beta = 0.11 \cdot 22.86 = 2.52 \text{ km.}$$

Wie schon erwähnt, ist allerdings zu berücksichtigen, daß infolge der Plastizität der Erdrinde diese Auflagerungen durch Druck eine Annäherung an den Erdmittelpunkt bewirken; würde dieses nicht der Fall sein, so würden Auflagerungen, die diesen Betrag ¹⁾ erreichen, geradezu kritisch werden und zu vollständigen Umwälzungen in der Lage der Rotationsachse, also in den Schwankungen der Polhöhe, führen können. Indem aber die Erdkruste als nachgiebig angesehen werden muß, können auch Auflagerungen von mehr als 2.5 km für zulässig erklärt werden. Man erhält für den Vergrößerungsfaktor

$F = \left[1 - \left(\frac{\omega}{m} \right)^2 \right]^{-1}$, wenn man also die nach Senkung der Kruste übrig gebliebene wirksame Überhöhung

$$R\gamma = \begin{matrix} 2.0 & 2.1 & 2.2 & 2.3 & 2.4 & 2.5 \text{ km annimmt:} \\ F = & 12.9 & 15.8 & 20.5 & 29.3 & 52.6 & 294.1 \end{matrix}$$

so daß im letzten Falle eine Verschiebung des Trägheitspoles um 1'' eine solche der Polhöhe um nahe 5' jederseits, also eine Totalschwankung der Polhöhe von 10' zur Folge haben könnte.

Ehe auf die Diskussion dieses Resultates eingegangen wird, soll noch der Einfluß auf die Schiefe der Ekliptik untersucht werden.

Die Gleichungen (6) geben, wenn man in denselben für p und q die Werte aus (14) einsetzt:

$$\sin \epsilon' \frac{d\psi'}{dt} = -(p_0 + p_1 t) \sin \theta - (q_0 + q_1 t) \cos \theta + h_0 \cos (m t + \theta + H_0) + P_1 \cos (m t + \theta) - Q_1 \sin (m t + \theta) -$$

$$- \Sigma \frac{m}{2} \frac{a+b}{m-\omega} \sin (\omega t + \theta + \Omega) + \Sigma \frac{m}{2} \frac{a-b}{m+\omega} \sin (\omega t - \theta + \Omega).$$

$$\frac{d\epsilon'}{dt} = -(p_0 + p_1 t) \cos \theta + (q_0 + q_1 t) \sin \theta - h_0 \sin (m t + \theta + H_0) - P_1 \sin (m t + \theta) - Q_1 \cos (m t + \theta) -$$

$$- \Sigma \frac{m}{2} \frac{a+b}{m-\omega} \cos (\omega t + \theta + \Omega) - \Sigma \frac{m}{2} \frac{a-b}{m+\omega} \cos (\omega t - \theta + \Omega).$$

$$\frac{d\theta}{dt} = n + r' - \cos \epsilon' \frac{d\psi'}{dt}$$

¹⁾ Vgl. die S. 278 zur Erklärung der Strandlinien in Nordamerika nötigen Annahmen.

wobei die zu n hinzutretenden Glieder sehr kleine periodische Korrekturen sind.

Um hier direkt die Werte aus (11) einführen zu können, wird differenziert; man erhält, da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{m-\omega} \right) &= - \frac{\omega}{(m-\omega)^2} \mu; & \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{m+\omega} \right) &= + \frac{\omega}{(m+\omega)^2} \mu \quad \text{ist:} \\ \frac{d}{dt} \left(\sin \varepsilon' \frac{d\psi'}{dt} \right) &= \{ -(p_0 + p_1 t) \cos \theta + (q_0 + q_1 t) \sin \theta \} \frac{d\theta}{dt} - \\ &- p_1 \sin \theta - q_1 \cos \theta + \frac{dP_1}{dt} \cos(mt + \theta) - \frac{dQ_1}{dt} \sin(mt + \theta) + \\ &+ [-P_1 \sin(mt + \theta) - Q_1 \cos(mt + \theta) - h_0 \sin(mt + \theta + H_0)] \left(m + \frac{d\theta}{dt} + \mu t \right) - \\ &- \Sigma \left(\omega + \frac{d\theta}{dt} \right) \cdot \frac{m}{2} \frac{a+b}{m-\omega} \cos(\omega t + \theta + \Omega) + \Sigma \left(\omega - \frac{d\theta}{dt} \right) \cdot \frac{m}{2} \frac{a-b}{m+\omega} \cos(\omega t - \theta + \Omega) + \\ &+ \Sigma \frac{\omega \mu}{2} \frac{a+b}{(m-\omega)^2} \sin(\omega t + \theta + \Omega) + \Sigma \frac{\omega \mu}{2} \frac{a-b}{(m+\omega)^2} \sin(\omega t - \theta + \Omega). \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varepsilon'}{dt} \right) &= \{ (p_0 + p_1 t) \sin \theta + (q_0 + q_1 t) \cos \theta \} \frac{d\theta}{dt} - \\ &- p_1 \cos \theta + q_1 \sin \theta - \frac{dP_1}{dt} \sin(mt + \theta) - \frac{dQ_1}{dt} \cos(mt + \theta) + \\ &+ [-P_1 \cos(mt + \theta) + Q_1 \sin(mt + \theta) - h_0 \cos(mt + \theta + H_0)] \left(m + \frac{d\theta}{dt} + \mu t \right) + \\ &+ \Sigma \left(\omega + \frac{d\theta}{dt} \right) \cdot \frac{m}{2} \frac{a+b}{m-\omega} \sin(\omega t + \theta + \Omega) + \Sigma \left(\omega - \frac{d\theta}{dt} \right) \cdot \frac{m}{2} \frac{a-b}{m+\omega} \sin(\omega t - \theta + \Omega) + \\ &+ \Sigma \frac{\omega \mu}{2} \frac{a+b}{(m-\omega)^2} \cos(\omega t + \theta + \Omega) - \Sigma \frac{\omega \mu}{2} \frac{a-b}{(m+\omega)^2} \cos(\omega t - \theta + \Omega). \end{aligned}$$

Da nun aus (11) durch Multiplikation mit $+\cos \theta$ und $-\sin \theta$ und Addition sodann mit $+\sin \theta$ und $+\cos \theta$ und Addition¹⁾

$$\begin{aligned} + \frac{dP_1}{dt} \sin(mt + \theta) + \frac{dQ_1}{dt} \cos(mt + \theta) &= \frac{\mathfrak{L}}{A_0} \cos \theta - \frac{\mathfrak{M}}{A_0} \sin \theta = U \\ - \frac{dP_1}{dt} \cos(mt + \theta) + \frac{dQ_1}{dt} \sin(mt + \theta) &= \frac{\mathfrak{L}}{A_0} \sin \theta + \frac{\mathfrak{M}}{A_0} \cos \theta = W \end{aligned}$$

wird, so erhält man durch Substitution dieser Werte und der in den eckigen Klammern auftretenden Werte nach einigen leichten Reduktionen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sin \varepsilon' \frac{d\psi'}{dt} \right) &= n' \frac{d\varepsilon'}{dt} - W + \dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varepsilon'}{dt} \right) &= -n' \sin \varepsilon' \frac{d\psi'}{dt} - U + \dots \end{aligned}$$

$$n' = m + \frac{d\theta}{dt} + \mu t = \frac{C}{A} n + (n' - \cos \varepsilon' \frac{d\psi'}{dt} + \mu t)$$

und daher durch Transposition

¹⁾ Es ist $dP = dP_1$; $dQ = dQ_1$, weil die Konstanten P_0 , Q_0 bei der Differentiation wegfallen.

$$\begin{aligned}
 \sin \varepsilon' \frac{d\psi'}{dt} = & -\frac{1}{n'} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varepsilon'}{dt} \right) - \frac{U}{n'} - \frac{m + \mu t}{n'} \{ (p_0 + p_1 t) \sin \theta + \\
 & + (q_0 + q_1 t) \cos \theta \} - \frac{p_1}{n'} \cos \theta + \frac{q_1}{n'} \sin \theta - \\
 & - \Sigma \frac{m}{n'} \left(\frac{a+b}{2} \right) \left(1 + \frac{\mu t}{m-\omega} \right) \sin (\omega t + \theta + \Omega) + \\
 & + \Sigma \frac{m}{n'} \left(\frac{a-b}{2} \right) \left(1 + \frac{\mu t}{m+\omega} \right) \sin (\omega t - \theta + \Omega) \\
 & + \Sigma \frac{\omega \mu}{n' (m-\omega)^2} \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos (\omega t + \theta + \Omega) - \\
 & - \Sigma \frac{\omega \mu}{n' (m+\omega)^2} \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos (\omega t - \theta + \Omega). \\
 \frac{d\varepsilon'}{dt} = & + \frac{1}{n'} \frac{d}{dt} \left(\sin \varepsilon' \frac{d\psi'}{dt} \right) + \frac{W}{n'} - \frac{m + \mu t}{n'} \{ (p_0 + p_1 t) \cos \theta - \\
 & - (q_0 + q_1 t) \sin \theta \} + \frac{p_1}{n'} \sin \theta + \frac{q_1}{n'} \cos \theta - \\
 & - \Sigma \frac{m}{n'} \left(\frac{a+b}{2} \right) \left(1 + \frac{\mu t}{m-\omega} \right) \cos (\omega t + \theta + \Omega) - \\
 & - \Sigma \frac{m}{n'} \left(\frac{a-b}{2} \right) \left(1 + \frac{\mu t}{m+\omega} \right) \cos (\omega t - \theta + \Omega) \\
 & - \Sigma \frac{\omega \mu}{n' (m-\omega)^2} \left(\frac{a+b}{2} \right) \sin (\omega t + \theta + \Omega) - \\
 & - \Sigma \frac{\omega \mu}{n' (m+\omega)^2} \left(\frac{a-b}{2} \right) \sin (\omega t - \theta + \Omega).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Die Bestimmung der störenden Kräfte \mathfrak{Q} , \mathfrak{M} (\mathfrak{N} ist Null) kann hier aus den betreffenden astronomischen Arbeiten entnommen werden. Haben die anziehenden Kräfte (Sonne, Mond) ein Potential V , so ist ¹⁾:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{Q} = -\cos \theta \frac{\partial V}{\partial \varepsilon'} - \frac{\sin \theta}{\sin \varepsilon'} \frac{\partial V}{\partial \psi'} & \quad U = -\frac{1}{A_0} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon'} \\
 \mathfrak{M} = +\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \varepsilon'} - \frac{\cos \theta}{\sin \varepsilon'} \frac{\partial V}{\partial \psi'} & \quad W = -\frac{1}{A_0} \frac{1}{\sin \varepsilon'} \frac{\partial V}{\partial \psi'}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Das Potential V enthält nun aber noch den Faktor $(C - A)$; es ist ²⁾

$$\begin{aligned}
 V = \frac{3k_0^2}{2} (C - A) \Sigma \frac{M}{\rho^3} \{ & -\sin \psi' \sin \varepsilon' \cos \beta_0 \cos \lambda_0 + \\
 & + \cos \psi' \sin \varepsilon' \cos \beta_0 \sin \lambda_0 + \cos \varepsilon' \sin \beta_0 \}
 \end{aligned} \tag{17}$$

und es wird daher hier ebenfalls auf die Veränderlichkeit dieses Wertes Rücksicht genommen werden müssen.

In den Gleichungen (15) können nun außer kleinen zu vernachlässigenden Gliedern, zweierlei Glieder auftreten, die durch kleine Integrationsdivisoren stark vergrößert werden, die von Gylden als elementäre Glieder vom Typus A) und Typus B) bezeichneten. Wie unmittelbar ersichtlich, sind alle angeschriebenen Glieder kurzperiodisch, mit der Periode von nahe einem Tag; elementäre Glieder vom Typus A) können daher nicht auftreten; hingegen sind bereits aus den Reihen

¹⁾ „Mechanik des Himmels“, S. 578.

²⁾ Ibid. S. 584.

für p und q elementäre Glieder vom Typus B) mit dem Nenner $m \pm \omega$ und dem Faktor t vorhanden, welche als sekular-periodische Glieder erscheinen und übrigens einfach periodische Glieder mit dem Nenner $(m \pm \omega)^2$, allerdings mit dem kleinen Faktor μ ¹⁾, sämtlich aber aus dem Grunde belanglos, weil sie kurz-periodisch, mit der Periode von einem Tage sind.

Ich möchte diesen Gliedern keine allzugroße Bedeutung beilegen; selbstverständlich muß die Neigung der Hauptträgheitsachse gegen eine feste Ebene variieren, wenn die Rotationsachse fest oder wenigstens im Raume nahe unveränderlich bleibt und die sämtlichen Punkte, also auch die Hauptträgheitsachse um dieselbe rotieren. Infolge der Bewegung der Hauptträgheitsachse im Körper wird jedoch die Darstellung in dieser Form etwas weniger übersichtlich, und die Verhältnisse werden klarer, wenn man die Bewegung der Rotationsachse im Raume mit der durch die Formeln (14) gegebenen relativen Bewegung der Hauptträgheitsachse um die Rotationsachse zusammenstellt.

Die Gleichungen (15) bestimmen die Bewegungen des Erdkörpers. Für die Bewegungen der Rotationsachse im Raume hat man, wenn ψ, ε dieselbe Bedeutung für den Rotationsäquator haben, wie ψ', ε' für den Trägheitsäquator, also ψ die Länge des beweglichen Frühlingspunktes von einem Fixpunkte in der Ekliptik, ε die Schiefe der Ekliptik gegen den Rotationsäquator ist und w die Rotationsgeschwindigkeit darstellt:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= (w)_1 \frac{dp}{dt} + (w)_2 \frac{dq}{dt} + (w)_3 \frac{dr}{dt} \\ w \sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} &= (\psi)_1 \frac{dp}{dt} + (\psi)_2 \frac{dq}{dt} + (\psi)_3 \frac{dr}{dt} \\ w \frac{d\varepsilon}{dt} &= (\varepsilon)_1 \frac{dp}{dt} + (\varepsilon)_2 \frac{dq}{dt} + (\varepsilon)_3 \frac{dr}{dt}. \end{aligned}$$

Die Werte der Koeffizienten $(w)_1, (w)_2 \dots (\varepsilon)_3$ enthalten Ausdrücke mit Faktoren, die von den Unterschieden $(\psi' - \psi), (\varepsilon' - \varepsilon)$ abhängig sind ²⁾; vernachlässigt man die Produkte dieser außerordentlich kleinen Beträge in die ebenfalls stets nur kleinen Beträge von dp, dq, dr , so kann mit einer für alle Fälle völlig ausreichenden Genauigkeit gesetzt werden

$$\begin{aligned} (w)_1 &= 0 & (\psi)_1 &= -\cos \theta & (\varepsilon)_1 &= +\sin \theta \\ (w)_2 &= 0 & (\psi)_2 &= +\sin \theta & (\varepsilon)_2 &= +\cos \theta \\ (w)_3 &= 1 & (\psi)_3 &= 0 & (\varepsilon)_3 &= 0 \end{aligned}$$

und dann wird

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} = \frac{dr}{dt} & \quad w \sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} = -\cos \theta \frac{dp}{dt} + \sin \theta \frac{dq}{dt} \\ w \frac{d\varepsilon}{dt} &= +\sin \theta \frac{dp}{dt} + \cos \theta \frac{dq}{dt}. \end{aligned}$$

¹⁾ Da der Nenner $(m \pm \omega)$ auftritt, so können solche Glieder sowohl für gleichstimmige, als für entgegengesetzte Drehungen auftreten; das „Schleudern“ wird am besten durch die kurzperiodischen Glieder ausgedrückt; während je einer Rotation um die Erdachse wird diese gleichsam „mitgerissen“, so daß sich ihre Neigung gegen die Ekliptik periodisch im Laufe eines Tages ändert.

²⁾ „Mechanik des Himmels“, S. 569.

Substituiert man hier für dp und dq ihre Werte aus (7), so folgt

$$w = r = n + r' - \cos \varepsilon' \frac{d\psi'}{dt}$$

$$w \sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} = m (q \cos \theta + p \sin \theta) - m (y \cos \theta + x \sin \theta) - U$$

$$\omega \frac{d\varepsilon}{dt} = m (p \cos \theta - q \sin \theta) - m (x \cos \theta - y \sin \theta) + W$$

und wenn man hier, um die neuerliche Substitution von p und q aus (14) zu erleichtern, die Gleichungen (6) benützt und für x, y aus (9) substituiert.

$$w \sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} = -m \sin \varepsilon' \frac{d\psi'}{dt} - U - m \{(b_0 + b_1 t) \cos \theta + (a_0 + a_1 t) \sin \theta\} -$$

$$- \Sigma \frac{1}{2} m \{(a + b) \sin (\omega t + \theta + \Omega) - (a - b) \sin (\omega t - \theta + \Omega)\} - m (y_1 \cos \theta + x_1 \sin \theta)$$

$$\omega \frac{d\varepsilon}{dt} = -m \frac{d\varepsilon'}{dt} + W - m \{(a_0 + a_1 t) \cos \theta - (b_0 + b_1 t) \sin \theta\} -$$

$$- \Sigma \frac{1}{2} m \{(a + b) \cos (\omega t + \theta + \Omega) + (a - b) \cos (\omega t - \theta + \Omega)\} - m (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta).$$

Substituiert man nun für $d\psi'$ und $d\varepsilon'$ ihre bereits reduzierten Ausdrücke aus (15), so erhält man:

$$w \sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} = + \frac{m}{n'} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varepsilon'}{dt} \right) - \left(1 - \frac{m}{n'} \right) U +$$

$$+ m \left[\frac{m + \mu t}{n'} \{(p_0 + p_1 t) \sin \theta + (q_0 + q_1 t) \cos \theta\} + \right.$$

$$\left. + \frac{p_1}{n'} \cos \theta - \frac{q_1}{n'} \sin \theta - (b_0 + b_1 t) \cos \theta - (a_0 + a_1 t) \sin \theta \right]$$

$$- m \Sigma \frac{a + b}{2} \left[1 - \frac{m}{n'} \left(1 + \frac{\mu t}{m - \omega} \right) \right] \sin (\omega t + \theta + \Omega) +$$

$$+ m \Sigma \frac{a - b}{2} \left[1 - \frac{m}{n'} \left(1 + \frac{\mu t}{m + \omega} \right) \right] \sin (\omega t - \theta + \Omega)$$

$$- \frac{m}{n'} \Sigma \frac{a + b}{2} \frac{\omega \mu}{(m - \omega)^2} \cos (\omega t + \theta + \Omega) +$$

$$+ \frac{m}{n'} \Sigma \frac{a - b}{2} \frac{\omega \mu}{(m + \omega)^2} \cos (\omega t - \theta + \Omega) - m (y_1 \cos \theta + x_1 \sin \theta)$$

$$\omega \frac{d\varepsilon}{dt} = - \frac{m}{n'} \frac{d}{dt} \left(\sin \varepsilon' \frac{d\psi'}{dt} \right) + \left(1 - \frac{m}{n'} \right) W +$$

$$+ m \left[\frac{m + \mu t}{n'} \{p_0 + p_1 t\} \cos \theta - (q_0 + q_1 t) \sin \theta \right] -$$

$$\left. - \frac{p_1}{n'} \sin \theta - \frac{q_1}{n'} \cos \theta - (a_0 + a_1 t) \cos \theta + (b_0 + b_1 t) \sin \theta \right]$$

$$- m \Sigma \frac{a + b}{2} \left[1 - \frac{m}{n'} \left(1 + \frac{\mu t}{m - \omega} \right) \right] \cos (\omega t + \theta + \Omega) -$$

$$- m \Sigma \frac{a - b}{2} \left[1 - \frac{m}{n'} \left(1 + \frac{\mu t}{m + \omega} \right) \right] \cos (\omega t - \theta + \Omega)$$

$$+ \frac{m}{n'} \Sigma \frac{a + b}{2} \frac{\omega \mu}{(m - \omega)^2} \sin (\omega t + \theta + \Omega) +$$

$$+ \frac{m}{n'} \Sigma \frac{a - b}{2} \frac{\omega \mu}{(m + \omega)^2} \sin (\omega t - \theta + \Omega) - m (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta).$$

Es werden daher sämtliche in (15) auftretenden Zusatzglieder mit dem Faktor m , d. i. mit $(C-A)$ multipliziert erscheinen, also wesentlich verkleinert; die Stellung der Rotationsachse im Raume ist daher beträchtlich stabiler, als die Stellung der Hauptträgheitsachsen und man kann für die erstere von diesen Zusatzgliedern ganz absehen.¹⁾ Da übrigens

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{m}{n'} &= 1 - \frac{C-A}{C} + \frac{(C-A)A}{C^2 n} \left(r' - \cos \varepsilon' \frac{d\psi'}{dt} + \mu t \right) = \\
 &= 1 - \Gamma \frac{A}{C} [1 - \eta_0 t - \eta \sin(Ht + H_0)] + \text{Erg.} \\
 \frac{A}{C} &= \left[1 + \frac{C-A}{A} \right]^{-1} = \left[1 + \Gamma - \Gamma (\eta_0 t + \eta \sin(Ht + H_0)) \right]^{-1} = \\
 &= (1 + \Gamma)^{-1} \left[1 + \frac{\Gamma}{1 + \Gamma} (\eta_0 t + \eta \sin(Ht + H_0)) \right] = \\
 &= \frac{A_0}{C_0} \left[1 + \frac{C_0 - A_0}{C_0} (\eta_0 t + \eta \sin(Ht + H_0)) \right] \\
 1 - \frac{m}{n'} &= 1 - \frac{C_0 - A_0}{C_0} \left[1 - \eta_0 t - \eta \sin(Ht + H_0) \right] = \\
 &= \frac{A_0}{C_0} + \Gamma \{ \eta_0 t + \eta \sin(Ht + H_0) \} + \frac{(C-A)A}{C^2 n} \left(r' - \cos \varepsilon' \frac{d\psi'}{dt} + \mu t \right)
 \end{aligned}$$

ist, wenn das Quadrat von $(C-A)$ in die kleinen Glieder η_0, η vernachlässigt wird, so folgt, abgesehen von den ebenfalls sehr kleinen, aber mit dem veränderlichen Faktor $(C-A)$ multiplizierten Gliedern

$$\frac{C-A}{A} \frac{n}{n'} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varepsilon'}{dt} \right); \quad - \frac{C-A}{A} \frac{n}{n'} \frac{d}{dt} \left(\sin \varepsilon' \frac{d\psi'}{dt} \right)$$

als Integral der Gleichungen (17):

$$\begin{aligned}
 \psi &= \psi_0 + \frac{1}{C_0 n} \int \left\{ 1 - \frac{C_0}{A_0} \Gamma \left[\eta_0 t + \eta \sin(Ht + H_0) \right] \right\} \frac{1}{\sin \varepsilon'} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon'} \\
 \varepsilon &= \varepsilon_0 - \frac{1}{C_0 n} \int \left\{ 1 - \frac{C_0}{A_0} \Gamma \left[\eta_0 t + \eta \sin(Ht + H_0) \right] \right\} \frac{1}{\sin \varepsilon'} \frac{\partial V}{\partial \psi'}
 \end{aligned} \tag{18}$$

In den Formeln (18) enthält V ebenfalls noch den Faktor

$$C-A = A_0 \Gamma [1 - \{ \eta_0 t + \eta \sin(Ht + H_0) \}]$$

und es kommt zunächst wesentlich auf die Entwicklung von U und W an, in welcher Art sich ein Einfluß auf die Lage der Achse ergeben kann.

Die Glieder $\Delta \cdot U, \Delta \cdot W$ werden, wenn in Δ ein der Zeit proportionales Glied $\eta_0 t$ vorkommt, nur in dem Ausdruck für ψ ein sekulares Glied geben, weil nur die Entwicklung von U eine Konstante hat, hingegen werden in dem Ausdrücke für ε nur sekular-periodische Glieder erscheinen, da die Entwicklung von W keine Konstante hat; doch haben derartige Glieder innerhalb beschränkter

¹⁾ Das „Schleudern“ der Rotationsachse ist also wesentlich geringer als das „Schleudern“ des Körpers; von der Veränderlichkeit von $(C-A)$ wurde in diesen Gliedern dabei ganz abgesehen; daß aus den Produkten dieser veränderlichen Glieder in die mit den Nennern $(m \mp \omega)$ und $(m \mp \omega)^2$ behafteten Gliedern eventuell merkliche Korrekturen entstehen können, wie ja oben bereits Glieder auftreten, die mit dem Quadrate der Zeit wachsen, wäre vielleicht doch möglich; auch mag an dieser Stelle bemerkt werden, daß $(C-A)$ nie Null wird.

Zeiträume ebenfalls sekularen Charakter, wie ja auch das in Δ auftretende Glied $\Delta' t$ nur als der genäherte Ausdruck eines periodischen Gliedes anzusehen ist.

Die periodischen Glieder in Δ von der Form $\eta \sin(Ht + H_0)$ vorausgesetzt, können wieder zweierlei elementäre Glieder geben. Glieder vom Typus B) würden entstehen, wenn in der Entwicklung der störenden Kräfte U, W , Glieder mit nahe derselben Periode wie H vorkämen; dieses ist hier nicht der Fall, daher werden kritische Glieder dieser Art nicht auftreten. Kritische Glieder vom Typus A) hingegen treten durch Multiplikation der konstanten Glieder in den Entwicklungen der störenden Kräfte mit $\eta \sin(Ht + H_0)$ auf. In der Entwicklung von W kommt ein solches Glied nicht vor; daher werden in der Schiefe der Ekliptik kritische Glieder dieser Art ebenfalls nicht auftreten;¹⁾ hingegen hat die Entwicklung von U eine Konstante, welche bei der Integration die Präzession liefert; es kann daher zu ψ ein Glied mit außerordentlich langer Periode, der Periode von Δ hinzutreten, welches durch den kleinen Nenner H einen großen Koeffizienten erhalten kann.

Schreibt man

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \cos(Ht + H_0)$$

und ist π_0 die siderische Bewegung des Perihels der Erdbahn, so wird damit die tropische Bewegung

$$\pi_0' = \pi_0 + \psi_0 + \psi_1 \cos(Ht + H_0).$$

Der Koeffizient ψ_1 ergibt sich aus der Entwicklung von U ; ist die Konstante in derselben U_0 , also

$$U = U_0 + \text{Periodische Glieder}$$

so tritt in $\frac{d\psi}{dt}$ das Glied $\frac{U_0}{n'} \eta \sin(Ht + H_0)$ auf, welches durch Integration

$$\psi_1 = \frac{\psi_0 \eta}{H}$$

liefert. Da nun genähert $\pi = 11''$, $\psi_0 = 50''$ ist, so wird

$$\pi_0' = 61'' + 50'' \frac{\eta}{H} \cos(Ht + H_0).$$

Dieser Wert kann den Maximalwert, bezw. Minimalwert

$$(\pi_0')_{\max.} = 61'' + 50'' \frac{\eta}{H}; \quad (\pi_0')_{\min.} = 61'' - 50'' \frac{\eta}{H}$$

erreichen. Es soll nun, um den Einfluß zu überblicken, angenommen werden, daß, η und H von gleicher Ordnung der Kleinheit vorausgesetzt, $\eta = H$ wäre; dann wird die jährliche tropische Bewegung des Perihels zwischen $111''$ und $11''$ schwanken. Im ersteren Falle wird das Perihel einen Umlauf in nahe 11.000 Jahren zurücklegen, und Perihelsommer und Aphelsommer würden daher schon nach je 5000 Jahren wechseln; im zweiten Falle würde der Um-

¹⁾ Dies gilt auch ohne die hier gemachten Vernachlässigungen, wenn die schon bei der Entwicklung von $1 - \frac{m}{n'}$ und dann neuerdings das bei Multiplikation der Faktoren $[\eta_0 t + \eta \sin(Ht + H_0)](C - A)$ in den Formeln (18) entstehende Glied mit η^2 ; nicht vernachlässigt würde; da nämlich $\eta^2 \sin^2(Ht + H_0) = \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{2} \eta^2 \cos 2(Ht + H_0)$ auftritt, so gäbe dieses in dem Ausdrücke für ε wieder nur ein sekular-periodisches Glied.

lauf des Perihels sich in 110.000 Jahren vollziehen und der Übergang von Perihelsommer in Aphelsommer würde eine Zeit von 55.000 Jahren erfordern.

Wenn aber auch ein direkter Einfluß der Schiefe der Ekliptik in erheblichem Betrage sich nicht ergibt (wenn man von den sekular-periodischen, selbst mit dem Quadrate der Zeit multiplizierten Gliedern absieht), so werden die Polhöschwankungen, die einen so beträchtlichen Grad erreichen können, einen ganz ähnlichen, gegenüber dem direkten Einfluß sogar wesentlich gesteigerten Effekt erzielen, der sich am besten in der Zusammenfassung der Erscheinungen darstellen läßt.¹⁾

Wenn durch irgend eine Tatsache,²⁾ etwa durch den Eintritt der durch die Störungen der Planeten verursachten Verringerung der Schiefe der Ekliptik eine, wenn auch nicht allzu große Vereisung in den dazu disponierten maritimen Gebieten auftritt, so wird durch die sich bildende Eiskalotte, die bei der gegenwärtigen Verteilung von Wasser und Land wenigstens um den Nordpol das Zentrum außerhalb des Nordpols hat, eine Vergrößerung des Winkels zwischen Hauptträgheitsachse und Rotationsachse erfolgen; diese Entfernung des Trägheitspols vom Rotationspole wird dann in dreifacher Weise wirken.

1. Die Rotation wird infolge der größeren Abweichung der Rotationsachse von der Hauptträgheitsachse unregelmäßiger; es findet, um einen bereits früher gebrauchten, allerdings mehr populären Ausdruck zu verwenden, ein stärkeres „Schleudern“ statt: die Rotationsachse dreht sich um die Hauptträgheitsachse mit einer Periode, welche von der Bewegung der Erde um die Sonne ganz unabhängig ist, und nur von der Geschwindigkeit der täglichen Rotation n und der Größe der Abplattung, in $C - A$ enthalten, abhängt; gegenwärtig 304,8 Tage betragend, kann diese Rotationsperiode R beträchtlich größer werden, wenn die Abplattung abnimmt, und es bedarf keiner allzu großen Änderung der Abplattung, damit diese Rotationsperiode R bis zu einem Jahre anwächst. Gleichzeitig, aber in viel stärkerem Maße wirkt diese Änderung auf den Winkel zwischen Rotations- und Hauptträgheitsachse zurück; der Vergrößerungsfaktor für diesen Öffnungswinkel hängt von der Größe der Periode R und der Bewegung der Hauptträgheitsachse im Innern der Erde ab. Ist die Polarkappe nicht völlig zentrisch zum Pol, so wird durch die jährliche Ver-

¹⁾ In der „Umschau“ erschien über die Frage der Eiszeiten ein kurzer Artikel mit der Bemerkung „Vortrag, gehalten auf der 81. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Salzburg“, welchen ich, da er mit meinem Namen gezeichnet wurde, durch einige, allerdings etwas längere und weniger elementare Bemerkungen, gemäß den hier erhaltenen und bereits auf der Naturforscherversammlung in Salzburg vorgelegten Resultaten korrigieren zu müssen glaubte. Da mir die Korrekturbogen zwar zugesendet, die von mir angezeigten Korrekturen aber nicht berücksichtigt wurden, so ist der Artikel in der „Umschau“ mit ähnlichen in einzelnen Tagesblättern auf gleiche Stufe zu stellen, so daß ihm jede Bedeutung bei etwaigen Diskussionen abgesprochen werden muß.

²⁾ Es mag darauf hingewiesen werden, daß eine Katastrophe, wie die im Tertiär angenommenen Landeinbrüche im atlantischen Becken, wohl eine solche Änderung einleiten kann; doch ist es nicht absolut notwendig, solche anzunehmen, da auch die stetigen Änderungen allein die Reihenfolge der Erscheinungen zu erklären vermögen; unter Annahme einer Katastrophe wird natürlich die Erklärung umsoviel leichter.

eisung und Abschmelzung der Trägheitspol C eine hin- und hergehende oder eb ebenfalls rotierende Bewegung um eine mittlere Lage C_0 beschreiben mit einer Periode S , die infolge des Wechsels der Jahreszeiten ein Jahr ist. Je näher die beiden Perioden R und S an Größe sind, desto größer ist der Vergrößerungsaktor ¹⁾ und desto weiter entfernt sich der Rotationspol vom Trägheitspol.

Wäre der Rotationspol zu einer gewissen Zeit einem Orte, dessen Länge 0 , und Breite $+ \varphi$ ist (zum Beispiel Greenwich), und der kurz mit $(0, + \varphi)$ bezeichnet werden soll, genähert, so wird er ein halbes Jahr später um ebensoviel entfernter sein; die Polhöhen wechseln. Fällt die Zeit der Annäherung des Poles gegen $(0, + \varphi)$ in den Sommer dieses Ortes, so wird der Pol im Winter weiter weg sein, es wird der Sommer kühler, der Winter wärmer sein, die klimatischen Schwankungen werden für den Ort $(0, + \varphi)$ kleiner sein, und zwar um den doppelten Betrag desjenigen, der aus einer Veränderung der Schiefe der Ekliptik hervorgegangen wäre. ²⁾

Für den Ort $(180, + \varphi)$, der mit $(0, + \varphi)$ gleichzeitig Sommer hat, fällt aber in diesen die Entfernung des Poles, in den Winter die Annäherung desselben, die Sommer sind wärmer, die Winter kälter, die Amplitude der Schwankung wird größer.

Zur Zeit der Annäherung des Poles an den Ort $(0, + \varphi)$ wird gleichzeitig der Ort $(0, - \varphi)$ Winter haben; für diesen Punkt fällt aber gleichzeitig die Entfernung des zugehörigen Poles; es wird also auch der Ort $(0, - \varphi)$ gleiche Schwankungen zeigen wie der Ort $(0, + \varphi)$; und ebenso sind die Orte $(180, + \varphi)$ und $(180, - \varphi)$ gleichartigen klimatischen Schwankungen unterworfen. Die hiedurch erfolgende Zunahme der Vereisung hat daher einen ganz besonderen Typus: sie häuft sich auf demjenigen Meridiane, in welchem der Rotationspol im Sommer liegt (Nord- und Südhemisphäre).

Da nun weiters die Verteilung von Land und Wasser auf der nördlichen und südlichen Hemisphäre nicht symmetrisch ist, so wird auf der Nordhemisphäre ein Überwiegen der Wanderung stattfinden, und damit wieder der Trägheitspol von der Vereisung gleichsam nachgezogen, und zwar zu einer Zeit, wo der Rotationspol sich auf der entgegengesetzten Seite befindet [Winter von $(0, \varphi)$], es wird der Öffnungswinkel zwischen CR vergrößert, und damit wieder die Amplitude der Bewegung des Rotationspoles vergrößert, so daß die einmal eingeleitete Vereisung zu einem beständigen Fortschreiten derselben führt.

2. Mit der Veränderung der Lage der Rotationsachse folgt das flüssige Element, das Meer. Da, wie die Theorie zeigt, mit jeder Verschiebung des Trägheitspoles in der Periode eines Jahres eine Rotation des Rotationspoles um diesen mit der Periode R stattfindet, so müssen die Transgressionen und Rückzüge des Meeres auch diese Periode haben. Da die starre Erdkruste, obzwar sie ebenfalls diesen Bewegungen folgt, dieselben aber nur in etwa $\frac{1}{100}$

¹⁾ S. 293; abhängig von der Differenz $m - \omega$; die Bewegung der Erde um die Sonne spielt nur insofern eine Rolle, als sie die Abschmelzungsperiode S bestimmt.

²⁾ Zu beachten ist dabei, daß die Lage der Rotationsachse im Raume, also ihre wahre Neigung gegen die Ekliptik unter diesen Verhältnissen viel geringeren Änderungen unterworfen ist.

des Betrages ausführt (s. S. 47), so muß eine Ebbe und Flut mit der Periode R , also zur Zeit der größten Exkursionen der Rotationsachse mit jährlicher Periode die Folge sein, deren Maximalbetrag im vertikalen Sinne (s. S. 146).

$$dh = - 372.1 \sin 2\varphi d\varphi$$

beträgt, wenn $d\varphi$ in Graden ausgedrückt wird. Da $dh : d\varphi$ negativ ist, so wird bei einer Annäherung des Poles eine Senkung des Wasserspiegels, eine Hebung des Landes stattfinden. Wäre diese auch nur 100 m , so würde damit eine Herabdrückung der Schneelinie um 100 m , also eine die Vereisung begünstigende Bewegung gegeben sein. Wenn nun, wie oben angenommen, der Rotationspol sich im Sommer dem Punkte $(0, +\varphi)$ nähert, so wird im Sommer eine Erhebung des Landes, eine Herabdrückung der Schneelinie erfolgen; die Entfernung des Poles im Winter hat dabei auf die Höhe der Schneelinie keinen wesentlichen Einfluß, wird hingegen eine Milderung der Wintertemperaturen in den Grenzgebieten der Vereisung zur Folge haben; die beiden Wirkungen: Schwankungen der Temperaturamplitude und Sommerebbe verstärken sich also gegenseitig. Daß auch die Attraktion der polaren Eismassen auf das Wasser im selben Sinne wirkt, ergibt sich aus dem S. 157 Gesagten.

Eine wichtige Folgerung kann hieraus noch gezogen werden. Jede größere Amplitude der Distanz CR (Trägheitspol-Rotationspol) muß eine entsprechende vergrößerte Amplitude der Schwankungen in dem Stande des Meeresspiegels zur Folge haben. Da aber diese Flutungen und Rückflutungen des Meeres eine jährliche Periode (allgemein die Periode R) haben, so ist eine allzu-große Entfernung der Pole CR von einander schon hiedurch ausgeschlossen. Ein Wandern des Rotationspoles über die ganze Erde, oder selbst nur im Betrage von 5° , wie dies die Theorie von Reibisch-Simroth erfordert, ist daher hiedurch widerlegt. Schon eine Schwankung von $\frac{1}{4}^\circ$ würde eine jährliche Ebbe und Flut zur Folge haben, die in der Breite von 45° den Betrag von 180 m erreichen würde, welche selbst hochgelegene Niederungen unter Wasser setzen würde.

So sehr sich auch der Gedanke gegen eine Annahme von solchen jährlichen Flutungen sträubt — es ist eben eine ganz ungewohnte Vorstellung — so muß gemäß dem Resultate der analytischen Untersuchung an eine solche gedacht werden, und es wird zu untersuchen sein, ob die Periode des Muschelkalkes, ob das Jurameer sich vielleicht diesem Resultate fügt, wenngleich in jenen entfernten Zeitepochen die Verteilung von Wasser und Land eine ganz andere und vielleicht auch die Resultate dieser Analyse nicht mehr auf jene Epochen anwendbar sind.

Die dritte Wirkung der Vergrößerung des Winkels zwischen Hauptträgheitsachse und Rotationsachse zeigt sich in der Veränderung der Periode der Drehung des Perihels, mit den bereits angedeuteten Veränderungen in der Zwischenzeit zwischen den Stadien des Perihelsommers und Aphelsommers.

Alle hier skizzierten Veränderungen vollziehen sich stetig; erst Jahrtausende werden durch Summation der Effekte die Verhältnisse so weit ändern, daß diese Änderungen merklich werden, und nur durch Vergleichung von

Tatsachen in Zeiträumen, die durch viele Jahrhunderte getrennt sind, können dieselben konstatiert werden.

Sowie die Verkleinerung der Schiefe der Ekliptik in dem einen Sinne wirkt, so werden alle Prozesse bei Vergrößerung der Schiefe der Ekliptik dahin wirken, zunächst einen Impuls zu geben, der ausreicht, um durch Auslösung aller entsprechenden Faktoren eine Milderung des Klimas, eine Abnahme der Vereisung herbeizuführen.

Während die Verkleinerung der Schiefe der Ekliptik — wenn man von Katastrophen absieht — als das wesentliche Moment für den Beginn der Eiszeiten anzusehen ist, geben die darauffolgenden Polhöschwankungen und Veränderungen in der Periode der Perihelrotation ursächliche Motive für Schwankungen in der Vereisung. Wie aber bei allen derartigen Prozessen, wird das Maximum der Vereisung nicht mit dem Minimum der Schiefe zusammenfallen, sondern erst später erfolgen und noch lange, nachdem das Maximum der Schiefe vorüber ist und bereits einer Abnahme derselben Platz gemacht hat, kann noch die Abnahme der Vereisung vorhalten, und erst lange, nachdem bereits die Schiefe der Ekliptik in das Stadium des Wachsens übergegangen sein wird, können noch die Spuren der stärkeren Vereisung bleiben.

Über die Dauer der Zwischenzeiten läßt sich theoretisch keinerlei Schluß ziehen; es hängt wesentlich von dem Verhältnis $\eta : H$ ab, in welchen Intervallen Perihelsommer und Aphelsommer sich wiederholen und über den Quotienten $\eta : H$ Zahlenwerte anzugeben, sind wir völlig außerstande. War die Neigung der Erdbahn klein, und infolge der beginnenden stärkeren Vereisung die Periode der Drehung des Perihels vergrößert, so konnten die Interglazialzeiten wesentlich größer sein; in dem Maße, als die Neigung der Erdbahn größer und damit die Bedingungen für die Vereisung ungünstiger wurden, wurden auch die Zwischenzeiten zwischen Aphelsommer und Perihelsommer kürzer, das Phänomen „verflachte“ sich: Interglazial- und Interstadialzeiten sind also immer schwächer werdende Amplituden, sich verflachende Kurven derselben Erscheinung.

Die aus der Theorie folgenden Flutungen können auch noch eine andere Erscheinung, wenn auch nicht völlig, so doch teilweise erklären. Die Flutungen folgen nämlich der Bewegung des Rotationspoles, der einen Kreis um den Trägheitspol beschreibt. Damit wird dann der Trägheitspol nachgezogen und eine Steigerung des Phänomens bewirkt. Dadurch wird das Problem allerdings wesentlich komplizierter; es müßte die dabei stattfindende Bewegung des Meeres selbst genauer erörtert werden; im großen und ganzen muß jedoch der Effekt der sein, daß eine solche nach Osten gerichtete Flutung durch östlich (Westküsten) vorgelagerte Gebirge aufgehalten, jedoch über Flachküsten hin ungestört vordringen kann. So kann erklärt werden, daß die Flutung im großen Ozean an den Westküsten von Amerika gehemmt, erfolglos blieb, hingegen sich in Eurasien über Europa weg gerade gegen Osten zu am weitesten vorschob; so mag auch die von der Arktis ausgehende Flutung in Nordamerika ihren Weg gegen Osten genommen haben.

Wir sind allerdings gegenwärtig in einem Stadium der Abnahme der Schiefe der Ekliptik und nach den Ansichten der Geologen ist das Intervall seit der Eiszeit bis jetzt kürzer als die Interglazialzeiten waren. Es kann dies als das letzte, kürzeste Stadium einer Interglazialzeit sein — es kann auch vielleicht das gegenwärtige Intervall länger sein, als man aus der Denudation anzunehmen geneigt ist; jedenfalls muß auch mit der zunehmenden Starrheit der Erdkruste und dem größeren Widerstande der Einfluß der Eisauflagerungen ein steigender sein, da er nicht mehr durch so ausgiebige Senkungen kompensiert wird.¹⁾ So viel scheint nur — entgegen der allgemeinen Ansicht — sicher, daß eine Wiederholung der Eiszeiten möglicherweise durch eine größere Stabilisierung der Verhältnisse durch eine vielleicht vergrößerte Abplattung seit der letzten Eiszeit unwahrscheinlich ist, daß wir dieselbe aber nicht absolut negieren können. Im Gegenteil scheint mir, ohne daß wir eine Katastrophe als auslösendes Agens für eine neue Eiszeit anzunehmen brauchen, das Wiedereintreten einer solchen durchaus, allerdings nicht in den nächsten 1000 Jahren, nicht so unmöglich.

Die Neigung der Erdbahn vermindert sich gegenwärtig; wie lange dies dauern wird, wissen wir nicht sicher; für die nächsten 2000, vielleicht sogar 5000 Jahre können wir uns noch auf die astronomischen Rechnungen verlassen. Die Periode der Umdrehung des Perihels ist gegenwärtig 21.000 Jahre, und die Exzentrizität der Erdbahn relativ klein; wenn also eine Eiszeit diesen Verhältnissen entsprechend kommen sollte, so wird sie wahrscheinlich mäßig sein, und sehr rasch, schon nach 10.000 Jahren schwinden; und daß wir einer Kälteperiode zusteuern, erscheint mir wahrscheinlich. Bedenkt man, daß vor 2000 Jahren Übergänge über die Alpen, die Pyrenäen (Hannibal, Marius, Caesar; die Einwanderung der Gallier u. s. w.) selbst mit Heeren und Elefanten relativ häufig waren²⁾, ein Vorhaben, zu dem man sich in unserer, mit so viel vollkommeneren Hilfsmitteln ausgestatteten Zeit kaum so leicht entschließen wird; bedenkt man, daß eben damals der Weg über Island nach Grönland selbst den unvollkommenen Fahrzeugen jener Zeit offen stand, daß in diesen früheren Zeiten die Kolonisation Grönlands von Europa aus stattgefunden haben muß, so ist es nicht schwer, wenigstens auf 2000 Jahre zurück ein weit nach Norden hin gemäßigteres Klima und für die Alpen eine viel höhere Schneegrenze anzunehmen. Sind die fossilen Reste aus den arktischen Regionen sämtlich miozän oder sind einzelne postglazial? Ist es möglich, daß, sagen wir in 10.000 Jahren, eine Flora jene fossilen Abdrücke in den arktischen Schiefen zurückgelassen haben kann?

Und wenn alle tröstlichen Versicherungen jede Eiszeit unwahrscheinlich machen würden, so braucht es nicht der Jahrmillionen, während welcher uns die Sonne noch ihr Licht und ihre Wärme spenden wird, bis nach ihrem endlichen

1) Bemerkte mag noch werden, daß die neueren Erfahrungen, nach welchen die Vereisung um den Nordpol völlig exzentrisch, der Nordpol selbst wenig oder gar nicht vereist und in der nächsten Nähe vielleicht stellenweise von Tieren bewohnt ist, dieser Theorie nicht entgegenstehen.

2) Weitere kritische Untersuchungen in dieser Richtung von Seiten der Historiker wären hier sehr erwünscht.

Verlöschen der Tod alles Lebens die Folge sein wird. Eine große Katastrophe, allerdings hundertmal mächtiger wie diejenige, welche den Jorullo aufwarf, eine Katastrophe ähnlich derjenigen, wie dieselbe im Tertiär angenommen wird, kann im Laufe der Zeiten völlig veränderte Verhältnisse herbeiführen. Ist eine solche Katastrophe ausgeschlossen? Wahrscheinlich; die Dicke der Erdkruste nimmt zu und die Abkühlung der Erde, die diese endlich zu einem völlig starren, kalten Körper machen wird, gibt uns gegenwärtig wenigstens die Versicherung, daß wir auf etwas sichererem Boden stehen, als die diluvialen Menschen oder die jurassischen Ichthyosaurier — aber selbst der Mond, jener starre, längst abgestorbene Körper, zeigt, wie heute nicht mehr bezweifelt werden kann noch Spuren einer Tätigkeit in seinem Innern, die seine äußere Konfiguration, wenn auch nur in geringen Maße, verändert, und wenn auch das Erdinnere in einem Gleichgewichtszustande ist, in welchem keine übermäßigen Hitzegrade und keine kolossalen Expansivkräfte, sondern nur mäßige Temperaturen herrschen und die großen Drucke nur hydrostatische Drucke sind, so werden im Laufe der Zeiten die Katastrophen, ob man sie nun als plötzliche einheitliche oder als eine Summe einer größeren Zahl kleinerer ansieht, immer seltener werden, aber auszuschließen sind sie nicht. Und wenn wir auch von diesen großen oder kleinen Katastrophen absehen, so enthält der ewige Wechsel in der Natur, der sich streng gesetzmäßig und kausal vollzieht, aber dabei immer neue Veränderungen schafft, nicht minder den Keim zu jenen Umwälzungen, die, sich stetig vollziehend, zu demselben Resultate führen: Werden und Vergehen in der Zeiten Flucht.
